



Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:

Navn: Johannes Skaar

Tlf.: 94400

**KONTIUNASJONSEKSAMEN I EMNE  
TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME**

**TORSDAG 6. AUGUST 2004**

**TID: KL 0900 - 1400**

Sensur: Senest/seinast 27.08.2004.

Hjelpemidler:

C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formel-samling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:

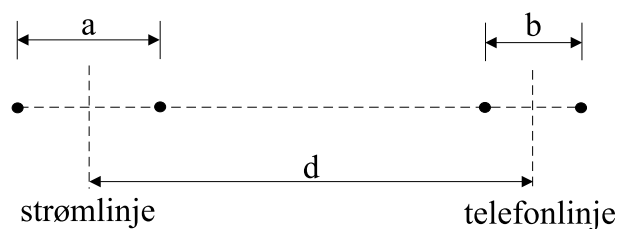
C - Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemiddel tillate: Rottmann: Matematisk formel-samling. Bestemt, enkel kalkulator tillaten.

Totalt 7 sider inkludert forside.

Alle *deloppgaver/deloppgåver* har omtrent lik vekt (litt variasjon avhengig av arbeidsmengde).

## Oppgave 1

Parallelt med en strømledning med lengde  $l$  går det en telefonlinje. Både strømledningen og telefonlinjen består av to tynne, parallelle ledere som vist i figur 2. Anta at tykkelsen på lederne er neglisjerbar i forhold til avstandene  $a$ ,  $b$  og  $d$ .

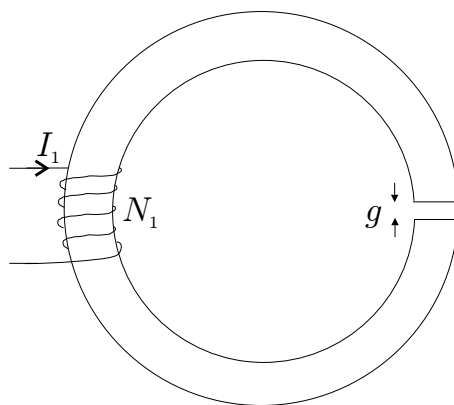


Figur 1: En telefonlinje som går parallelt med en strømledning.

- Finne den gjensidige induktansen mellom de to linjene.
- Finne et uttrykk for amplituden til den induerte elektromotoriske spenningen i telefonlinjen når det er en harmonisk varierende strøm med amplitude  $I_m$  og frekvens  $f$  i kraftlinjen. Finne også tallsvar når  $f = 50\text{Hz}$ ,  $I_m = 150\text{A}$ ,  $l = 500\text{m}$ ,  $d = 10\text{m}$ ,  $a = 100\text{cm}$ , og  $b = 10\text{cm}$ .
- Hvorfor kan det være lurt å tvinne telefonledningene rundt hverandre?

## Oppgave 2

Figuren viser en toroideformet (smultringformet) kjerne av et ferromagnetisk materiale med relativ permeabilitet  $\mu_r = \infty$ . Kjernen har sirkulært tverrsnitt med radius  $b$  og luftgapet har lengde  $g$ . Rundt kjernen er viklet en spole med  $N_1$  viklinger. Anta at toroiden er tynn slik at den magnetiske flukstettheten kan regnes uniform over tverrsnittet. Anta videre at luftgapet er lite slik at du kan se bort fra spredning av flukslinjer.



Figur 2: Magnetisk krets for oppgave 2.

- Vis at den magnetiske fluksen gjennom et tverrsnitt av toroiden er  $\mu_0 \pi b^2 N_1 I_1 / g$ . Hva blir selvinduktansen  $L_1$  til spolen?
- Skriv opp uttrykket for energitettheten i et magnetisk felt (dvs. energi per volumenhet). Bruk dette til å finne energien som er lagret i den magnetiske kretsen, og vis at den er lik  $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$ .

- c) Vi setter inn en enkelt, plan og sirkulær strømsløyfe med radius  $a < g/2$  i luftgapet. Strømsløyfens akse ligger hele tiden i papirplanet (på fig. 2). Ved tiden  $t = 0$  er akse horisontal slik at fluksen er 0. Strømsløyfen roterer med vinkelhastighet  $\omega$  om en akse normalt på papirplanet. Spole 1 mates med likestrøm, og til å begynne med antar vi at resistansen i sløyfa er  $R_2 = \infty$ . Finn den induerte elektromotoriske spenningen  $e_{12}$  i sløyfa som funksjon av tiden.
- d) Anta nå at  $0 < R_2 < \infty$  og at selvinduktansen til sløyfa er  $L_2$ . Forklar hvorfor strømmen i sløyfa *ikke* er lik  $e_{12}/R_2$ .
- e) Finn strømmen i sløyfa som funksjon av tiden. Anta at rotasjonen av sløyfa har pågått lenge slik at eventuelle transienter fra starten av bevegelsen er dødd ut. Hva vil "lenge" si for dette tilfellet?
- f) Forklar hvorfor den plane strømsløyfa aldri kan generere moment på seg selv. Finn momentet (pga de magnetiske kreftene) som virker på strømsløyfa under bevegelsen.

