NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Fakultet for informatikk, matematikk og elektroteknikk
Institutt for fysikalsk elektronikk

Bokmål/Nynorsk

Faglig/fagleg kontakt under eksamen:
Navn: Johannes Skaar
Tlf.: 91432

EKSAMEN I EMNE
SIE 4010 ELEKTROMAGNETISME

MANDAG 5. MAI 2003
TID: KL 0900 - 1400

Sensur: Senest/seinast 26.05.2003.

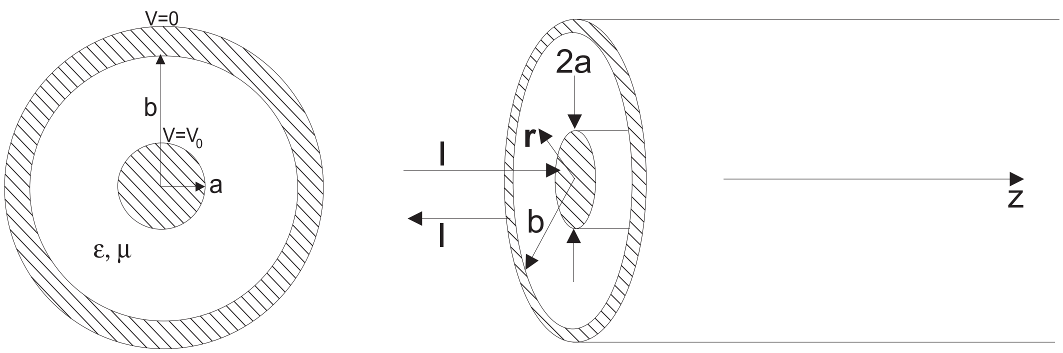
Hjelpemidler:
C - Spesifiserte trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Hjelpemiddel:
C - Spesifiserte trykte eller handskrevne hjelpemiddel tillatne: Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemt, enkel kalkulator er tillaten.

Totalt 8 sider inkludert forside.

Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med en indre radius b, se figur. Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ og permeabilitet $\mu = \mu_r \mu_0$. Innerlederen har det konstante potensialet V_0, mens ytterlederen har potensial 0. Det går en konstant strøm I i innerlederen, i positiv z-retning. Anta at strømmen i innerlederen er jevnt fordelt over lederens *overflate*, og returstrømmen i ytterlederen er jevnt fordelt over ytterlederens *indre overflate*. Kabelens lengde er mye større enn b.



a) Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ som funksjon av r.

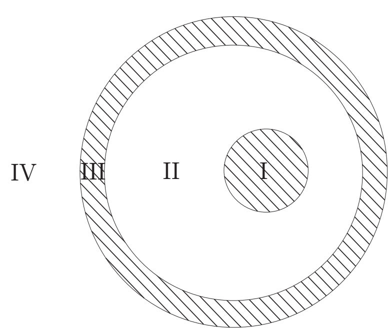
b) Finn kapasitansen per lengdeenhet.

c) Finn den lagrede elektrostatiske energien per lengdeenhet av kabelen.

d) Finn den magnetiske flukstettheten $\vec{B}$ som funksjon av r.

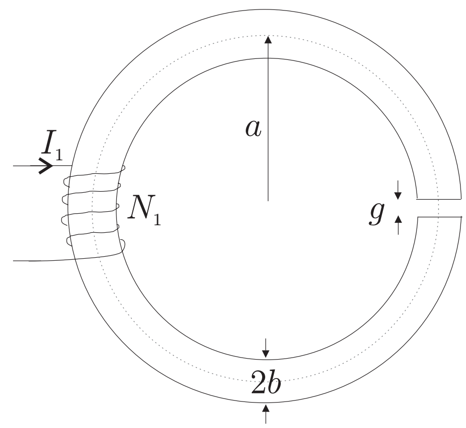
e) Finn selvinduktansen per lengdeenhet.

f) Anta at innerlederen forskyves slik at lederne blir liggende eksentrisk, se figuren under. Anta at ytterlederen fortsatt har potensialet 0 (med $r = \infty$ som referanse) og innerlederens potensial er V_0. Koaksialkabelen har totalt sett ingen netto ladning, og det går nå ikke strøm i kabelen. Dersom vi antar at lederne er ideelle, i hvilke(t) av områdene I, II, III og IV er det elektriske feltet null? Grunngi svaret. Beskriv og tegn opp grovt hvordan en evt. ladning er fordelt ved å tegne på "+" og "–".



