NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informatikk, matematikk og elektroteknikk
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Lars Lydersen
Tlf.: 91439

EKSAMEN I EMNE
TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

TORSDAG 22. MAI 2008
TID: KL 0900 - 1300

Sensur: Senest/seinast 12.06.2008.

Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

Totalt 8 sider inkludert forside.
Alle *del*oppgaver/*del*oppgåver har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

Oppgave 1

En parallellplatekondensator består av to plane, parallelle ledere i en avstand d. Mellom lederne er det vakuum, og potensialforskjellen mellom lederene er V_0. Lederene har areal S, der $S \gg d^2$ slik at man kan se bort i fra eventuelle randeffekter.

a) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ mellom lederene.

b) Finn kapasitansen C til kondensatoren.

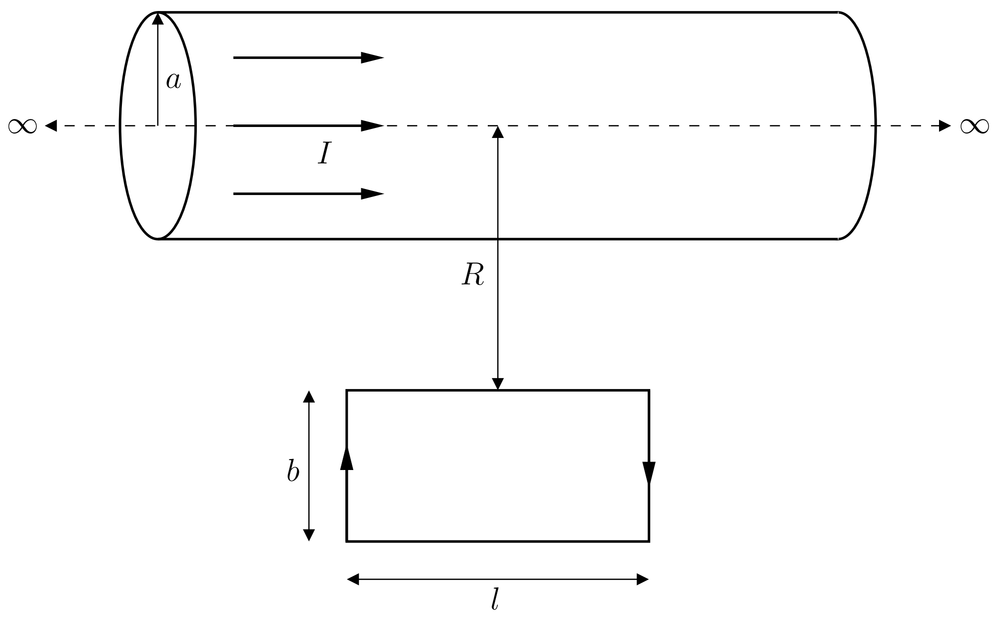
c) Vi legger inn et lineært, isotropt og homogent medium med permitivitet ϵ mellom lederene. Spenningen holdes konstant lik V_0. Hvordan blir det elektriske feltet? Tolk svaret.

Oppgave 2

En uendelig lang, rett og sirkulær leder fører strømmen I, som er jevnt fordelt over tverrsnittet. Ellers i rommet er det vakuum. Lederen har radius a.

a) Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ over alt i rommet.

b) Vi legger inn en rektangulær, ledende sløyfe med bredde b og lengde l i en avstand R fra sentrum av den rette lederen. Hele sløyfen er utenfor lederen dvs. $R > a$. Se figur 1.



Figur 1: Uendelig lang, rett og sirkulær leder og en rektangulær ledende sløyfe.

Finn den gjensidige induktansen L_{12} mellom den uendelig lange, rette lederen, og den rektangulære sløyfen.

c) La strømmen i den uendelig lange, rette lederen være gitt ved $I = I_0 \cos(\omega t)$. Finn indusert emf i den rektangulære sløyfen.

Oppgave 3

a) En sylinderformet leder har lengde l, radius r og konstant konduktans σ. Du kan anta at det elektriske feltet er uniformt i lederen. Vis at resistansen $R = V/I$ mellom de to sirkulære endeflatene er gitt ved

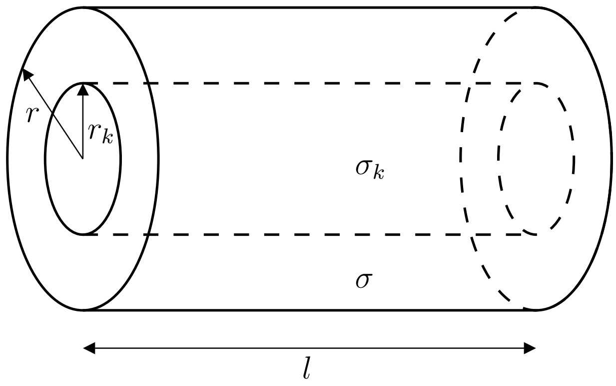
$$R = \frac{l}{\sigma \pi r^2}. \tag{1}$$

b) Skriv ned uttrykket for effekttap per volumenhet i et materiale, og bruk dette til å finne det totale effekttapet i lederen. Vis at resultatet kan skrives

$$P_j = \frac{V^2}{R}, \tag{2}$$

der V er påtrykt spenning og R er resistansen gitt i likning 1.

