NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikalsk elektronikk

Faglig kontakt under eksamen:
Leif Bjerkan tlf.: 94403 (mobil 930 36 113)

Eksamen i faget SIE4011 GRUNNLAG FOR ELEKTROTEKNIKKEN

Tirsdag 3. desember 2002
Tid. Kl. 0900 - 1500

Tillatte hjelpemidler:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU, er tillatt.
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tillatt

Sensuren faller 2. januar 2003.

Se formelark etter side 10

OPPGAVE 1 (Teller 35 % av karakter)

En positiv punktladning, Q, ligger i sentrum av et kuleformet ledende skall med indre radius a og ytre radius b som vist i Figur 1. Materialet innenfor det ledende kuleskallet (r<a) og materialet utenfor (r>b) er fritt rom.

a: Finn det elektriske feltet $\vec{E}$ og potensialet V overalt i rommet. Sett V=0 når $r \to \infty$.

b: Skisser $|\vec{E}|$ og V som funksjon av radien, r.

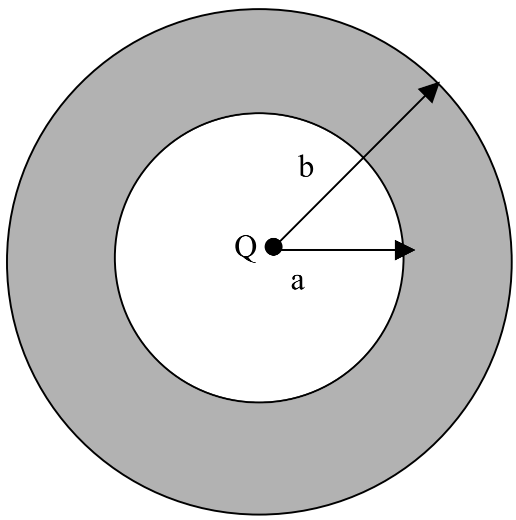
c: Det ledende kuleformede skallet i figur 1 (a<r<b) erstattes nå med et dielektrisk materiale med relativ dielektrisitetskonstant ε_r. Materialet innenfor (r<a) og utenfor (r>b) er fortsatt fritt rom og punktladningen ligger fortsatt i sentrum.
Finn det elektriske feltet $\vec{E}$, potensialet V og polarisasjonsvektoren $\vec{P}$ overalt i rommet for denne konfigurasjonen. Sett også her V=0 når $r \to \infty$.

d: Skisser $|\vec{E}|$, $|\vec{P}|$ og V som funksjon av radien r.

e: Finn den bundne flateladningstettheten ρ_{ps} både på den indre (r=a) og den ytre (r=b) flata av det dielektriske kuleskallet samt den bundne volumladningstetthet ρ_{pv} inne i det dielektriske materialet. Vis at summen av total bunden ladning er lik null.
(Oppgitte formler: $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$, $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$, $\vec{a}_n$ normal *ut* av flata).

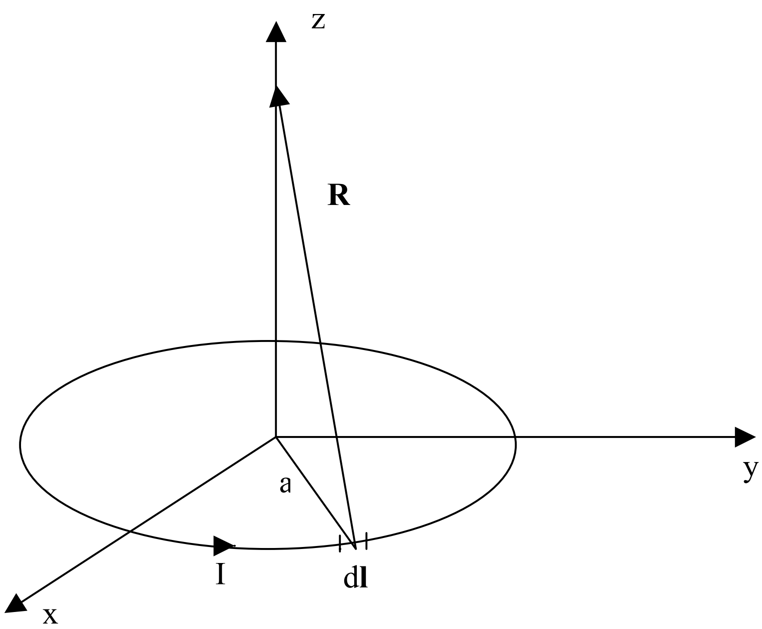
f: Betrakt det dielektriske kuleskallet i pkt. c over *uten* punktladningen i sentrum. Anta at det er pålagt et tynt ledende materiale på indre (r=a) og ytre (r=b) flate. Finn kapasitansen, C for denne kulekondensatoren.

