NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informatikk, matematikk og elektroteknikk
Institutt for fysikalsk elektronikk

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Johannes Skaar
Tlf.: 91432

EKSAMEN I EMNE
TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

TORSDAG 13. MAI 2004
TID: KL 0900 - 1400

Sensur: Senest/seinast 08.06.2003.

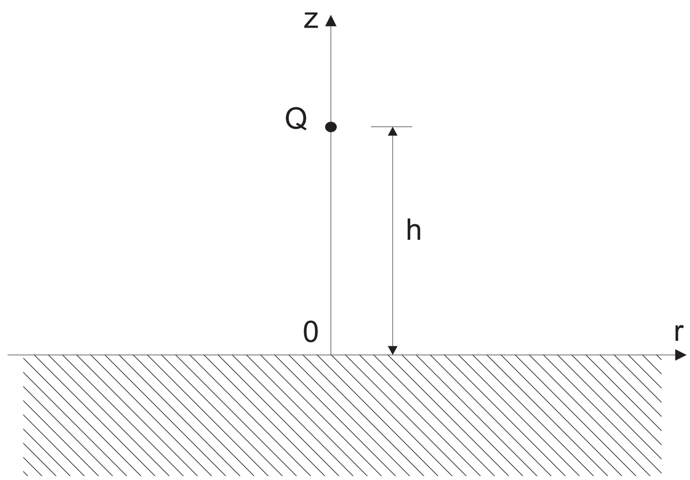
Hjelpemidler:
D - Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:
D - Ingen trykte eller handskrevne hjelpemiddel tillatne. Bestemt, enkel kalkulator er tillaten.

Totalt 7 sider inkludert forside.
Alle *del*oppgaver/*del*oppgåver har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

Oppgave 1

Gitt en punktladning Q som befinner seg i en avstand h fra et uendelig stort, ledende plan, se figuren under. Tips: Bruk speilingsmetoden (du trenger ikke rettferdiggjøre speilingsmetoden i besvarelsen).



a) Bestem potensialet $V(z)$ langs *hele* z-aksen (men $z \neq h$).

b) Bestem det elektriske feltet $\vec{E}$ langs z-aksen for $z < h$.

c) Skissér det elektriske feltet overalt. (Dvs. skissér feltlinjene.)

d) Finn kraften på punktladningen.

e) Beregn arbeidet som må utføres for å frigjøre punktladningen fra planet (dvs. flytte punktladningen til $z = \infty$).

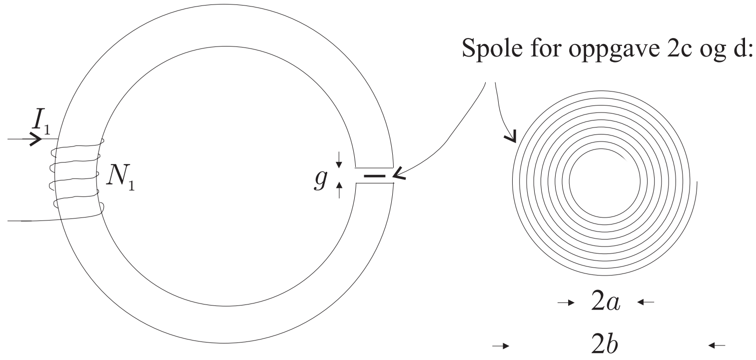
f) Punktladningen Q er nå tilbake på plass i $z = h$. Anta at enda en punktladning plasseres på z-aksen. Denne punktladningen har ladning q og plasseres i punktet $z = z_0$, der $z_0 > h$. Finn kraften som virker på den nye ladningen q.

g) Argumenter for at dersom q er tilstrekkelig liten, kan vi finne frigjøringsarbeidet til q (dvs. arbeidet vi må utføre for å flytte q til $z = \infty$) ved hjelp av svaret i a. Finn arbeidet under denne forutsetningen og oppgi et kriterium for hvor liten q må være for at dette skal være en god tilnærmelse.

Oppgave 2

Figuren på neste side viser en toroideformet (smultringformet) kjerne av et ferromagnetisk materiale med relativ permeabilitet $\mu_r = \infty$. Kjernen har konstant tverrsnittsareal S. Rundt kjernen er det viklet en spole med N_1 viklinger. Anta at toroiden er tynn slik at den magnetiske flukstettheten kan regnes uniform over tverrsnittet. Anta videre at luftgapet g er lite slik at du kan se bort fra spredning av flukslinjer.

a) Vis at fluksen gjennom et tverrsnitt av toroiden er $\mu_0 S N_1 I_1 / g$, der I_1 er strømmen som går igjennom spolen. Hva blir selvinduktansen L_1 til spolen?



