NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informatikk, matematikk og elektroteknikk
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Bertil Nistad
Tlf.: 91436

KONTIUNASJONSEKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

AUGUST 2006
TID: KL 0900 - 1300

Sensur: Senest/seinast 3 uker etter eksamensdato.

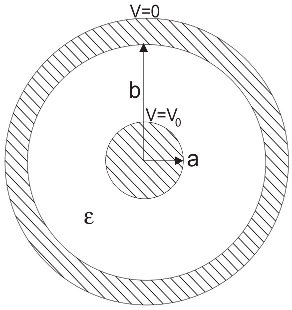
Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

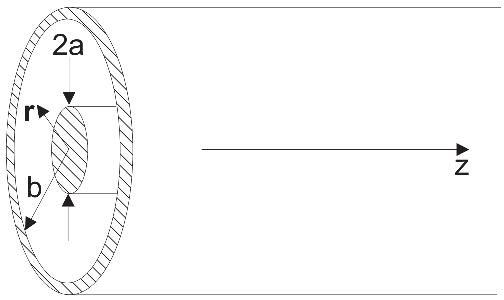
Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

Totalt 7 sider inkludert forside.
Alle *del*oppgaver/*del*oppgåver har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med en indre radius b, se figur. Kabelens lengde er mye større enn b. Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Innerlederen har det konstante potensialet V_0, mens ytterlederen har potensial 0. Anta at lederne er ideelle.





a) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ som funksjon av r.

b) Finn potensialet som funksjon av r.

c) Finn kapasitansen per lengdeenhet.

d) Anta nå at mediet mellom lederne har en viss ledningsevne (konduktivitet) $\sigma = \sigma_k r^k$, der k og σ_k er konstanter. Potensialet på inner- og ytterlederen er som før. Finn resistansen mellom innerleder og ytterleder dersom kabelens lengde er l.

e) Er følgende påstand rett? Vis hvorfor du mener den er rett/gal. "Hvis permittiviteten mellom lederne er ϵ, betyr Gauss' lov at det elektriske feltet må være det samme som i a), uavhengig av en evt. konduktivitet σ mellom lederne."

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven regne ut permittiviteten til et plasma. Et plasma består av en mengde positive og negative punktladninger som er jevnt og tett fordelt utover et område. Hver positiv punktladning har masse M og ladning $+q$, der $q > 0$, og hver negativ punktladning har masse m og ladning $-q$. Vi antar at $M \gg m$, slik f.eks. vil være tilfelle dersom de positive ladningene er ioner mens de negative ladningene er elektroner. Pga. denne antagelsen kan vi regne som om de positive ladningene er ubevegelige. De negative ladningene antas frie.

Til å begynne med er det elektriske feltet null overalt. Ethvert volumelement kan da regnes som nøytralt (det er like mange positive og negative punktladninger inne i volumelementet), og ladningene er i ro.

Vi setter nå på et uniformt og harmonisk varierende elektrisk felt:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t). \tag{1}$$

Her er $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$, og E_0 og ω er konstanter, og t er tiden. Du kan anta at dette feltet har eksistert i lang tid slik at eventuelle transienter i plasmaet er dødd ut.

a) Som et resultat av det varierende elektriske feltet vil punktladningene vibrere (bevege seg fram og tilbake i takt med $\vec{E}(t)$). Vis at forskyvningen til en av de negative punktladningene blir

$$x(t) = +\frac{qE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t). \tag{2}$$

b) En positiv punktladning befinner seg i likevektspunktet til bevegelsen (2). Finn det resulterende dipolmomentet (pga. den negative ladningen i a) og den positive ladningen i $x = 0$). Bruk resultatet til å vise at polariseringstettheten i plasmaet blir

$$\vec{P}(t) = -\frac{Nq^2E_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)\cdot\vec{u}_x, \tag{3}$$

der N er antall negative (evt. positive) ladninger per volumenhet.

c) Ved hjelp av (3), vis at den relative permittiviteten ved denne type harmoniske felt er

$$\epsilon_{\mathrm{r}} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}, \tag{4}$$

der

$$\omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}. \tag{5}$$

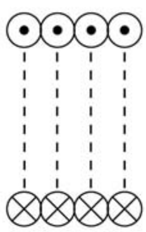
Skisser ϵ_{r} som funksjon av frekvensen ω. (Det er interessant å legge merke til at ϵ_{r} blir negativ for $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$. Frekvensen ω_{p} kalles plasmafrekvensen.)

Oppgave 3

Til hvert av de 6 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

a) Gitt en spole som består av fire like sløyfer. Sløyfene ligger helt tett inntil hverandre slik at gjensidig induktans mellom sløyfene er lik selvinduktansen L i hver sløyfe.

Anta at strømmen går i samme retning i alle sløyfene.



Hva er spolens totale selvinduktans.

i) L,

ii) $4L$,

iii) $8L$,

iv) $16L$.

b) I a), hva blir spolens totale selvinduktans dersom strømretningen snus i en av sløyfene?

i) L,

ii) $4L$,

iii) $6L$,

iv) $14L$.

c) Hvilke(n) av Maxwells likninger er automatisk oppfyllt dersom vi uttrykker $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ og $\vec{E} = -\nabla V - \partial \vec{A}/\partial t$, der V er et skalarpotensial og $\vec{A}$ er et vektorpotensial?

i) kun $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ og $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$,

iii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ og $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

iv) ingen.

d) Anta at en uendelig lang, ideelt ledende sylinder fører den konstante strømmen I langs sin akse. Strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet. Hva kan du si om det radielle elektriske feltet E_r?

i) $E_r \neq 0$,

ii) $E_r > 0$,

iii) $E_r = 0$,

iv) ingenting.

e) Hva er enheten for permeabilitet (μ) uttrykt ved grunnenhetene i SI-systemet?

i) $\mathrm{m^{-1}A}$,

ii) $\mathrm{kgm^2s^{-2}A}$.

iii) $\mathrm{kgms^{-2}A^{-1}}$,

iv) Ingen av alternativene ovenfor.

f) I et punkt er $\vec{A} = 0$. Hvilken av følgende påstander er rett?

i) Da er $\vec{B} = 0$ men ikke nødvendigvis $\vec{H} = 0$,

ii) Da er $\vec{B} = 0$ og $\vec{H} = 0$,

iii) Da er $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, ...,$ (hele alfabetet) $= 0$.

iv) Ingen av alternativene ovenfor er nødvendigvis rett.

Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\ \text{tang}} = \vec{E}_{2\ \text{tang}}, \qquad \vec{D}_{1\ \text{norm}} - \vec{D}_{2\ \text{norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\ \text{tang}} - \vec{H}_{2\ \text{tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\ \text{norm}} = \vec{B}_{2\ \text{norm}}.$$

Noen konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Matematiske formler:

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$
30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)
31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$
32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x, y, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$
43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r, \phi, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \phi, z)$, $F_r = F_r(r, \phi, z)$, $F_\phi = F_\phi(r, \phi, z)$, $F_z = F_z(r, \phi, z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$
48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$, $F_r = F_r(r, \theta, \phi)$, $F_\theta = F_\theta(r, \theta, \phi)$, $F_\phi = F_\phi(r, \theta, \phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$
51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right] + \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$
53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				