g: Anta at det dielektriske materialet er glimmer (ε_r=6) og ytre radius b=1 cm. Hva må indre radius, a, være for at kapasitansen skal bli 10 pF ($10 \cdot 10^{-12}$ F)?



Figur 1

OPPGAVE 2 (Teller 35 % av karakter)



Figur 2

Gitt en sirkulær sløyfe med radius a i x-y-planet med sentrum i origo som fører en strøm I (se figur 2). Anta at rommet er fritt rom.

a: Finn ved hjelp av Biot-Savart's lov et uttrykk for magnetisk flukstetthet $\vec{B}$ for et vilkårlig punkt på z-aksen.

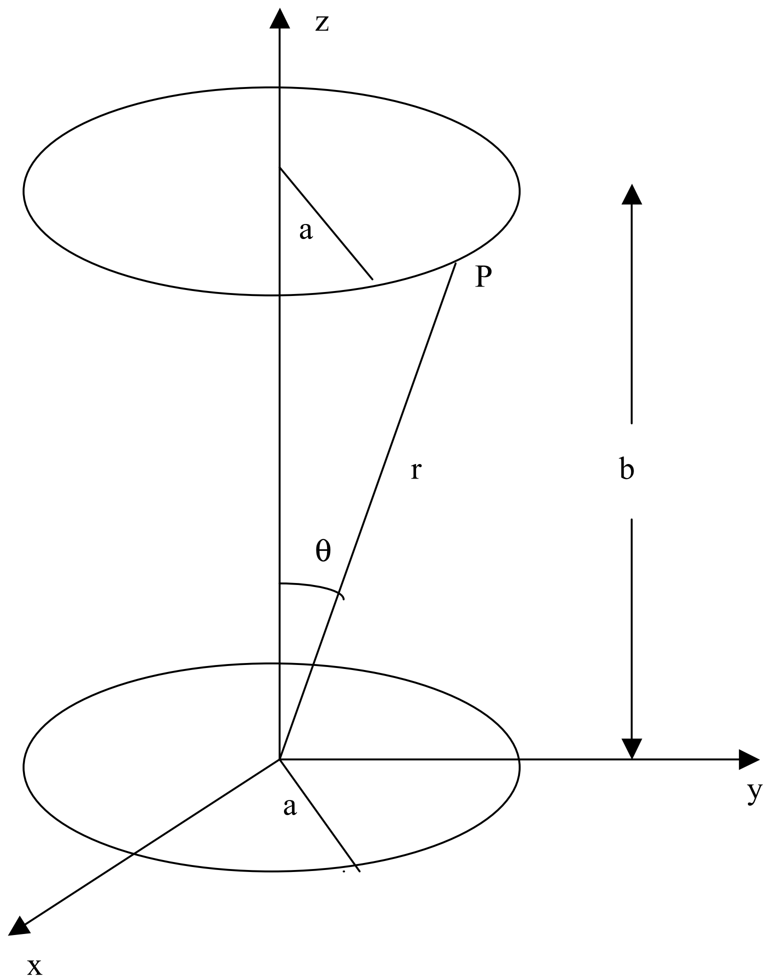
Biot-Savart's lov: $d\vec{H} = \dfrac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi R^3}$

Anta to identiske sirkulære sløyfer med radius a som begge fører strømmen I i samme retning som vist i figur 3. Den ene ligger i x-y-planet med sentrum i origo som i del a over, mens den andre er parallellforskjøvet en avstand b langs z-aksen.