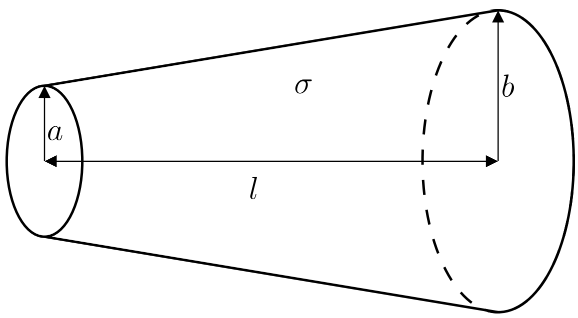
c) Vi bytter ut kjernen av lederen i oppgave a) med et materiale med en annen konduktans σ_k. Kjernen har radius r_k. Se figur 2. Kontaktpunktene er fremdeles de sirkulære endeflatene og du kan fremdeles anta at det elektriske feltet er uniformt fordelt.



Figur 2: Sylinderformet leder.

Finn resistansen til den sirkulære lederen med kjerne. Tolk svaret. Sjekk svaret ditt på minst en måte.

d) Vi ser så på en kjegleformet leder med lengde l, og konduktans σ. Den minste radiusen er a og den største radiusen er b. Se figur 3.



Figur 3: Kjegleformet leder.

Finn et tilnærmet uttrykk for resistansen i lederen ved å bruke resultatet fra oppgave a).

Oppgave 4

Til hvert av de 5 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

a) Når er Poisson's likning $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$ gyldig?

i) Alltid,

ii) For lineære, isotrope, og homogene medier i elektrodynamikken,

iii) Alltid i elektrostatikken dersom man skriver likningen som $\nabla^2 V = (\nabla \cdot \vec{P} - \rho)/\epsilon_0$,

iv) Den er bare gyldig dersom $\epsilon = \epsilon_0$.

b) Hva innebærer likningen $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$?

i) At vektorpotensialet er bestemt av sirkulasjonen til $\vec{B}$,

ii) Likningen innebærer ladningsbevarelse,

iii) At $\vec{B}$-feltet ikke kan strømme ut av et punkt,

iv) Alle alternativene ovenfor.

c) Hva er enheten for vektorpotensialet ($\vec{A}$) uttrykt ved grunnenhetene i SI-systemet?

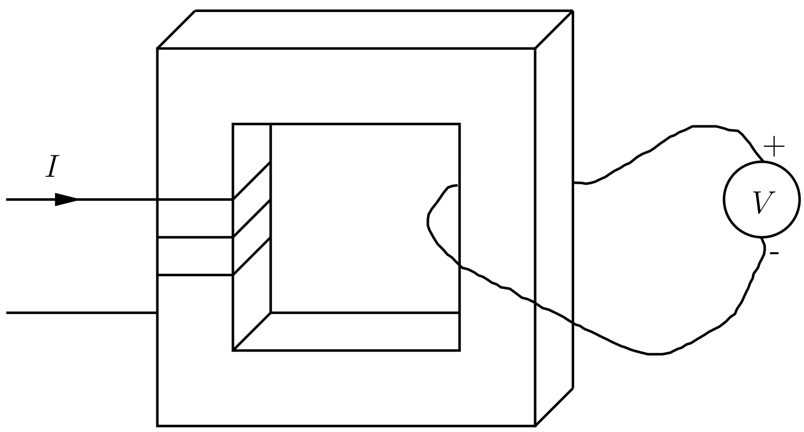
i) $\mathrm{kg^2m^{-1}A}$,

ii) $\mathrm{kgm^{-1}s^{-2}A^{-1}}$,

iii) $\mathrm{kgm^{-1}s^{-1}C^{-1}}$,

iv) Ingen av alternativene ovenfor.

d) Strømmen I i primærsløyfen i figuren under minker med tiden. Hva viser voltmeteret i sekundersløyfen?



i) Positiv spenning,

ii) Negativ spenning,

iii) Oscillerende spenning,

iv) Null spenning.

e) Når gjelder likningen

$$\frac{1}{C_{\mathrm{tot}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{3}$$

for den totale kapasitansen C_{tot} til to seriekoblede kondensatorer med kapasitans C_1 og C_2?

i) Alltid i elektrostatikken,

ii) Kun hvis alle elektriske feltlinjer står normalt på alle ekvipotensialflater,

iii) Dersom de elektriske feltlinjene holder seg inne i hver enkelt kondensator,

iv) Alltid dersom man er ferdigutdannet sivilingeniør.

Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i }S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \qquad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \qquad \vec{F} = Q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i }S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}\,',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Noen konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Matematiske formler:

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$

30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)

31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$

32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x,y,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$, $F_x = F_x(x,y,z)$, $F_y = F_y(x,y,z)$, $F_z = F_z(x,y,z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$

41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r,\phi,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\phi,z)$, $F_r = F_r(r,\phi,z)$, $F_\phi = F_\phi(r,\phi,z)$, $F_z = F_z(r,\phi,z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$

46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$

48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r,\theta,\phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta,\phi)$, $F_r = F_r(r,\theta,\phi)$, $F_\theta = F_\theta(r,\theta,\phi)$, $F_\phi = F_\phi(r,\theta,\phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$

51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$

52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r}\right]$
$+ \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$

53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				