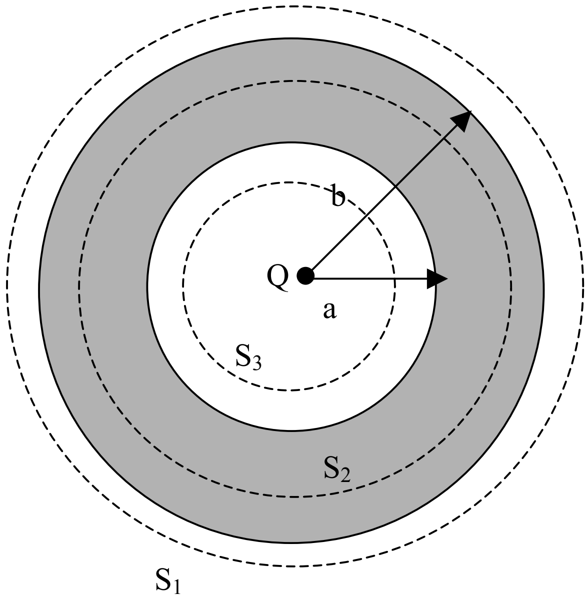
Løsningsforslag, eksamen SIE 4011 3/12-02

OPPGAVE 1.

Dette systemet har kulesymmetri slik at det er enklest å benytte Gauss' lov til å finne **E** og deretter V ved integrasjon. Kulesymmetrien gjør at E-feltet er radielt rettet.



Gauss' lov er: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \vec{E} = E_r \vec{a}_r$

a: Det er mest praktisk å starte ytterst og en Gaussisk flate, S_1 legges utenfor det ledende skallet.

For r>b: $\varepsilon_0 E_{r1} 4\pi r^2 = Q \quad \Rightarrow E_{r1} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$V_1 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{r} E_{r1} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

For a<r<b: Her er et ledende materiale og følgelig: $\vec{E}_2 = 0$

$$V_2 = V_1(r = b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

For r<a: En Gaussisk flate, S_3 legges innenfor det ledende skallet og en får samme uttrykket for **E** som i det første tilfellet, altså:

$$E_{r3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

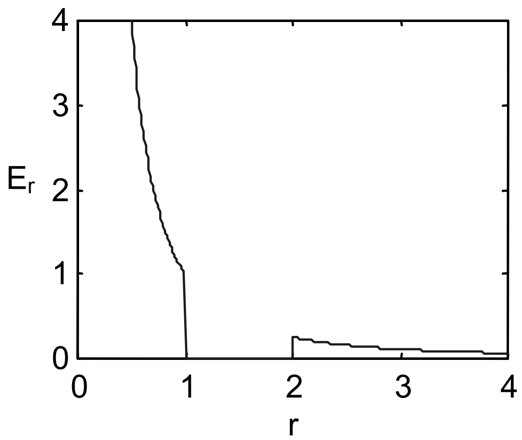
$$V_3 = -\int E_{r3} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

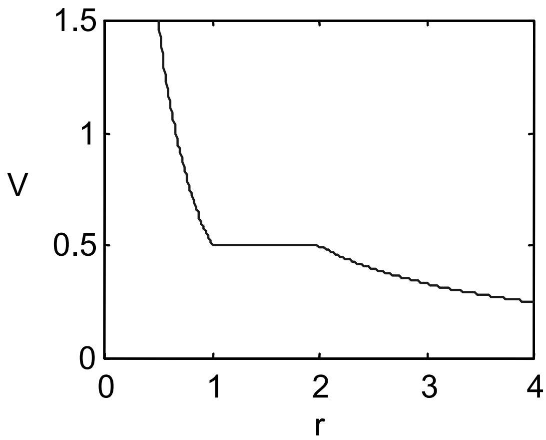
Konstanten C bestemmes av at $V_3(a)=V_2(a)$ som gir:

$$C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

b: Skisse (med a=1, b=2 og $Q/4\pi\varepsilon_0=1$)





c: For r>b blir løsningen den samme som over:

$$E_{r1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Siden mediet er fritt rom er polarisasjonen **P**=0.