b: Finn uttrykket for magnetisk flukstetthet i et punkt på z-aksen fra de to sløyfene.

c: Anta at det går en strøm I i sløyfa med senter i origo. Finn den gjensidige induktansen mellom de to strømsløyfene. Hvis du vil bruke formelen for det magnetiske vektorpotensialet i et punkt P definert med avstanden r og vinkelen θ (se figur 3) er den oppgitt som:

$$\vec{A} = \frac{\mu I a^2 \sin\theta}{4r^2}\vec{a}_\varphi \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$



Figur 3

På figur 4 er vist en magnetisk krets, som består av et ferromagnetisk materiale med et lite luftgap med tykkelse t. Det magnetiske materialet har sirkulært tverrsnitt med radius r_1 og like lengder langs senterlinjen lik a mellom B og C og mellom A og D. For lengden b, mellom A og B er magneten smalnet av til et sirkulært tverrsnitt med radius r_2 som er konsentrisk med resten av magneten. I dette området er det viklet en spole med N tørn som fører strømmen I. Følgende tallverdier benyttes i tallsvarene nedenfor:

r_1= 2 cm
r_2=1 cm
a=20 cm
b=4 cm
I=10 A
N=100
t=1 mm

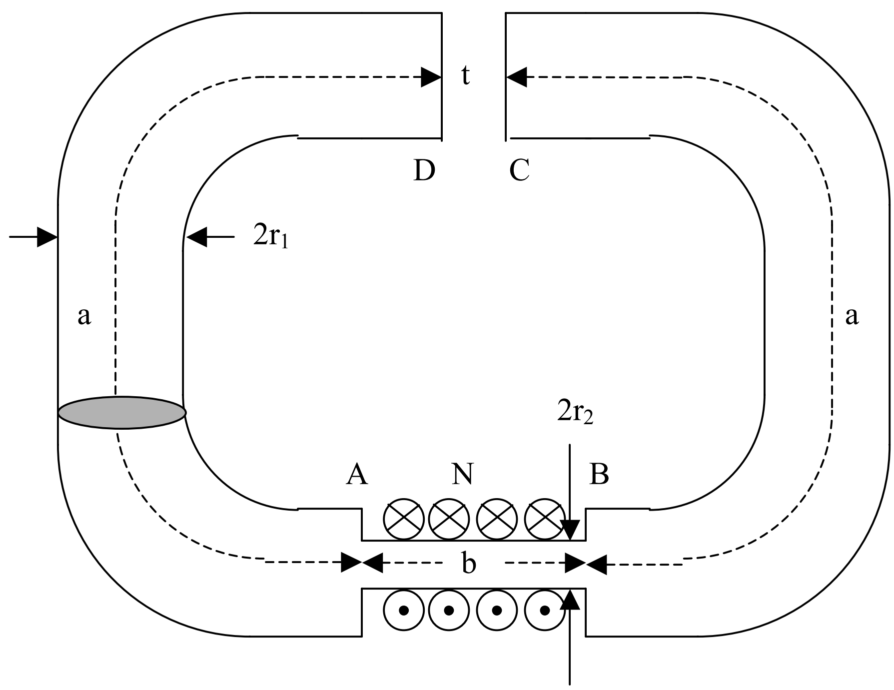
For det magnetiske materialet settes μ_r=1000.
Formel for magnetisk reluktans: lengde/(permeabilitet·areal).
I spørsmålene d, e og f under kreves både formelsvar og tallsvar!

d: Finn den magnetiske flukstettheten i luftgapet.

e: Finn selvinduktansen, L, i spolen.

f: Finn den magnetiske energien som er lagret både i *luftgapet* og i *magneten*. I formelsvarene her kan du benytte størrelser du fant i pkt. d eller e foran.

g: Vis til slutt at den totale magnetiske energien funnet i pkt. f over er lik energien lagret i spolen, $\frac{1}{2}LI^2$. *Her skal formelsvarene benyttes i beviset!*



