Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Guro Svendsen (73592773)

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate:
Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

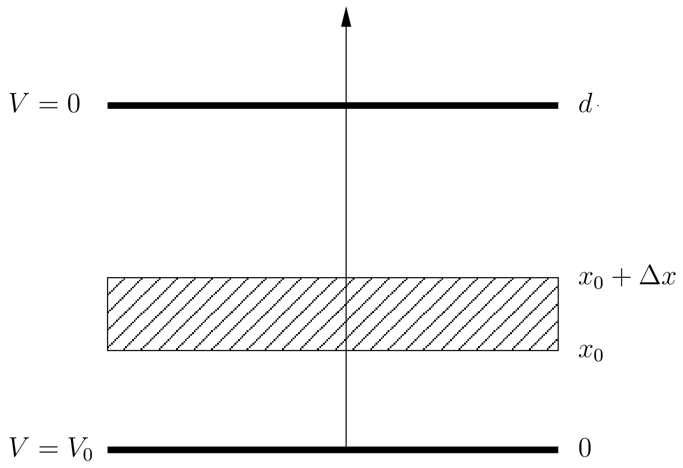
Mandag 3. august 2009
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur: 24. august 2009

Oppgave 1

a) Skriv opp Coulombs lov for to punktladninger i vakuum, og definer/forklar alle størrelsene som inngår.

b) To ledende plater er plassert i henholdsvis $x = 0$ og $x = d$. Platene har så stort areal at de kan regnes som uendelige. Platen i $x = 0$ har potensial V_0, mens platen i $x = d$ har potensial 0. Anta vakuum mellom platene. Finn potensialet og det elektriske feltet mellom platene.

c) Vi legger nå inn en skive med et dielektrisk materiale mellom platene. Materialet har permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ og tykkelse Δx. Skiven befinner seg i området $(x_0, x_0 + \Delta x)$, se figuren på neste side. Potensialet på platene holdes hele tiden konstant (lik henholdsvis V_0 og 0). Finn det elektriske feltet mellom platene.



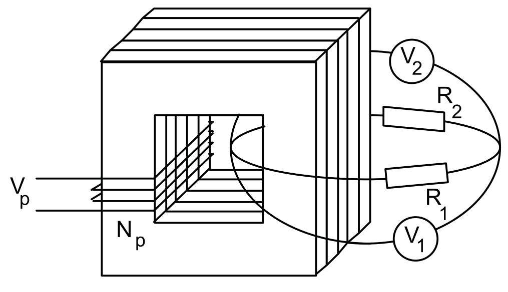
d) Hva blir det elektriske feltet inne i det dielektriske materialet dersom $\epsilon_r \approx \infty$? Forklar hvordan (alle typer) ladning er fordelt i dette tilfellet.

e) La fortsatt $\epsilon_r \approx \infty$. Kan det virke en kraft mellom de ledende platene og den dielektriske skiven? Hvis nei, forklar hvorfor ikke. Hvis ja, finn kraften på den dielektriske skiven per arealenhet.

Oppgave 2

Figuren nedenfor viser en transformator. Vi antar at kjernen er ideell, med uendelig permeabilitet, og uten tap. Primærviklingen består av N_p viklinger, og dens resistans er null. Den påtrykkes en spenning

$$V_p = V_0 \cos \omega t. \tag{1}$$



Finn spenningen som avleses på de to voltmetrene V_1 og V_2. Voltmetrene er i modus for å måle vekselspenning.

Oppgave 3

a) To spoler har henholdsvis selvinduktanser L_{11} og L_{22}. Den gjensidige induktansen mellom spolene er $L_{12} = L_{21}$. Vis at

$$-\frac{L_{11} + L_{22}}{2} \leq L_{12} \leq \frac{L_{11} + L_{22}}{2}. \tag{2}$$

Tips: Se på uttrykket for energien til spolene.

b) Finn den totale selvinduktansen L_{tot} for en seriekopling av spolene, og vis at den tilfredsstiller

$$0 \leq L_{\text{tot}} \leq 2(L_{11} + L_{22}). \tag{3}$$

c) Gi et eksempel på en sammenstilling av spoler med like selvinduktanser ($L_{11} = L_{22} \equiv L$, og $L \neq 0$), og der seriekoplingen tilfredsstiller $L_{\text{tot}} = 0$. Oppgi også et eksempel der $L_{\text{tot}} = 4L$, og et eksempel der $L_{\text{tot}} = 2L$.

Oppgave 4

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Når er Amperes' lov $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ gyldig?

i) kun når det er symmetri,

ii) kun i magnetostatikken når $\partial \vec{D}/\partial t = 0$,

iii) kun i magnetostatikken når $\partial \vec{D}/\partial t = 0$, og når det er symmetri,

iv) alltid.

b) Likningen $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ impliserer alene at

i) en lang, rett leder som fører en strøm gir opphav til et sirkulerende magnetfelt,

ii) ladningsbevarelse,

iii) Gauss' lov er tilfredsstilt,

iv) en varierende fluks induserer en emf.

c) Gitt en ledertråd med tverrsnittsareal 0.5 mm^2. Lederen fører strømmen $I = 5$ A, som er jevnt fordelt over tverrsnittet. Hva er de frie elektronenes midlere driftshastighet hvis lederen er kopper med fri elektrontetthet $N = 8.5 \cdot 10^{28}$ m^{-3}?

i) $3 \cdot 10^5$ m/s,

ii) $3 \cdot 10^8$ m/s,

iii) 0.24 mm/s,

iv) 0.74 mm/s.

d) Bestem dimensjonen til konstanten k slik at likningen $\nabla \times \vec{H} = kE^2\vec{u}_x$ blir dimensjonsmessig korrekt. (Her er $\vec{H}$ et magnetisk felt, E en elektrisk feltstyrke og $\vec{u}_x$ en enhetsvektor.) Svar:

i) $m^{-1}s$,

ii) $A^2s^3kg^{-1}m^{-2}$,

iii) $A^3kg^{-2}s^2$.

iv) ingen av alternativene ovenfor.

e) Velg den mest fornuftige påstanden av i)-iii). Dersom ingen av dem virker fornuftige velger du iv).

i) Kompass forstyrres mye av høyspentlinjer,

ii) En mobillader i kontakten bruker den samme effekten uansett om mobilen er tilkoplet eller ei,

iii) Magnetfeltet fra høyspentlinjer er stort pga. den høye spenningen,

iv) Ingen av alternativene ovenfor.

Oppgitte konstanter og formler

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$
30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)
31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$
32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x, y, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$
43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r, \phi, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \phi, z)$, $F_r = F_r(r, \phi, z)$, $F_\phi = F_\phi(r, \phi, z)$, $F_z = F_z(r, \phi, z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$
48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$, $F_r = F_r(r, \theta, \phi)$, $F_\theta = F_\theta(r, \theta, \phi)$, $F_\phi = F_\phi(r, \theta, \phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$
51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right] + \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$
53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\ \text{tang}} = \vec{E}_{2\ \text{tang}}, \qquad \vec{D}_{1\ \text{norm}} - \vec{D}_{2\ \text{norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\ \text{tang}} - \vec{H}_{2\ \text{tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\ \text{norm}} = \vec{B}_{2\ \text{norm}}.$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				