Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for elektroniske systemer

Faglærer:
Trude Støren

EKSAMEN I EMNE TFE 4120 ELEKTROMAGNETISME

Onsdag 30. mai 2018

I oppgave 1 og 2 teller hver deloppgave 4 poeng. Egne poengregler gjelder for oppgave 3 som er en flervalgsoppgave.

Totalt antall poeng : 50.

Oppgave 1

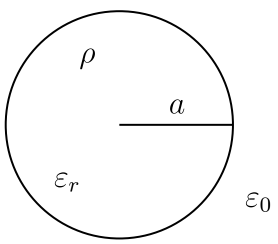
Vi skal i denne oppgaven se på elektrisk felt og potensial rundt ladede kuler med forskjellige egenskaper og i forskjellige konfigurasjoner.

a) Se først på kula i Fig. 1. Den har relativ permitivitet ε_r og homogen romlig ladningstetthet ρ.

i) Forklar hvorfor totalladningen til kula er

$$Q_{\text{tot}} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \tag{1}$$

ii) Bruk Gauss lov til å finne uttrykk for det elektriske feltet, **E** både inni og utenfor kula.



Figur 1: *Dielektrisk kule med radius a og totalladning Q_{tot}*

b) Vi ser nå på kula i Fig. 2. Denne har samme dimensjoner og samme totalladning, Q_{tot}, som kula i deloppgave a), men er en ideell leder.

i) Beskriv hvordan kulas ladning nå vil fordele seg på, og i kula. Finn uttrykk for relevante rom- og overflate-ladningstettheter.

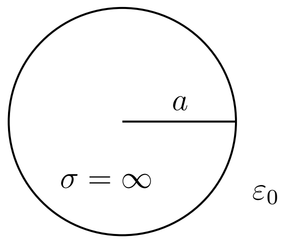
ii) Lag en skisse av **E**-feltet både inni og utenfor kula.

iii) Vis at **E** feltet utenfor kula er

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \hat{r} \tag{2}$$

hvor r er avstanden fra senter av kula og ρ er den romlige ladningstettheten fra oppgave a).

iv) Sjekk at grensebetingelsene for **E**- og **D**-felt er oppfylt over grenseflata mellom den ledende kula og området utenfor.



Figur 2: *Ideelt ledende kule med radius a og totalladning Q_{tot}*

c) Poissons ligning,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3}$$

gjelder for det elektrostatiske potensialet V i et lineært, isotropt, og homogent dielektrikum.

i) Vis hvordan Poissons ligning kan utledes fra Gauss' lov på differensialform.

ii) Bruk Poissons ligning for å finne et uttrykk for det elektrostatiske potensialet utenfor den ledende kula i deloppgave b) når vi antar at $V = 0$ uendelig langt fra kula og potensialet på overflaten av kula er V_0.

iii) Hva er potensialet inne i den ledende kula?

iv) Vis at sammenhengen mellom totalladningen på kula og kulas potensial er

$$Q_{\text{tot}} = 4\pi a \varepsilon_0 V_0 \tag{4}$$

og beregn hvor stor ladningen på kula er hvis potensialet er $V_0 = 1000\text{V}$ og $a = 10\text{cm}$. Oppgi svaret i antall elementærladninger.

d) Kula fra deloppgave a) plasseres nå over et uendelig stort ideelt ledende plan med potensial $V = 0$ som vist i Fig. 3. Avstanden fra det ledende planet til senter av kula er h. Referansen for potensialet er fremdeles uendelig langt fra kula.

i) Forklar hva speilladningsmetoden er med utgangspunkt i entydighetsteoremet.

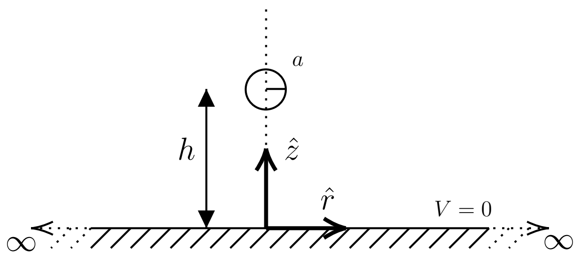
ii) Lag en skisse som viser hvordan en kan bruke speilladningsmetoden for å finne **E**-feltet overalt i området over det ledende planet.

iii) Vis at **E**-feltet overalt på overflaten til det ledende planet er

$$\mathbf{E} = -\frac{Q_{\text{tot}}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{h}{\left[h^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \tag{5}$$

uttrykt i sylinderkoordinater som vist i fig 3.

iv) Hva er overflateladningstettheten overalt på det lendende planet? Lag en skisse som viser overflateladningstettheten som funksjon av r. Kan du uten å regne si hva totalladningen til det ledende planet må være?