Oppgave 2

Figuren viser en toroideformet (smultringformet) kjerne av et magnetisk materiale med relativ permeabilitet $\mu_r >> 1$. Dimensjonene på kjernen og luftgapet er vist i figuren. Rundt kjernen er viklet en spole med N_1 tørn. Anta at toroiden er tynn ($b << a$), og at luftgapet er lite ($g << b$).

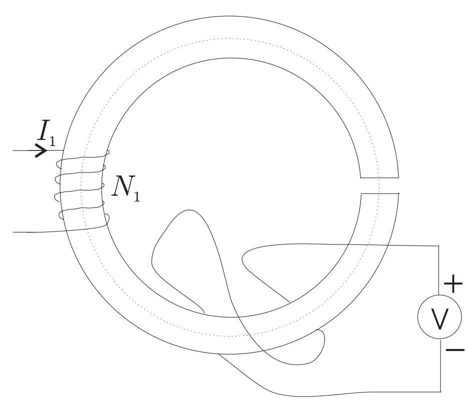


a) Vis at fluksen gjennom jernkjernen er tilnærmet $\mu_0 \pi b^2 N_1 I_1 / (\frac{2\pi a}{\mu_r} + g)$. Hva blir selvinduktansen L_1 til spolen?

b) Skriv opp uttrykket for energitettheten i et magnetisk felt (dvs. energi per volumenhet). Bruk dette til å finne energien som er lagret i den magnetiske kretsen, og vis at den er lik $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$. Her og i resten av oppgaven kan du sette $\mu_r = \infty$.

c) Finn kraften som forsøker å redusere luftgapet (dvs. en tiltrekkende kraft som prøver å "tette" luftgapet). Anta at det går en konstant strøm I_1 i spolen. Vil kraften endre retning dersom vi snur strømmen I_1?

d) Vi vikler nå en annen spole rundt kjernen, se figur. Finn den gjensidige induktansen L_{12} mellom de to spolene. Her trenger du ikke å ta stilling til fortegnet.



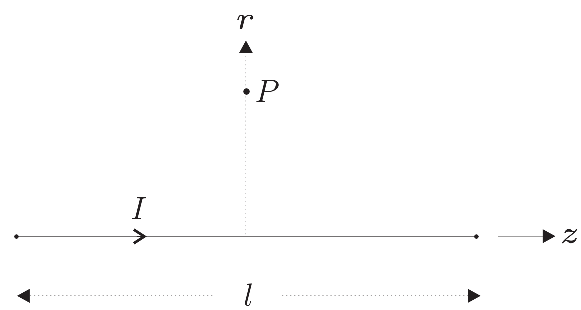
e) Den første spolen koples til en generator. Anta at strømmen I_1 i spole 1 er økende. Hvilket fortegn vil da vises i voltmeteret?

Oppgave 3

a) Gitt en uendelig lang, uendelig tynn sylindrisk rett ledning som fører den konstante strømmen I. Ved å bruke Amperes lov finner vi at det magnetiske feltet $\vec{H}$ i en avstand $r > 0$ er

$$\vec{H} = H_\phi \vec{u}_\phi = \frac{I}{2\pi r}\vec{u}_\phi. \tag{1}$$

Vi antar nå at ledningen kuttes av slik at den har lengden l, se figur. Anta at lederen i et begrenset tidsrom fører en konstant strøm I, fra venstre endepunkt til høyre endepunkt. Punktet P ligger like langt fra de to endepunktene. Forklar hvordan du (i dette tidsrommet) kan finne $\vec{H}$ i punktet P ved hjelp av den generaliserte Amperes lov (Maxwells likninger). Detaljerte utregninger er ikke nødvendig. Blir H_ϕ større, mindre eller lik $I/(2\pi r)$? Grunngi svaret.



