NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informatikk, matematikk og elektroteknikk
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Johannes Skaar
Tlf.: 91432

EKSAMEN I EMNE
TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

TIRSDAG 30. MAI 2006
TID: KL 0900 - 1300

Sensur: Senest/seinast 21.06.2005.

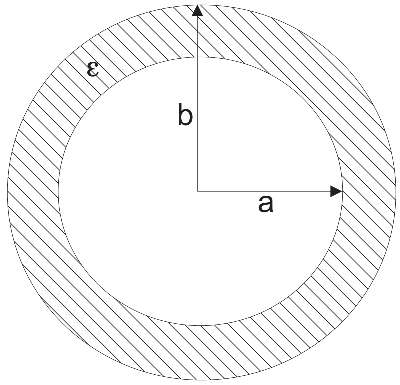
Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

Totalt 7 sider inkludert forside.
Alle *del*oppgaver/*del*oppgåver har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

Oppgave 1

En kulekondensator består av to ideelt ledende, konsentriske kuleskall med radius hhv. a og b. Volumet mellom de to lederne er fylt med et dielektrisk medium med permittivitet ϵ.



Figur 1: Tverrsnittet til en kulekondensator.

a) Bestem kapasitansen C til en slik kondensator.

b) Kontrollér svaret i a) ved å vise at kapasitansen blir som for en parallellplatekondensator når det dielektriske sjiktet mellom lederne blir veldig tynt, dvs. $b-a \ll a$. (Denne antagelsen skal kun brukes i denne deloppgaven.)

c) Anta at kondensatoren har null netto ladning. Dersom spenningen over kondensatoren er V, finn det elektriske feltet overalt, uttrykt ved C.

d) Skriv opp uttrykket for lagret energi per volumenhet i et elektrisk felt, og vis ut fra dette uttrykket at den totale energien kan skrives $W_e = \frac{1}{2}CV^2$, der V er spenningen over de to lederne.

e) Dersom permittiviteten mellom lederne er en funksjon $\epsilon = \epsilon(r)$, vis at kapasitansen C blir gitt av

$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\epsilon(r)4\pi r^2}. \tag{1}$$

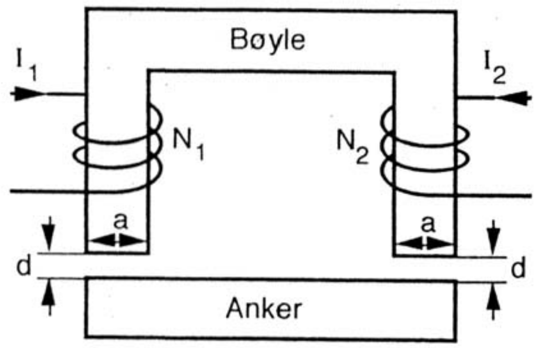
Tolk uttrykket dersom integralet tilnærmes med en sum.

f) Anta nå at mediet i området $a < r < b$ har konstant permittivitet ϵ og konstant konduktivitet σ (dvs. både ϵ og σ er uavhengige av r). Hva blir resistansen målt mellom de to lederne?

Oppgave 2

På figuren er vist en magnetisk krets, som består av to deler av ferromagnetisk materiale. Disse er kalt "bøyle" og "anker". De er skilt fra hverandre med to luftgap, av lengde d, som antas å være mye mindre enn bøylens og ankerets bredde a. Bøylens og ankerets tykkelse, i retning vinkelrett på papirplanet, er også a, slik at tverrsnittet er kvadratisk. Det ferromagnetiske materialet har så høy relativ permeabilitet at den kan antas å være uendelig.

På bøylens ben er det viklet to spoler, med henholdsvis N_1 og N_2 viklinger. I de to spolene går henholdsvis strømmene I_1 og I_2, der positiv retning er antydet på figuren.



Figur 2: Magnetisk krets for oppgave 2.

a) Beregn den magnetiske fluksen gjennom tverrsnittet av bøylen når I_1 og I_2 er konstante.

b) Beregn selvinduktansene L_1 og L_2 for de to spolene, og den gjensidige induktansen L_{12} mellom dem.

c) Beregn kraften som trekker ankeret mot bøylen når I_1 og I_2 holdes konstante.

d) La nå strømmen i spole 2 være null, mens strømmen i spole 1 varierer med tiden t:

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t), \tag{2}$$

hvor I_0 og ω er reelle konstanter. Beregn den elektromotoriske spenningen som induseres i spole 2.

e) La fremdeles strømmen i spole 2 være null, mens I_1 nå er konstant. La ankeret vibrere opp og ned, slik at

$$d = d_0 + d_1 \sin(\omega t), \tag{3}$$

der $d_1 \ll d_0$. Beregn den elektromotoriske spenningen som induseres i spole 2.

Oppgave 3

Til hvert av de 5 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

a) Hvilke(n) av Maxwells likninger er automatisk oppfyllt dersom vi uttrykker $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ og $\vec{E} = -\nabla V - \partial \vec{A}/\partial t$, der V er et skalarpotensial og $\vec{A}$ er et vektorpotensial?

i) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ og $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$,

ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ og $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

iii) kun $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

iv) ingen.

b) Når er Amperes lov $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ gyldig?

i) når det er symmetri,

ii) når $\partial\vec{D}/\partial t = 0$,

iii) når $\partial\vec{B}/\partial t = 0$,

iv) alltid.

c) Gitt et begrenset område/volum v med et lineært, isotropt og homogent medium. Det er ingen fri romladning i v (dvs. $\rho = 0$), men det er frie ladninger et stykke utenfor v. Du kan anta elektrostatiske forhold. Hvor har potensialet $V = V(x, y, z)$ sitt maksimum (når vi ser bort fra verdiene av V utenfor volumet)?

i) et sted på randen av v,

ii) et sted inne i v,

iii) et sted enten på randen av v eller inne i v,

iv) potensialet er konstant inne i og på randen av v.

d) Bestem dimensjonen til konstanten k slik at likningen $\epsilon_0 E^2 = kBH$ blir dimensjonsmessig korrekt. (Her er ϵ_0 permittiviteten i vakuum, E et elektrisk felt, B en magnetisk flukstetthet og H et magnetisk felt.) Svar:

i) ms^{-1},

ii) kgms^{-2},

iii) Akgms^{-2},

iv) 1.

e) Hva er forskyvingstrøm?

i) $\partial\vec{D}/\partial t$,

ii) $\partial\vec{J}/\partial t$,

iii) $\vec{J}$,

iv) strømninger langs energibaner i kvantestjerner.

Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2V - \epsilon\mu\frac{\partial^2V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Noen konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Matematiske formler:

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$
30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)
31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$
32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x, y, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$
43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r, \phi, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \phi, z)$, $F_r = F_r(r, \phi, z)$, $F_\phi = F_\phi(r, \phi, z)$, $F_z = F_z(r, \phi, z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$
48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$, $F_r = F_r(r, \theta, \phi)$, $F_\theta = F_\theta(r, \theta, \phi)$, $F_\phi = F_\phi(r, \theta, \phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$
51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right] + \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$
53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				