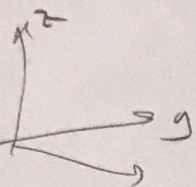
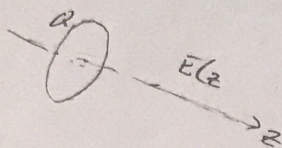


9/1-18

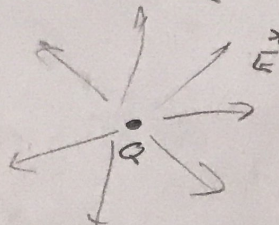
KARTESISK



SYLINDRISK



SPÆRISK



INTEGRALER

Linje $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$ $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Flate

$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$

$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$

Volum

$\int_V \rho dV$

SKALARE FUNKSJONER

høyde: $h(x, y)$

temper: $T(x, y, z)$

$T(x, y, z, t)$

trykk: $P(x, y, z, t)$

Elektrisk potensial: $V(x, y, z)$

Ladnings tetthet: $\rho(x, y, z)$

VEKTORFELT

elektrisk felt $\vec{E}(x, y, z, \dots, t)$

magnetisk felt $\vec{B}(x, y, z)$

strøm $\vec{J}(x, y, z)$

[vann, elektrisk] $\vec{I}(x, y, z)$

- Beskrive

- Integre / deriver dem

- "Noen morsomme sammenhenger mellom disse integrasjon og deriverte"

nyttige

GRADIENTEN

$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right]$ Vektor!

NABLAOPERATOREN: $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$

VEKTOR

LAPLACEOPERATOREN:

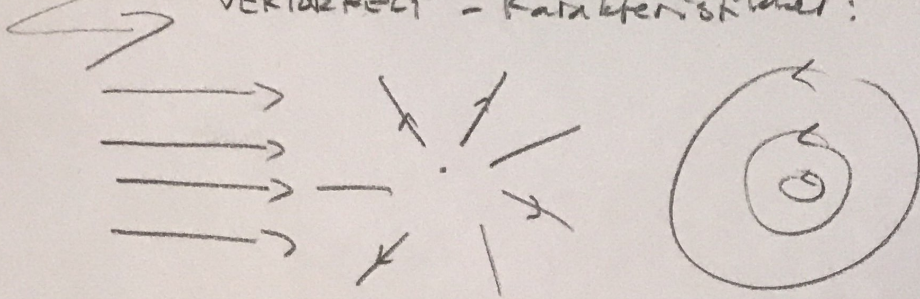
$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

SKALAR

$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

9/1-18

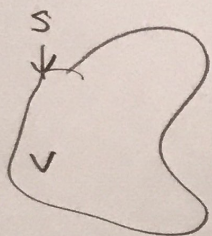
VEKTORFELT - Charakteristischer:



DIVERGENZ:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{skalar})$$

DIVERGENZTHEOREM:

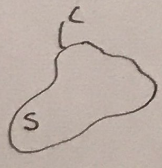


$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV$$

SIRKULATION (CURL):

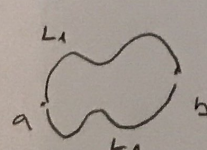
$$\operatorname{curl} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{e}}{\Delta S} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{vektor})$$

STOKES THEOREM:



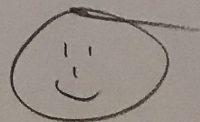
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

KONSERVATIVES FELT

$$\vec{A} = -\nabla V \quad \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_{L_1}^b \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_a^{L_2} \vec{A} \cdot d\vec{e}$$


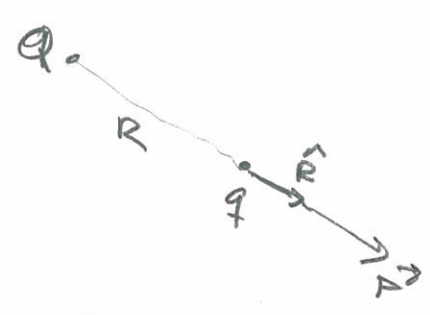
SISTE MORSUMME OPERATORRELATION:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$