Oppgave 4

Til hvert av de 7 spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 5 poeng for hvert riktig svar, –2 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Legg merke til at tipping uten kunnskap vil i gjennomsnitt gi *negativ* poengsum.

a) En av Maxwells likninger er $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Denne likningen betyr bl.a. at

i) E-feltet strømmer ut fra ladninger,

ii) En lang, rett leder som fører en strøm gir opphav til et sirkulerende magnetfelt,

iii) Et varierende magnetfelt gjennom en ledende sløyfe induserer en strøm i sløyfa,

iv) Det finnes ikke magnetiske monopoler.

b) Likningen $\nabla \cdot \vec{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ impliserer

i) Kirchoff's strømlov for konstante strømmer,

ii) Ladningsbevarelse,

iii) Strøm ut av et lukket areal går på bekostning av ladning i volumet innenfor,

iv) Alle de tre alternativene ovenfor.

c) Gitt likningen $|\vec{E}| = k|\vec{B}|$. Hvilken enhet må k ha for at likningen skal være dimensjonsmessig korrekt?

i) s^{-1},

ii) ms^{-1},

iii) 1,

iv) VT^{-1}.

d) I et område av rommet finnes et uniformt og konstant elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetisk flukstetthet $\vec{B}$. Det bringes inn en liten bit av et lineært og isotropt medium med relativ permittivitet $\epsilon_r > 1$ og relativ permeabilitet $\mu_r > 1$. Det er ingen frie ladninger eller frie strømmer i biten. Hvordan blir feltene inne i materialet i forhold til det uniforme feltet et stykke unna biten?

i) Både $|\vec{E}|$ og $|\vec{B}|$ blir mindre,

ii) $|\vec{E}|$ blir mindre og $|\vec{B}|$ blir større,

iii) $|\vec{E}|$ blir større og $|\vec{B}|$ blir mindre,

iv) Både $|\vec{E}|$ og $|\vec{B}|$ blir større.

e) Det elektriske feltet i et område i et lineært, isotropt og homogent medium er gitt ved $\vec{E} = ay\,\vec{u}_x$, der $\vec{u}_x$ er enhetsvektor i x-retning og $a \neq 0$ er en konstant. Hva kan du si om dette området?

i) Det fins frie ladninger,

ii) Det fins et tidsavhengig magnetfelt,

iii) Det fins både frie ladninger og et tidsavhengig magnetfelt,

iv) Det fins verken frie ladninger eller et tidsavhengig magnetfelt.

f) En oppladet kondensator har åpne terminaler (den er frakoplet). Hva skjer dersom vi flytter kondensatorelektrodene nærmere hverandre?

i) Ladningen på elektrodene øker,

ii) Ladningen på elektrodene minker,

iii) Potensialforskjellen mellom elektrodene (absoluttverdi) øker,

iv) Potensialforskjellen mellom elektrodene (absoluttverdi) minker.

g) I nærheten av en transformator ønsker vi å måle spenningen over to punkter i en elektronisk krets. Hvorfor kan dette være problematisk?

i) Transformatoren kan gi en fluksvariasjon gjennom sløyfa bestående av voltmeteret og den elektroniske kretsen, og dermed gi en indusert spenning som forstyrrer målingen,

ii) Transformatoren vil virke som en kondensator slik at det dannes et elektrisk felt i voltmeteret som forstyrrer målingen,

iii) Transformatoren kan bråke så mye at man blir forstyrret under målingen,

iv) De lavfrekvente magnetfeltene fra transformatoren påvirker hjerneaktiviteten til visse fiskearter, spesielt torsk.