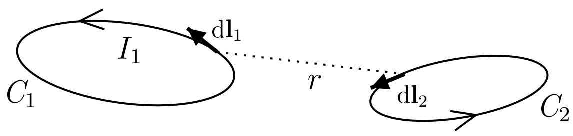
Figur 3: *Dielektrisk kule med radius a og totalladning Q_{tot} over uendelig stort ideelt ledende plan*

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på gjensidig induksjon mellom to strømførende sløyfer, samt regne på en magnetisk krets bestående av et materiale med høy relativ permeabilitet μ_r.

a) I et lineært materiale er gjensidig induktans mellom to strømførende kretser, C_1 og C_2, (Fig. 4) definert som

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \tag{6}$$



Figur 4: *To strømførende sløyfer*

i) Hva er Φ_{12} i ligning (6)?

ii) Forklar hva den gjensidige induktansen mellom de to kretsene er et uttrykk for, og tegn en skisse som viser hvordan en kan beregne L_{12} hvis en kjenner geometrien til C_1 og C_2 samt strømmen I_1.

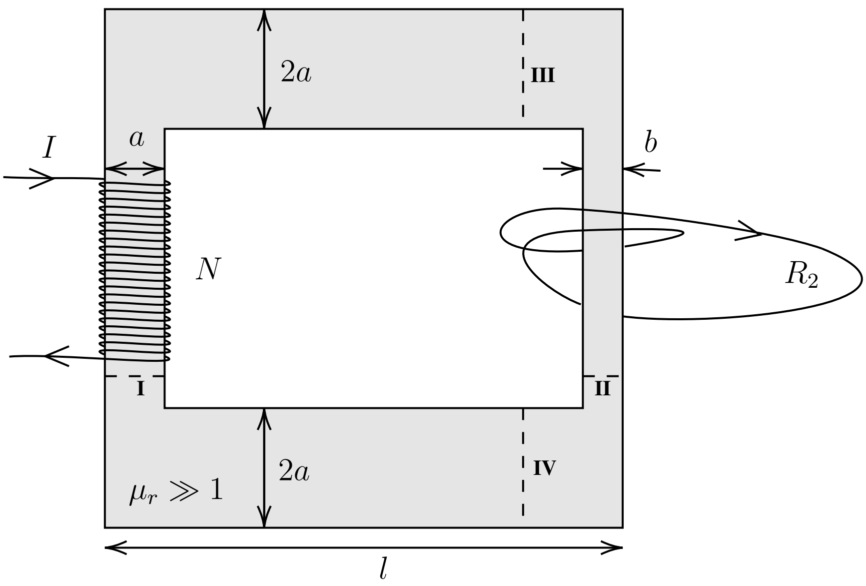
iii) Anta at det går en strøm I_1 i krets C_1. Hvordan kan indusert elektromotorisk spenning, e_2, i krets C_2 uttrykkes vha L_{12} og I_1?

b) Vektorpotensialet $\mathbf{A}$ fra en strømsløyfe C er gitt ved

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}}{r} \tag{7}$$

Vis ved hjelp av ligning (7) at for de to sløyfene i Fig. 4 er $L_{12} = L_{21}$.

c) Figur 5 viser en magnetisk krets hvor det er tvunnet en spole med N viklinger rundt del **I** av kretsen (spole 1). Materialet i kretsen er ferromagnetisk og har relativ magnetisk permeabilitet mye større enn 1. Vi antar imildertid at vi kan se bort fra ulineære egenskaper til materialet. Ytterkantene av kretsen har alle samme lengde, l, og kretsen har tykkelse a normalt på papirplanet. I tillegg til spole 1 går det en ledning to ganger rundt del **II**. Vi kaller denne for spole 2. I spole 1 går det en strøm I.