Figur 4

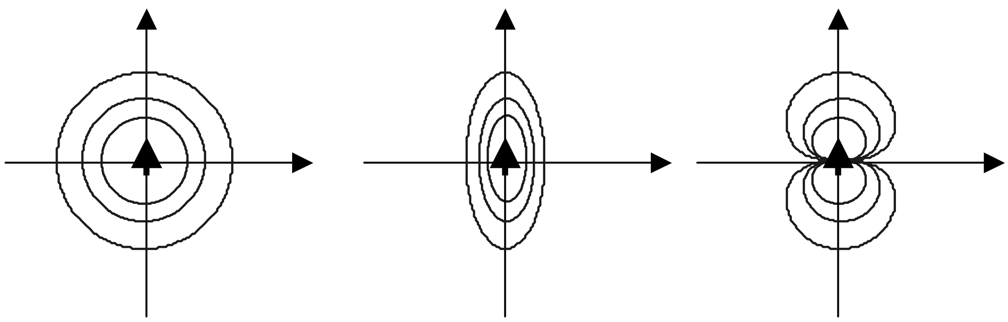
OPPGAVE 3 (Teller 30 % av karakter)

Denne oppgaven består av 10 delspørsmål hvor det er oppgitt tre svaralternativer. Oppgi hvilket svar du mener er riktig for hvert delspørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, krysses av på svarkupongen på siste side i dette oppgavesettet. Denne siden rives fra og leveres inn som en del av besvarelsen. Det gis 3 poeng for riktig svar, -1 poeng for galt svar og 0 poeng for ubesvart.

1. Gitt en parallell-plate kondensator uten noe materiale mellom platene. En glassplate skyves så inn mellom platene. Dette fører til at:
   A: Kapasitansen avtar
   B: Kapasitansen øker
   C: Kapasitansen forblir uendret

2. Det elektriske feltet i stor avstand, r, fra en elektrisk dipol varierer som:
   A: $1/r$
   B: $1/r^2$
   C: $1/r^3$

3. Ekvipotensiallinjene fra en elektrisk dipol, $\vec{p}$ (antydet med pil) er riktig skissert i:
   A: Figur 5a
   B: Figur 5b
   C: Figur 5c