For a<r<b legges en Gaussisk flate S_2 gjennom det dielektriske materialet og Gauss' lov samt **D**=ε**E** og **P**=**D**-ε_0**E** gir:

$$D_{r2} \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \Rightarrow \qquad E_{r2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad P_{r2} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

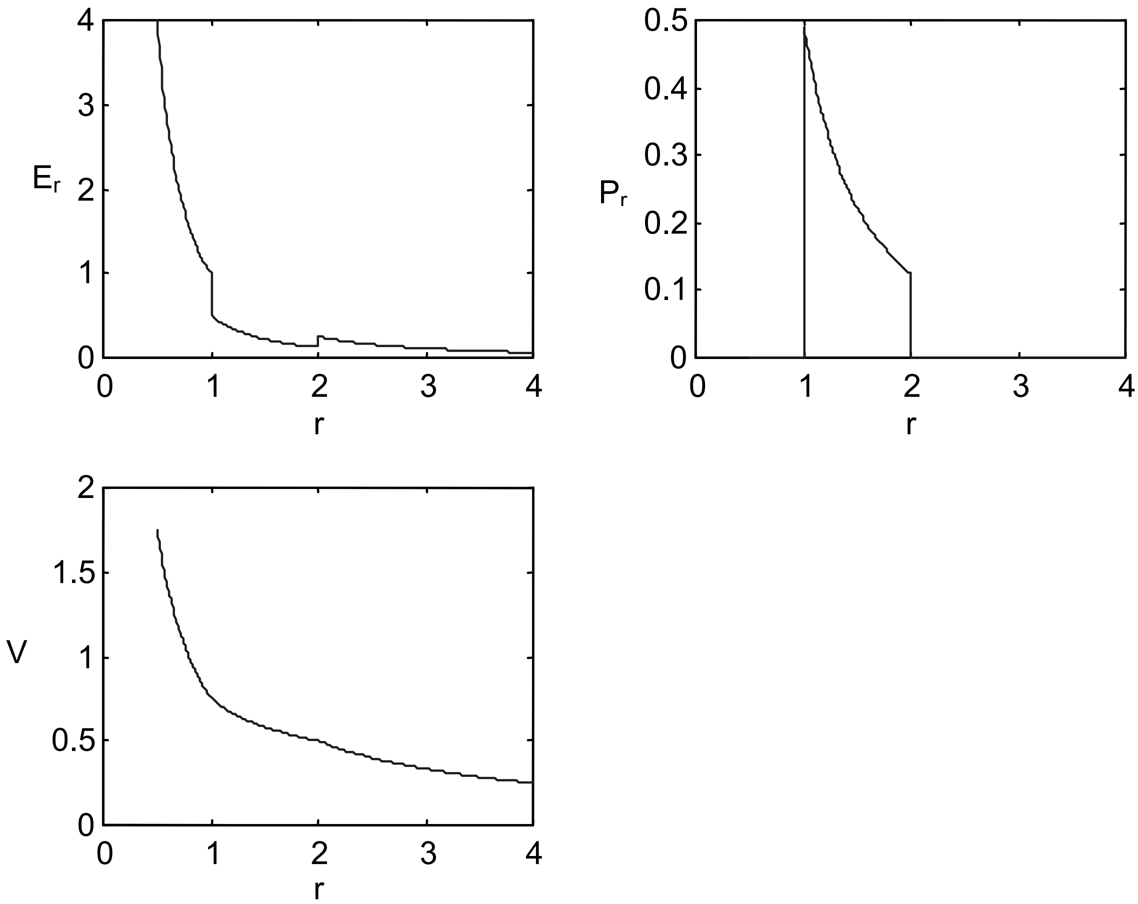
$$V_2 = -\int_{\infty}^{b} E_{r1} dr - \int_{b}^{r} E_{r2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{b} + \frac{1}{\varepsilon_r r}\right]$$