Figur 5: *En magnetisk krets*

i) Hvorfor kan vi anta at tverrsnittsfluksen Φ_t er den samme gjennom alle tverrsnittene **I** - **IV**?

ii) Vis at tverrsnittsfluksen er

$$\Phi_t = \frac{IN\mu_0\mu_r a}{l\left[\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right]} \tag{8}$$

Du kan anta at dimensjonene a og b begge er mye mindre enn l.

iii) Finn gjensidig induktans mellom spole 1 og spole 2, L_{12}.

iv) Hvis strømmen i spole 1 øker, slik at $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} > 1$, hvor stor blir strømmen i spole 2 og hvilken retning vil den ha? Hvordan kan du bruke Lentz' lov til å sjekke at strømretningen stemmer?

d) Anta nå at det ferromagnetiske materialet i kretsen i Fig. 5 byttes ut med aluminium. Aluminium er et paramagnetisk materiale med $\mu_{r,Al} = 1.00002$.

i) Tegn en skisse som viser hvordan flukslinjene fra spolen rundt del **I** nå vil fordele seg i rommet.

ii) Hva vil videre skje med flukslinjene hvis man fjerner kjernen helt?

iii) I denne oppgaven har vi ikke nok informasjon til å beregne gjensidig induktans mellom spolene dersom man erstatter materialet i kjernen med Aluminium, eller fjerner kjernen helt. Selv om vi ikke kan finne et uttrykk for gjensidig induktans mellom de to spolene kan vi si noe om hvilke parametere som vil inngå i et slikt uttrykk. Hva er relevante parametere i dette tilfellet og hvordan forventer du at de inngår i uttrykket for L_{12}?

Oppgave 3

Til hvert av spørsmålene som er stilt nedenfor, er det foreslått 4 svar. Oppgi hvilket svar du mener er best dekkende for hvert spørsmål. Svarene, som ikke skal begrunnes, avgis i skjemaet på siste side. Denne siden rives fra og leveres inn som del av besvarelsen.
Det gis 2 poeng for hvert riktig svar, -1 poeng for hvert galt svar og 0 poeng for ubesvart. Helgardering (mer enn ett kryss) gir 0 poeng.

a) Hva er alltid sant for et konservativt vektorfelt i elektrostatikken?

i) Det er aldri curl-fritt

ii) Det har ingen kilder

iii) Det kan uttrykkes som gradienten til et skalarfelt

iv) Linjeintegralet av vektorfeltet fra et punkt A til et punkt B er avhengig av integrasjonsveien mellom A og B.

b) Ved hvilken avstand har kreftene mellom et proton og et elektron samme størrelsesorden som tyngdekraften på en ballong med masse ca 2g ved jordoverflaten.

i) ca 1 mm

ii) ca 10 μm

iii) ca 100 fm

iv) ca 0.1 fm

c) Hva er riktig for et lineært, homogent, og isotropt dielektrisk materiale?

i) Permitiviteten må være en tredimensjonal tensor

ii) De elektriske feltene vil alltid ha sfærisk symmetri

iii) $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

iv) Alle tre over er riktige

d) Hvilket av uttrykkene under kan være uttrykk for gjensidig induktans mellom to spoler med hhv N_1 og N_2 viklinger med avstand R mellom senter av spolene?

i) $\frac{N_1}{N_2}\frac{\mu}{R}$

ii) $N_1 N_2 \frac{R}{\mu}$

iii) ${N_1}^2 N_2 \frac{\mu}{R}$

iv) Ingen av alternativene er sannsylige uttrykk for gjensidig induktans.

e) Hva er sant om hysterese i ferromagnetiske materialer

i) Den beskriver en ikke-lineær sammenheng mellom **B** og **H**

ii) Ved en gitt **B** er **H** ikke bare avhengig av verdien til **B**, men også av tidligere verdier av **B**

iii) Arealet innenfor hysteresekurven er proporsjonal med effekttapet i materialet når **B**-feltet varierer med tid

iv) Alle tre over er sant

f) Hva er sant for en ideell leder

i) Det elektriske potensialet er konstant overalt på lederen

ii) Den vil oppføre seg som en magnetisk krets

iii) Ohms lov må erstattes med Ohm-Maxwells lov

iv) Overflateladningen vil være konstant overalt på lederen

g) Hva kalles størrelsen gitt av den partieltderiverte av **D**-feltet med hensyn på tid

i) Magnetisk flukstetthet

ii) Forskyvningsstrøm

iii) Forskyvningsstrømtetthet

iv) Dielektrisk fri strøm

h) Hvordan har man kommet frem til Coulombs lov?

