NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informatikk, matematikk og elektroteknikk
Institutt for elektronikk og telekommunikasjon

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Johannes Skaar
Tlf.: 91432

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

TIRSDAG 31. MAI 2005
TID: KL 0900 - 1300

Sensur: Senest/seinast 21.06.2005.

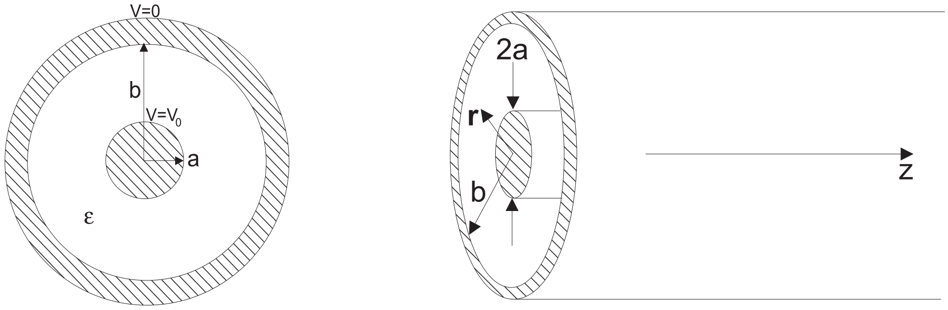
Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte og handskrevne hjelpemiddel tillate: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

Totalt 7 sider inkludert forside.
Alle *del*oppgaver/*del*oppgåver har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med en indre radius b, se figur. Kabelens lengde er mye større enn b. Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Innerlederen har det konstante potensialet V_0, mens ytterlederen har potensial 0. Anta at lederne er ideelle.



a) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ som funksjon av r.

b) Finn potensialet som funksjon av r.

c) Finn kapasitansen per lengdeenhet.

d) I resten av oppgaven erstattes det dielektriske mediet mellom lederne av et medium med samme permittivitet som før, men i tillegg fins en uniform og konstant romladning ρ. Ledningsevnen til mediet er som før ($\sigma = 0$). Potensialene til innerlederen og ytterlederen er som før, og kabelen er netto uladet. Vis at potensialet nå blir

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & \text{for } 0 \leq r \leq a \\ \frac{\rho}{4\epsilon}(b^2 - r^2) + V_1 \ln \frac{b}{r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{for } r \geq b \end{cases} \tag{1}$$

der

$$V_1 = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} - \frac{\rho(b^2 - a^2)}{4\epsilon \ln \frac{b}{a}}. \tag{2}$$

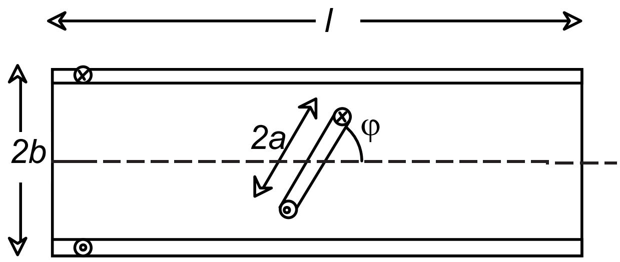
Oppgi flere metoder som kan brukes til å kontrollere svaret for $a < r < b$ (du trenger ikke utføre kontrollene).

e) Finn ladningen per lengdeenhet av innerleder (Q'_a) og ytterleder (Q'_b). Kontroller svarene ved å beregne total ladning per lengdeenhet av kabelen. (Ta utgangspunkt i (1) i denne oppgaven, og for enkelthet skyld ikke skriv ut V_1 vha. (2).)

Oppgave 2

a) Gitt en lang, tettviklet solenoide med N viklinger, lengde l og diameter $2b$. Anta at tykkelsen av viklingen er neglisjerbar, og at $l \gg 2b$, slik at en kan bruke de tilnærmelser som gjelder for meget lange, tynne solenoider. Materialet innenfor og utenfor solenoiden er vakuum. Solenoiden fører en konstant strøm I_1. Finn $\vec{B}$-feltet inne i solenoiden.

b) Finn solenoidens selvinduktans L_1.



c) En lukket, sirkulær strømsløyfe med radius a er plassert midt i solenoiden, slik at sløyfas plan danner en vinkel φ med solenoidens akse (se figuren). Sløyfa fører strømmen I_2. Finn den gjensidige induktansen L_{12} mellom solenoiden og sløyfa.

d) Finn dreiemomentet $\vec{M}_F$ som virker på sløyfa.