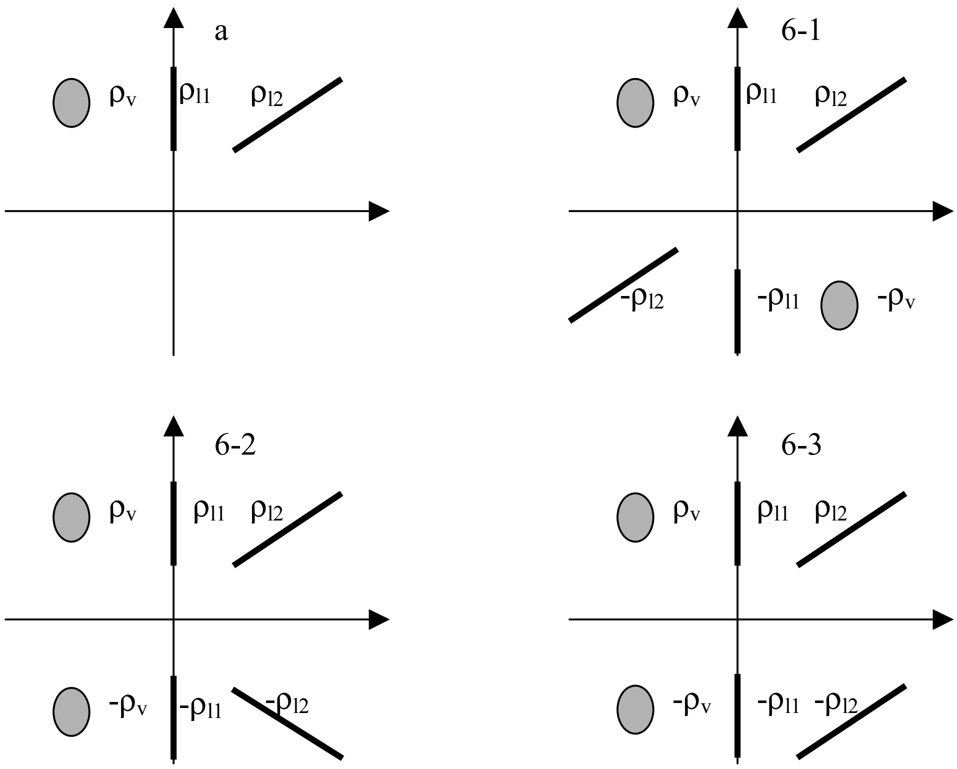


a b c

Figur 5

4. For en grenseflate mellom to ulike dielektriske medier gjelder:
   A: Det elektriske feltet står normalt til grenseflata
   B: Tangentialkomponenten til det elektriske feltet er kontinuerlig
   C: Normalkomponenten til det elektriske feltet er kontinuerlig

5. Gitt en ladningsfordeling som skissert i figur 6a over et perfekt ledende plan som ligger vinkelrett papirplanet og langs horisontal akse. Speilladninger er riktig skissert i:
   A: Figur 6-1
   B: Figur 6-2
   C: Figur 6-3

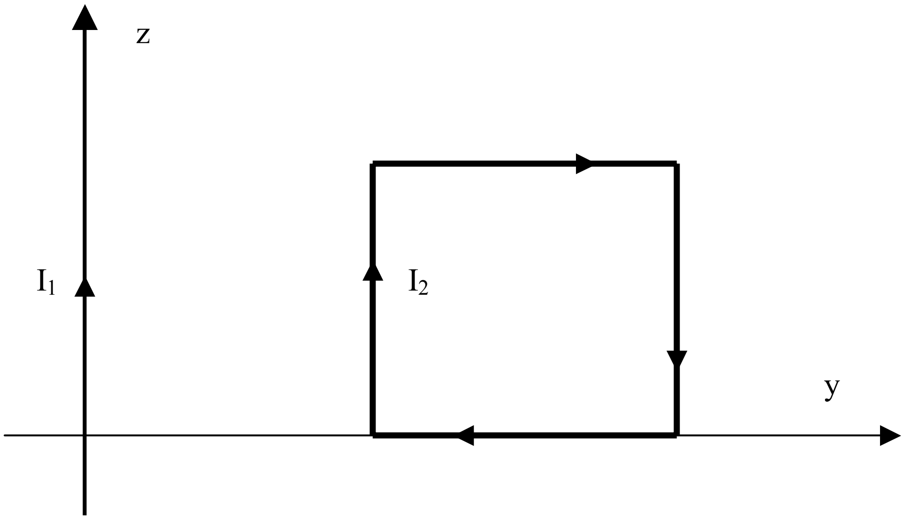


Figur 6

6. En ladet partikkel beveger seg med en konstant hastighet $\vec{u} = 10\vec{a}_x$ m/s mot et område der $\vec{E} = 10\vec{a}_y$ V/m og $\vec{B} = B_0\vec{a}_z$. Hvilken verdi må B_0 ha for at hastigheten til partikkelen skal holde seg konstant?
   A: 1 Wb/m^2
   B: 100 Wb/m^2
   C: 10 Wb/m^2

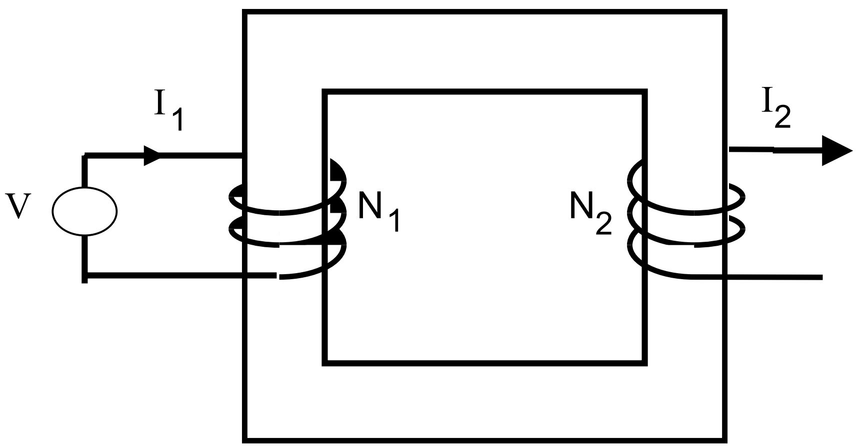
7. Under følger tre utsagn hvorav ett er feil. Kryss av for det du mener er det *gale* utsagnet.
   A: Ferromagnetiske materialer kan opprettholde en stor magnetisering selv når eksternt magnetfelt er fjernet.
   B: Relasjonen $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ er gyldig i ferromagnetiske materialer der μ_r er entydig definert og vanligvis stor.
   C: Over en viss temperatur forsvinner de ferromagnetiske egenskapene og de blir paramagnetiske materialer.