For r<a blir løsningen den samme som i del a og siden mediet er fritt rom er polarisasjonen null, altså:

$$E_{r3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \vec{P}_3 = 0$$

$$V_3 = V_2(r=a) - \int_{a}^{r} E_{r3} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{b} - \left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{1}{a} + \frac{1}{r}\right]$$

d: Skisse (med a=1, b=2, ε_r=2 og $Q/4\pi\varepsilon_0$=1)



e:

$$\rho_{ps}(indre) = \vec{P}\cdot(-\vec{a}_R)_{r=a} = -P_{r2}(a) = -\frac{Q}{4\pi a^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\rho_{ps}(ytre) = \vec{P}\cdot(\vec{a}_R)_{r=b} = P_{r2}(b) = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\rho_{pv} = -\nabla\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_{r2}\right) = 0$$

Total bunden ladning:

$$\rho_{ps}(indre)\cdot\pi a^2 + \rho_{ps}(ytre)\cdot\pi b^2 = 0$$

f: Vi antar ladninger +Q og -Q på indre og ytre kuleflate henholdsvis. Vi kan videre benytte Gauss' lov i en vilkårlig kuleflate der a<r<b til å finne feltet Løsningen blir den samme som feltløsningen E_{r2} over for det dielektriske skallet. Potensialforskjellen finnes ved å integrere mellom a og b som:

$$\Delta V = -\int_b^a E_{r2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Kapasitansen blir:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

Alternativt kan dette løses ved å ta utgangspunkt i Laplace's ligning. For kulesymmetri får vi:

$$\nabla^2 V = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Multiplikasjon med r^2 og to ganger integrasjon gir:

$$V = -\frac{A}{r} + B$$

der A og B er integrasjonskonstanter. Ved å sette V(b)=0 og V(a)=V_0 finnes:

$$V(r) = V_0\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \qquad \vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\vec{a}_r = \frac{V_0}{r^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\vec{a}_r$$

$$Q = \varepsilon \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\varepsilon V_0}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi\varepsilon V_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

Herav finnes $C=Q/V_0$ som gir samme svar som over.

g: C=10 pF, $\varepsilon_r=6$, $\varepsilon_0=10^{-9}/36\pi$ og b=1 cm gir:

$$\frac{1}{a} = \frac{4\pi\varepsilon}{C} + \frac{1}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 6}{36\pi \cdot 10^{-11}} + 100 = \frac{500}{3} \; \left[m^{-1} \right]$$

Som gir a= 6 mm.

OPPGAVE 2

a: Fra figuren identifiseres følgende:

$$d\vec{l} = \vec{a}_\varphi a d\varphi$$

$$\vec{R} = -a\vec{a}_\rho + z\vec{a}_z$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{a}_\rho & \vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ 0 & ad\varphi & 0 \\ -a & 0 & z \end{vmatrix} = \vec{a}_\rho azd\varphi + \vec{a}_z a^2 d\varphi$$

Siden B=μ_0H kan vi skrive:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left[z^2 + a^2\right]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \left[\vec{a}_\rho azd\varphi + a^2 d\varphi\vec{a}_z\right] = \frac{\mu_0 I a^2}{2\left[z^2 + a^2\right]^{3/2}} \vec{a}_z$$

Integralet i ρ-retningen blir null av symmetrigrunner og kan også begrunnes med at $\mathbf{a}_\rho$=cosφ$\mathbf{a}_x$+sinφ$\mathbf{a}_y$ og integralene over sinus og cosinus blir null.

b: Benytter superposisjon og kan skrive direkte fra svaret over:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{\left[z^2 + a^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[(b-z)^2 + a^2\right]^{3/2}}\right]$$

c: Gjensidig induktans er gitt av:

$$M = \frac{\psi_{12}}{I} \qquad \psi_{12} = \oint_{L_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