### Oppgave 3

- a) Anta at en punktladning  $Q$  er plassert i origo. Det er ellers vakuum overalt og ingen andre ladninger. Vis ut fra Columbs lov og definisjonen av potensial at potensialet i en avstand  $r$  fra origo er

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{når vi setter referansen i } \infty. \quad (1)$$

- b) Anta at en punktladning  $Q$  er plassert i sentrum av en kule med radius  $a$  og permittivitet  $\epsilon = \infty$ . Utenfor kula er det vakuum  $\epsilon = \epsilon_0$ . Finn  $\vec{D}$  og  $\vec{E}$  overalt. Tegn opp dipolene i kula og tolk svaret for  $\vec{E}$ .
- c) I et område av rommet fins det tidsuavhengige strømmer beskrevet av strømtettheten  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$ , der  $\vec{J} \neq 0$  i et endelig volum, og  $|\vec{J}| < \infty$  overalt. Følgende uttrykk er påstått å beskrive den resulterende magnetiske flukstettheten i et materiale med permeabilitet  $\mu = \mu_r \mu_0$ :

$$\vec{B} = \frac{\oint_C \vec{J} \cdot d\vec{l}}{\mu_0} \ln \frac{b^2}{ad}. \quad (2)$$

Her er  $C$  en integrasjonssløyfe, og  $a$ ,  $b$  og  $d$  er geometriske størrelser (lengder). Begrunn på *flest mulig måter* at uttrykket må være feil.

### Oppgave 4

Til hvert av de 4 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen. Det gis 3 poeng for hvert riktig svar, -1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (2 eller 3 kryss) gir 0 poeng.

- a) Det kan alltid finnes et vektorfelt  $\vec{A}$  slik at  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ , der  $\vec{B}$  er den magnetiske flukstettheten. Dette impliserer alene at
- i) En lang, rett leder som fører en konstant strøm gir opphav til et sirkulerende magnetfelt,
  - ii) Magnetiske flukslinjer biter seg selv i halen,
  - iii) Skalarpotensialet er konstant,
  - iv) Vektorpotensialet tilfredsstiller bølgelikningen.
- b) Ved hjelp av kjente relasjoner, finn T (Tesla) uttrykt ved hjelp av grunnenhetene i SI-systemet (m, s, kg, A). Svar:
- i)  $\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$ ,
  - ii)  $\text{kg}^{-1} \text{m s}^{-2}$ ,
  - iii)  $\text{kg}^{-1} \text{m s}^{-2} \text{A}^{-1}$ ,
  - iv)  $\text{kg}^{-1} \text{m s}^{-2} \text{A}$ .
- c) I et begrenset volum er skalarpotensialet  $V = ay$ , angitt i et kartesisk koordinatsystem. Størrelsen  $a$  antas å være uavhengig av koordinatene  $x$ ,  $y$  og  $z$  i dette volumet. Permittiviteten  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  er ikke den samme overalt i volumet. Hvilken av følgende påstander beskriver nødvendigvis volumet på en riktig måte?
- i) Den elektriske forskyvingen (flukstettheten)  $\vec{D}$  er uniform,
  - ii) Det elektriske feltet er uniformt,
  - iii) Det elektriske feltet er rettet langs  $x$ -aksen,
  - iv) Polariseringen  $\vec{P}$  er uniform.
- d) Hva kan vises ut fra Gauss' lov alene?
- i) Ohms lov,
  - ii) Coulombs lov,
  - iii) Murphys lov,
  - iv) Ari Behns lov.

## Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2} \vec{u}_r, & \vec{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, & V_P &= \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l}, & V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, & \vec{E} &= -\nabla V, \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{\text{fri i } S}, & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \vec{D} &\stackrel{\text{def}}{=}} \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, & \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, & \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, & \epsilon &= \epsilon_0(1 + \chi_e), \\ C &\stackrel{\text{def}}{=} Q/V, & C &= \epsilon S/d, \\ W_e &= \frac{1}{2} CV^2, & w_e &= \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}, & \vec{p} &= Q\vec{d}, \\ \vec{J} &= NQ\vec{v}, & \vec{J} &= \sigma \vec{E}, & \vec{J} &= \vec{E}/\rho, & \sigma &= 1/\rho, & P_J &= \int_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv, \\ d\vec{F}_{12} &= I_2 d\vec{l}_2 \times \left( \frac{\mu_0 I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} \right), & d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2}, & d\vec{F} &= I d\vec{l} \times \vec{B}, \\ \vec{H} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, & \vec{M} &= \chi_m \vec{H}, & \vec{B} &= \mu \vec{H}, & \mu &= \mu_0(1 + \chi_m), & \vec{m} &= I\vec{S}, \\ \vec{M}_F &= \vec{m} \times \vec{B}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, & w_m &= \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \\ L_{12} &= \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, & L &= \frac{\Phi}{I}, & W_m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_{jk} I_j I_k, \\ \vec{F} &= -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, & \vec{F} &= +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, & \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, & \vec{F} &= Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Maxwells likninger:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, & \left( e = -\frac{d\Phi}{dt} \right), \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho, & \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{\text{fri i } S}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}, & \vec{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, & \nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon}, & \nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{J}, \\ V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c) dv'}{R}, & \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c) dv'}{R}. \end{aligned}$$

Grensebetingelser:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1 \text{ tang}} &= \vec{E}_{2 \text{ tang}}, & \vec{D}_{1 \text{ norm}} - \vec{D}_{2 \text{ norm}} &= \sigma \vec{n}, \\ \vec{H}_{1 \text{ tang}} - \vec{H}_{2 \text{ tang}} &= \vec{J}_s \times \vec{n}, & \vec{B}_{1 \text{ norm}} &= \vec{B}_{2 \text{ norm}}. \end{aligned}$$

Noen konstanter:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\text{Lyshastighet i vakuum: } c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Lyshastighet i et medium: } c = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\text{Elektronets hvilemasse: } m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{Nøytronets hvilemasse: } m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Protonets hvilemasse: } m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Standard tyngdeakselerasjon: } g = 9.80665 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Gravitasjonskonstant: } \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Matematiske formler:

## EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

STUDENTNR.: .....

**Svarkupong**

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				