8. I figur 7 går det en strøm I_1 langs positiv z-akse som antas å gå til uendelig i begge retninger. I tillegg går en strøm I_2 rundt en rektangulær leder med retning som vist i figuren. Kraftvirkningen fra den uendelig lange strømlederen på den rektangulære lederen fører til at;
   A: Den rektangulære lederen tiltrekkes mot z-aksen
   B: Den rektangulære lederen frastøtes fra z-aksen
   C: De to horisontale stykkene av den rektangulære lederen tiltrekker hverandre



Figur 7

9. Figur 8 viser en transformator der kjernen består av et magnetisk materiale som antas å ha uendelig permeabilitet. Spolen til venstre har N_1=500 vindinger, mens spolen til høyre har N_2=200 vindinger. Spolen til venstre påtrykkes en vekselspenning slik at det går en strøm $I = I_1 \sin(\omega t)$ i den der I_1=10 A. Dette vil indusere en strøm i spolen til høyre på formen $I = I_2 \sin(\omega t)$. Hvilken verdi får I_2?
A: 4 A
B: 25 A
C: 5 A



Figur 8

10. En elektromagnetisk bølge har et E-felt gitt som: $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \beta z)\vec{a}_x$. Denne bølgen forplantes langs:
    A: Positiv x-retning
    B: Positiv z-retning
    C: Negativ z-retning

EMNE SIE4011 GRUNNLAG FOR ELEKTROTEKNIKKEN

STUDENTNR:: ………………………..

Svarkupong   Oppgave 3

Merk av med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål

Spørsmål	Alt. A	Alt. B	Alt. C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Oppgitte konstanter og formler

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \quad F/m$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad H/m$$

Maxwell's ligninger:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Lorentz-kraften: $\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$

Kontinuitetsligningen: $\nabla \cdot \vec{J} + \dfrac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$

Formler for gradient, divergens, curl og Laplace-operator:

Kartesiske koordinater:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sylinderkoordinater:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{a}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{a}_\rho & \rho\vec{a}_\varphi & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Kulekoordinater:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{a}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{a}_r & r\vec{a}_\theta & r\sin\theta\vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Divergensteoremet: $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{A} dv$

Stokes's teorem: $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$

Formler for differensiell forskyvning $d\vec{l}$, differensielt normalt areal, $d\vec{S}$ og differensielt volum, dv:

Kartesiske koordinater:

$$d\vec{l} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz$$
$$d\vec{S} = \vec{a}_x dydz + \vec{a}_y dxdz + \vec{a}_z dxdy$$
$$dv = dxdydz$$

Sylinderkoordinater:

$$d\vec{l} = \vec{a}_\rho d\rho + \vec{a}_\varphi \rho d\varphi + \vec{a}_z dz$$
$$d\vec{S} = \vec{a}_\rho \rho d\varphi dz + \vec{a}_\varphi d\rho dz + \vec{a}_z \rho d\varphi d\rho$$
$$dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

Kulekoordinater:

$$d\vec{l} = \vec{a}_r dr + \vec{a}_\theta r d\theta + \vec{a}_\varphi r \sin\theta d\varphi$$
$$d\vec{S} = \vec{a}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \vec{a}_\theta r \sin\theta dr d\varphi + \vec{a}_\varphi r dr d\theta$$
$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Transformasjon fra kartesiske til sylinderkoordinater:

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Transformasjon fra kartesiske til kulekoordinater:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$