i) Den kommer fra løsning av Maxwells ligninger

ii) Den kommer fra Laplace' ligning

iii) Den er basert på eksperimentelle målinger

iv) Den ble postulert av Coulomb i 1784

i) Hva er riktig om kvasistatikk?

i) Det er en approksimasjon i elektrodynamikken hvor retardert tid, $t - R/c$, approksimeres med t.

ii) Det er en approksimasjon hvor Biot-Savarts lov fra elektrostatikken brukes for å finne vektorpotensialet i elektrodynamikken.

iii) For problemer hvor strøm og spenning varierer med nettfrekvensen (50 Hz) er kvasistatikk en fornuftig approksimasjon så lenge en ser på avstander som er små sammenlignet med dimensjonen til jordkloden.

iv) Alle de tre over er riktige.

Formler i elektromagnetisme:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon R^2}\hat{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q, \qquad V_P = \int_P^{\text{ref}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V,$$

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{P} = \epsilon_0\chi_{\mathrm{e}}\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}), \qquad C = Q/V, \qquad C = \epsilon S/d, \qquad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CV^2, \qquad w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}, \qquad \mathbf{J} = NQ\mathbf{v}, \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \qquad P_{\mathrm{J}} = \int_v \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{F} = Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad \mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad \mathbf{M} = \chi_{\mathrm{m}}\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}),$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}, \qquad \Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}, \qquad L = \frac{\Phi}{I}, \qquad W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Phi_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{jk}I_jI_k,$$

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\text{uten kilder eller tap}}, \qquad \mathbf{F} = +(\nabla W_{\mathrm{m}})_{I=\text{konst}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Maxwells likninger:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \oint_C \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho, \qquad \oint_S \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Potensialer i elektrodynamikken:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 V - \epsilon\mu\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \qquad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J},$$

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_v \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-R/c)\mathrm{d}v'}{R}.$$

Grensebetingelser:

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{t}} = \mathbf{E}_{2\mathrm{t}}, \qquad \mathbf{D}_{1\mathrm{n}} - \mathbf{D}_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{t}} - \mathbf{H}_{2\mathrm{t}} = \mathbf{J}_{\mathrm{s}}\times\hat{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{B}_{1\mathrm{n}} = \mathbf{B}_{2\mathrm{n}}.$$

Konstanter:

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8.854\cdot 10^{-12}$ F/m

Lyshastighet i vakuum: $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 299792458$ m/s $\approx 3.0\cdot 10^8$ m/s

Lyshastighet i et medium: $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$

Elementærladningen: $e = 1.6\cdot 10^{-19}$ C

Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.11\cdot 10^{-31}$ kg

Standard tyngdeakselerasjon: $g = 9.80665$ m/s^2

Gravitasjonskonstant: $\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2.

Differensielle vektoridentiteter:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse}) \\
\nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\
\nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\
\nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\
\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \\
&\quad + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \\
\nabla\cdot(V\mathbf{A}) &= V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \\
\nabla\times(V\mathbf{A}) &= (\nabla V)\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\
\nabla\cdot(\nabla V) &= \nabla^2 V \\
\nabla\times(\nabla V) &= 0 \\
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Integralidentiteter:

$$
\begin{aligned}
\int_v \nabla V \mathrm{d}v &= \oint_S V \mathrm{d}\mathbf{S} \\
\int_v \nabla\cdot\mathbf{A}\mathrm{d}v &= \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \quad \text{(Divergensteoremet)} \\
\int_v \nabla\times\mathbf{A}\mathrm{d}v &= \oint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{A} \\
\int_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \quad \text{(Stokes' teorem)}
\end{aligned}
$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\
&\quad + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \\
&\quad + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)
\end{aligned}
$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \\
&\quad + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right) \\
&\quad + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

EMNE TFE4120 ELEKTROMAGNETISME

KANDIDATNR.: ....

Svarkupong

Merk med kryss i de aktuelle rutene. Kun ett kryss for hvert spørsmål.

Spørsmål	Alt. i)	Alt. *ii)*	Alt. *iii)*	Alt. iv)
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				
g)				
h)				
i)				