Oppgitte formler og konstanter

Formler i elektromagnetisme (spesifisering av gyldighetsområdet og forklaring av symboler er utelatt):

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\vec{u}_r, \qquad \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q, \qquad V_P = \int_P^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \qquad \vec{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho,$$

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}, \qquad \vec{D} = \epsilon\vec{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e),$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V, \qquad C = \epsilon S/d,$$

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}, \qquad \vec{p} = Q\vec{d},$$

$$\vec{J} = NQ\vec{v}, \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \qquad \vec{J} = \vec{E}/\rho, \qquad \sigma = 1/\rho, \qquad P_J = \int_v \vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12} = I_2\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{u}_r}{r^2}\right), \qquad \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}, \qquad \mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B},$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \qquad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m), \qquad \vec{m} = I\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \qquad w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_{\Phi=\text{konst}}, \quad \vec{F} = +(\nabla W_m)_{I=\text{konst}}, \quad \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \vec{F} = Q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}).$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \quad \left(e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J},$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\vec{E}_{1\,\text{tang}} = \vec{E}_{2\,\text{tang}}, \qquad \vec{D}_{1\,\text{norm}} - \vec{D}_{2\,\text{norm}} = \sigma\vec{n},$$

$$\vec{H}_{1\,\text{tang}} - \vec{H}_{2\,\text{tang}} = \vec{J}_s\times\vec{n}, \qquad \vec{B}_{1\,\text{norm}} = \vec{B}_{2\,\text{norm}}.$$

Noen konstanter:

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s
Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2
Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Matematiske formler:

DIFFERENTIAL IDENTITIES

15. $\mathbf{u}_x \cdot \nabla V = \partial V/\partial x$ (x: arbitrary axis)
16. $\nabla(V+W) = \nabla V + \nabla W$
17. $\nabla(VW) = V\nabla W + W\nabla V$
18. $\nabla f(V) = f'(V)\nabla V$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
20. $\nabla \cdot (V\mathbf{A}) = V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$
22. $\nabla \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
23. $\nabla \times (V\mathbf{A}) = (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A}$
24. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
25. $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V =$ Laplacian of V
26. $\nabla \cdot [\nabla(VW)] = V\nabla \cdot (\nabla W) + 2\nabla V \cdot \nabla W + W\nabla \cdot (\nabla V)$
27. $\nabla \times (\nabla V) = 0$
28. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

INTEGRAL IDENTITIES

Basic integral identities

29. $\int_v \nabla f \, dv = \oint_S f \, d\mathbf{S}$
30. $\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ (the divergence theorem)
31. $\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}$
32. $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ (Stokes's theorem)

GRADIENT, DIVERGENCE, CURL, AND LAPLACIAN IN ORTHOGONAL COORDINATE SYSTEMS

Rectangular coordinate system

Notation: $f = f(x,y,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$, $F_x = F_x(x,y,z)$, $F_y = F_y(x,y,z)$, $F_z = F_z(x,y,z)$

40. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
41. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
42. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{u}_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$
43. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
44. $\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\mathbf{u}_x + (\nabla^2 F_y)\mathbf{u}_y + (\nabla^2 F_z)\mathbf{u}_z$

Cylindrical coordinate system

Notation: $f = f(r,\phi,z)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\phi,z)$, $F_r = F_r(r,\phi,z)$, $F_\phi = F_\phi(r,\phi,z)$, $F_z = F_z(r,\phi,z)$

45. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{u}_z$
46. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
47. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{u}_\phi\left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) + \mathbf{u}_z\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right]$
48. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
49. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

Spherical coordinate system

Notation: $f = f(r,\theta,\phi)$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(r,\theta,\phi)$, $F_r = F_r(r,\theta,\phi)$, $F_\theta = F_\theta(r,\theta,\phi)$, $F_\phi = F_\phi(r,\theta,\phi)$

50. $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{u}_\phi$
51. $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$
52. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{u}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right] + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r}\right]$
$$+ \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]$$
53. $\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
54. $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$

STUDENTNR.: ....

Oppgave 4: Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. ii)	Alt. iii)	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				
g)				