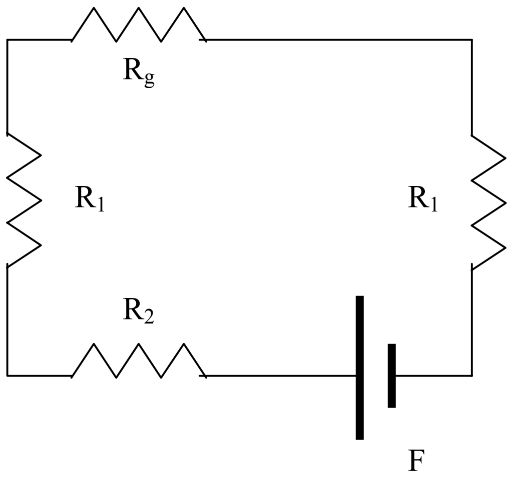
der det integreres over den øverste sløyfa. Videre er:

$$r^2 = a^2 + b^2 \qquad \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Innsatt med oppgitt formel for **A**:

$$M = \frac{1}{4I}\frac{\mu_0 I a^2}{a^2 + b^2}\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_0^{2\pi} ad\varphi = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \pi \ a^4}{\left[a^2 + b^2\right]^{3/2}}$$

d:
En magnetisk ekvivalentkrets er vist i figuren under.



Den magnetiske fluksen, ψ gjennom kretsen er gitt som:

$$\psi = \frac{F}{2R_1 + R_2 + R_g} = \frac{NI}{2R_1 + R_2 + R_g}$$

Reluktansene er gitt av med $\mu=\mu_0\mu_r$:

$$R_1 = \frac{a}{\mu\pi r_1^2} \quad \textit{for delene BC og AD}$$

$$R_2 = \frac{b}{\mu\pi r_2^2} \quad \textit{for del AB}$$

$$R_g = \frac{t}{\mu_0\pi r_1^2} \quad \textit{for luftgapet}$$

Siden magnetfeltet hele veien står normalt på tverrsnittsarealet og normalkomponenten av magnetisk flukstetthet er kontinuerlig over grenseflater finnes for luftgapet:

$$B_g = \frac{\psi}{\pi r_1^2} = \frac{\mu_0 NI}{\frac{2a}{\mu_r} + \frac{b}{\mu_r}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + t}$$

Innsatte tallverdier gir: $B_g = 0.8\ \mathrm{Wb/m^2}$

e: Selvinduktansen er gitt som:

$$L = \frac{N\psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r_1^2}{\frac{2a}{\mu_r} + \frac{b}{\mu_r}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + t}$$

Innsatte tallverdier gir: L=10.1 mH

f: Magnetisk energi er gitt ved:

$$W = \frac{1}{2}\int_v \vec{B}\cdot\vec{H}dv = \frac{1}{2\mu}\int_v B^2 dv$$

For luftgapet får vi herav når B_g er konstant:

$$W_{gap} = \frac{B_g^2}{2\mu_0}\pi r_1^2 t$$

For delene BC og AD er $B_1=B_g$, mens for del AB er $B_2=\psi/(\pi r_2^2)=B_g(r_1/r_2)^2$

Herav finnes for det magnetiske materialet:

$$W_m = \frac{B_1^2}{2\mu}2a\pi r_1^2 + \frac{B_2^2}{2\mu}b\pi r_2^2 = \frac{\pi B_g^2 r_1^2}{2\mu}\left[2a + b\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$$

Innsatte tallverdier: W_{gap}=0.324 J $\quad$ W_m=0.182 J

g: Total energi er:

$$W = W_{gap} + W_m = \frac{B_g^2}{2\mu_0}\pi r_1^2\left[t + \frac{2a}{\mu_r} + \frac{b}{\mu_r}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$$

$$W_{spole} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}N\psi I = \frac{1}{2}\psi^2(2R_1 + R_2 + R_g) = \frac{1}{2\mu_0}\left(\pi r_1^2 B_g\right)^2\frac{1}{\pi r_1^2}\left[t + \frac{2a}{\mu_r} + \frac{b}{\mu_r}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] =$$

$$\frac{B_g^2}{2\mu_0}\pi r_1^2\left[t + \frac{2a}{\mu_r} + \frac{b}{\mu_r}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$$

Som gir samme resultat.

Siden tallverdien for t er falt ut av oppgaveteksten godtas tallsvar med t ubestemt eller satt lik andre verdier enn 1 mm.

OPPGAVE 3

Spørsmål	Alt. A	Alt. B	Alt. C
1		X	
2			X
3			X
4		X	
5		X	
6	X		
7		X	
8	X		
9		X	
10			X