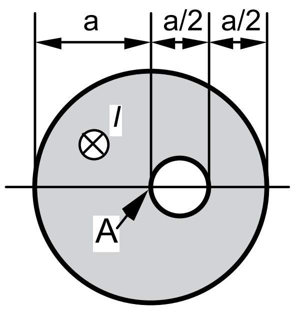
e) Strømmen I_1 i solenoiden holdes konstant, mens sløyfa roterer, slik at $\varphi = \omega t$ hvor ω er en konstant, og t er tiden. Finn den induserte elektromotoriske spenningen i sløyfa.

f) Sløyfa tenkes laget av en ideell leder (superleder), hvor altså resistansen er null. Selvinduktansen er L_2. Sløyfa roterer som i forrige punkt. Til å begynne med ($t = 0$), er strømmen null både i solenoiden og i sløyfa. Så økes strømmen i solenoiden til I_1, og holdes konstant. Finn strømmen I_2 i sløyfa, som funksjon av tiden, etter at strømmen i solenoiden er blitt konstant.

Oppgave 3

Til hvert av de 5 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

a) Figuren viser tverrsnittet av en uendelig lang, hul sylinder. Hulrommet i sylinderen har en diameter som er 1/4 av sylinderens ytterdiameter. Hulrommet tangerer sylinderens akse A, som vist i figuren. Sylinderen fører en strøm I, rettet innover i papiret, bort fra leseren. Strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet. Hva er den magnetiske feltstyrken på sylinderens akse A?



i) $H = I/(8\pi a)$,

ii) $H = 3I/(2\pi a)$,

iii) $H = 2I/(15\pi a)$,

iv) $H = 3I/(8\pi a)$.

b) I forrige deloppgave, dersom $I > 0$, hva er magnetfeltets retning i forhold til papirplanet?

i) innover,

ii) mot venstre,

iii) nedover,

iv) ingen av alternativene ovenfor.

c) Hvilke(n) av Maxwells likninger er automatisk oppfyllt dersom vi uttrykker $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ og $\vec{E} = -\nabla V - \partial \vec{A}/\partial t$, der V er et skalarpotensial og $\vec{A}$ er et vektorpotensial?

i) kun $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

ii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ og $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$,

iii) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ og $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

iv) ingen.

d) En av Maxwells likninger er $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Denne likningen betyr bl.a. at

i) $\vec{E}$-feltet strømmer ut fra ladninger,

ii) En lang, rett leder som fører en strøm gir opphav til et sirkulerende magnetfelt,

iii) Et varierende magnetfelt gjennom en ledende sløyfe induserer en strøm i sløyfa,

iv) Det finnes ikke magnetiske monopoler.

e) Hva er enheten for induktans (H) uttrykt ved grunnenhetene i SI-systemet?

i) $\mathrm{m}^{-1}\mathrm{A}$,

ii) $\mathrm{m}^{-2}\mathrm{sA}$.

iii) $\mathrm{kgm}^2\mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-2}$,

iv) Det kan du sagtens si.

Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \qquad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \qquad \vec{F} = Q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}\,',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Noen konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elementærladningen: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Matematiske formler:

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$
30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)
31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$
32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x,y,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$, $F_x = F_x(x,y,z)$, $F_y = F_y(x,y,z)$, $F_z = F_z(x,y,z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$
43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r,\phi,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\phi,z)$, $F_r = F_r(r,\phi,z)$, $F_\phi = F_\phi(r,\phi,z)$, $F_z = F_z(r,\phi,z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$
48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r,\theta,\phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta,\phi)$, $F_r = F_r(r,\theta,\phi)$, $F_\theta = F_\theta(r,\theta,\phi)$, $F_\phi = F_\phi(r,\theta,\phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$
51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right] + \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$
53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				