ELEKTROSTATIKK

Coulombs lov



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \hat{R}$$

ϵ_0 : Elektrisk permitivitet i vakuum

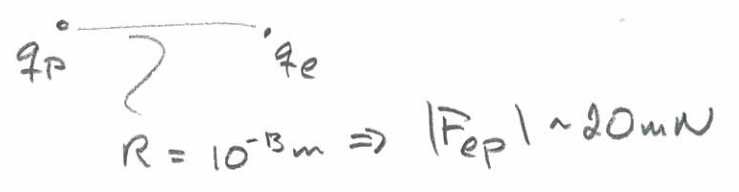
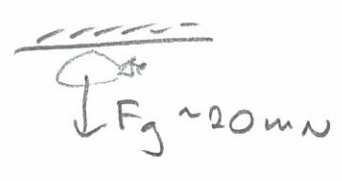
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Ladning til et elektron / proton: q_p

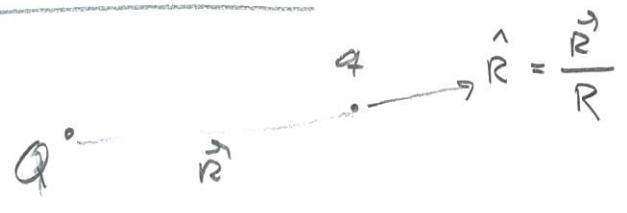
$$q_p = -q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

STARRELSE

15/1 2018



RETNING



Like ladninger: $\vec{F} \propto |Qq| \hat{R}$

Ulike ladninger: $\vec{F} \propto -|Qq| \hat{R}$

SUPERPOSISJON (Kraft fra flere punktladninger)

$q_i \quad i = 1, n$



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{R}_i$$

Regneeksempel 2.1 \leftrightarrow typiske ladningsforhold: batterier...

Coulombs lov for et utstrakt legeme

$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv}{R^2} \hat{R}$

$dq = \rho dv$

ELEKTRISK FELT

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

For punktladning Q: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R}$

SUPERPOSITION GELDER OGSÅ FOR E-FELT

Totalladning: Q
Linjeladning: q'

$dq = q' dl$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{q' \hat{R}}{R^2} dl$$

Flate-ladningstetthet: ρ_s

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s \hat{R}}{R^2} dS$$

Rumladningstetthet: ρ

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \hat{R}}{R^2} dv$$

PRAKTISKE REKNEDVERSØR

- Let etter symmetrier
(Prøv å forstå feltet kvalitativt)
- Velg et hensiktsmessig koordinatsystem
- Sjekk dimensjoner og oppførsel f. eks i symmetripunkter / symmetriplan og/eller langt unna

SKALARPOTENSIALET

$$V_A = \int_A^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

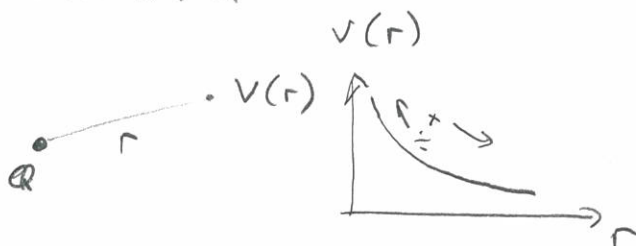
Enhet: $[V] = \frac{J}{C} \equiv V$
 $\Rightarrow [E] = V/m$

→ Uavhengig av integrasjonsvei fra A til ref 😊

16/1-2018

POTENSIAL FRA EN PUNKTLADNING, Q
relativt til ∞

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



POTENSIAL FRA EN.....