Figur 1: Magnetisk krets for oppgave 2.

b) Skriv opp uttrykket for energitettheten i et magnetisk felt (dvs. energi per volumenhet). Bruk dette til å finne energien som er lagret i den magnetiske kretsen, og vis at den er lik $\frac{1}{2}L_1 I_1^2$.

c) En spiralviklet spole med innerradius a og ytterradus b settes nå inn i luftgapet. Spolen er tettviklet og det er N_2 viklinger. Anta at b er mindre enn radiusen til toroidens tverrsnitt. Finn den gjensidige induktansen L_{12} mellom spole 1 (spolen rundt ferromagneten) og spole 2 (spiralspolen i luftgapet).

d) Spole 1 koples til en vekselspenningsgenerator med spenning $V_1 = V_0 \cos(2\pi f t)$, der f er frekvensen. Den andre spolen koples til et voltmeter med uendelig impedans. Hva blir spenningen som måles på voltmeteret? Du trenger ikke ta hensyn til fortegnet. Hvis vi i stedet hadde koplet generatoren på den andre spolen og målt spenningen på den første, ville vi fått samme resultat? Begrunn svaret.

Oppgave 3

a) Forklar hvorfor likningen $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ betyr ladningsbevarelse. Størrelsen ρ er romladningstetthet og $\vec{J}$ er strømtetthet.

b) Vis at Maxwells likninger impliserer ladningsbevarelse.

Oppgave 4

Til hvert av de 5 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, –1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

a) En av Maxwells likninger er $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Denne likningen betyr bl.a. at

i) Ohms lov er gyldig i motstander,

ii) en lang, rett leder som fører en konstant strøm gir opphav til et sirkulerende magnetfelt,

iii) et varierende magnetfelt gjennom en ledende sløyfe induserer en strøm i sløyfa,

iv) i elektrostatikken er $\vec{E}$ konservativt.

b) Følgende uttrykk er påstått å beskrive det elektrostatiske feltet fra en ladningsansamling: $\vec{E} = \frac{Q\vec{u}_\varphi}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}\right)$. Anta at ladningsansamlingen har begenset utstrekning i alle retninger. Størrelsen $Q \neq 0$ er den totale ladningen til ladningsansamlingen, r er avstanden fra origo til observasjonspunktet og $\vec{u}_\varphi$ er enhetsvektoren i den retningen den polare vinkelen φ øker (i et sfærisk koordinatsystem). Uten å kjenne detaljene om ladningsansamlingen og utregningen, hvorfor kan du likevel si at uttrykket må være galt?

i) Uttrykket er dimensjonsmessig feil,

ii) Uttrykket stemmer ikke med Gauss' lov,

iii) Uttrykket er feil siden det ikke tilfredsstiller $\nabla \times \vec{E} = 0$,

iv) Alle de tre innvendingene ovenfor er riktige.

c) I en ideell leder

i) er alltid potensialet null ($V = 0$),

ii) er alltid $\vec{E} = 0$,

iii) kan det ikke finnes strømtetthet ($\vec{J} = \sigma\vec{E} = 0$),

iv) Alle de tre påstandene ovenfor er riktige.

d) I et begrenset volum er vektorpotensialet $\vec{A} = ay\vec{u}_x$, angitt i et kartesisk koordinatsystem. Størrelsen a antas å være uavhengig av koordinatene x, y og z i dette volumet. Hvilken av følgende påstander beskriver nødvendigvis volumet på en riktig måte?

i) Den magnetiske flukstettheten er uniform,

ii) Det elektriske feltet er uniformt,

iii) Volumet er ladningsfritt,

iv) Volumet er karakterisert ved $\mu = \mu_0$.

e) Har $\vec{v} \times \vec{B}$ samme dimensjon som et elektrisk felt ($\vec{v}$ er hastighet og $\vec{B}$ er magnetisk flukstetthet)?

i) Ja,

ii) Nei,

iii) Hastighet kan både måles i m/s og sm (sekundmeter); følgelig kan svaret både være ja og nei avhengig av hvordan hastigheten måles.

iv) Hakke peiling.

Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\vec{M}_F = \vec{m}\times\vec{B}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\text{ tang}} = \vec{E}_{2\text{ tang}}, \qquad \vec{D}_{1\text{ norm}} - \vec{D}_{2\text{ norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\text{ tang}} - \vec{H}_{2\text{ tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\text{ norm}} = \vec{B}_{2\text{ norm}}.$$

Noen konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Matematiske formler:

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V + W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$

30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)

31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$

32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x, y, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$

41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

44. $\nabla^2\mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r, \phi, z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \phi, z)$, $F_r = F_r(r, \phi, z)$, $F_\phi = F_\phi(r, \phi, z)$, $F_z = F_z(r, \phi, z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$

46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$

48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

49. $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$, $F_r = F_r(r, \theta, \phi)$, $F_\theta = F_\theta(r, \theta, \phi)$, $F_\phi = F_\phi(r, \theta, \phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$

51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$

52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right]$
$+ \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$

53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

54. $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

STUDENTNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				