- LINJELADNING

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{Q' dl}{R}$$

- FLATELADNING

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s ds}{R}$$

- RINGELADNING

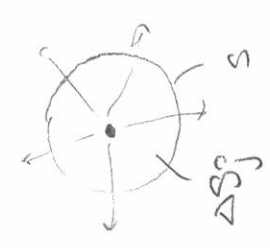
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_s ds}{R}$$

! ingen vektorer 😊

relativt til ∞

Curl til \vec{E}_j : Q_j Pos

$$(\nabla \times \vec{E}_j)_{\text{ken}} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E}_j \cdot d\vec{l}}{\Delta S_j} = \underline{0}$$



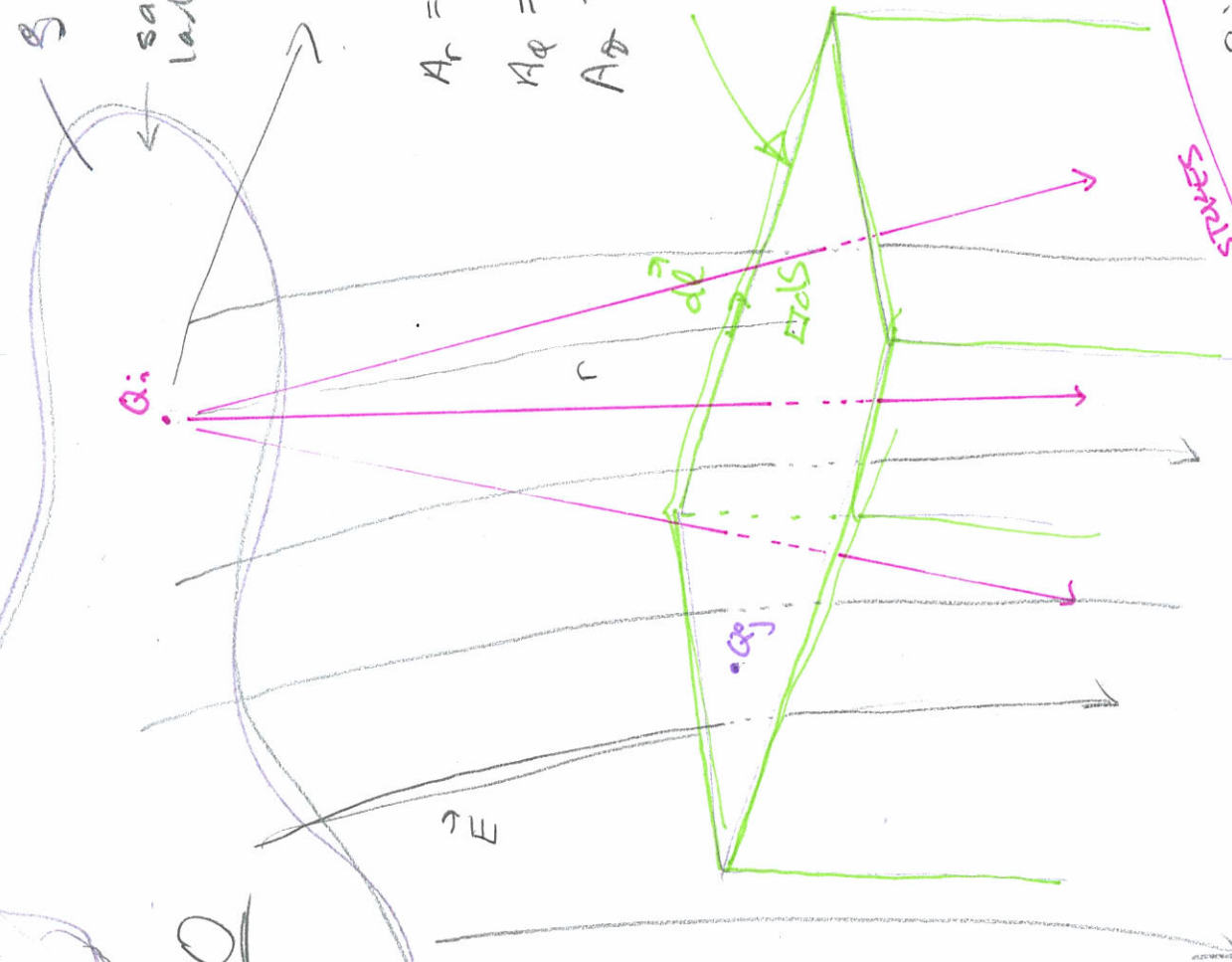
Følet rundt denne (Sfæriske koordin.)
 Q_i : origo

$$A_r = E_{ir} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r^2}$$

$$A_\theta = E_{i\theta} = 0$$

$$A_\phi = E_{i\phi} = 0$$

Samtidig lastet



Sfærisk koordinatsystem:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{\partial A_r}{\sin \theta} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Slut vis
 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Hus vis
 $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0$

Så er vi i mål

$$\int_S \nabla \times \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \underline{0} \quad \vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

SPENNINGEN (uavhengig av referanse for V_A, V_B)

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e}$$



⇒ KIRCHHOFFS SPENNINGSLØY



$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$$

$\vec{E} = -\nabla V$

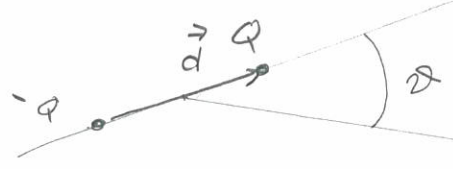
Nyttig sak

EQUIPOTENSIAL FLATER:

$$V = \text{konst}$$

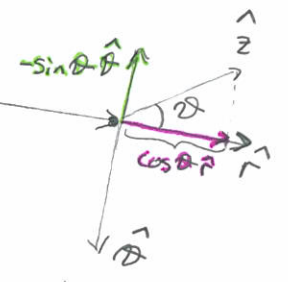
ELEKTIRISK DIPOL

Dipolmoment: $\vec{p} = Qd$
 $= Qd\hat{z}$



$$\vec{p} \cdot \hat{r} = Qd \cos \theta$$

$$\hat{z} = \cos \theta \cdot \hat{r} - \sin \theta \cdot \hat{\theta}$$



I Punktet (r, θ, θ) :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3 \cos \theta \cdot \hat{r} - \hat{z})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}}{r^3}$$

enhetsvektorer i samme plan som arket

22/1
2018

GAUSS' LOV:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

← Ladningene innenfor S

Div. teoret

→ Vilkålig S!

$\vec{E}(x,y,z)$



→ Hvis $\vec{E} = 0$ overalt på S

ELLER

→ Hvis \vec{E} parallell med overflata overalt på S

ELLER

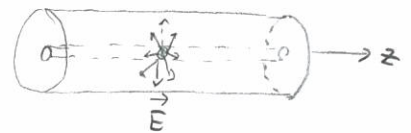
→ Hvis $\text{div} \vec{E} = 0$ overalt inne i V

⇒ INGEN LADNING I INNEFOR S

3 EKSEMPLER

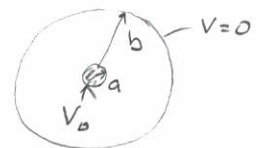
I: Feltet inne i en coax kabel (Hvorfor bruke Gauss lov)

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}, & r \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



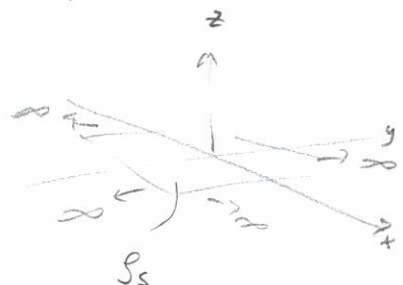
II: Feltet rundt en ladd kule inne i et kuleskall

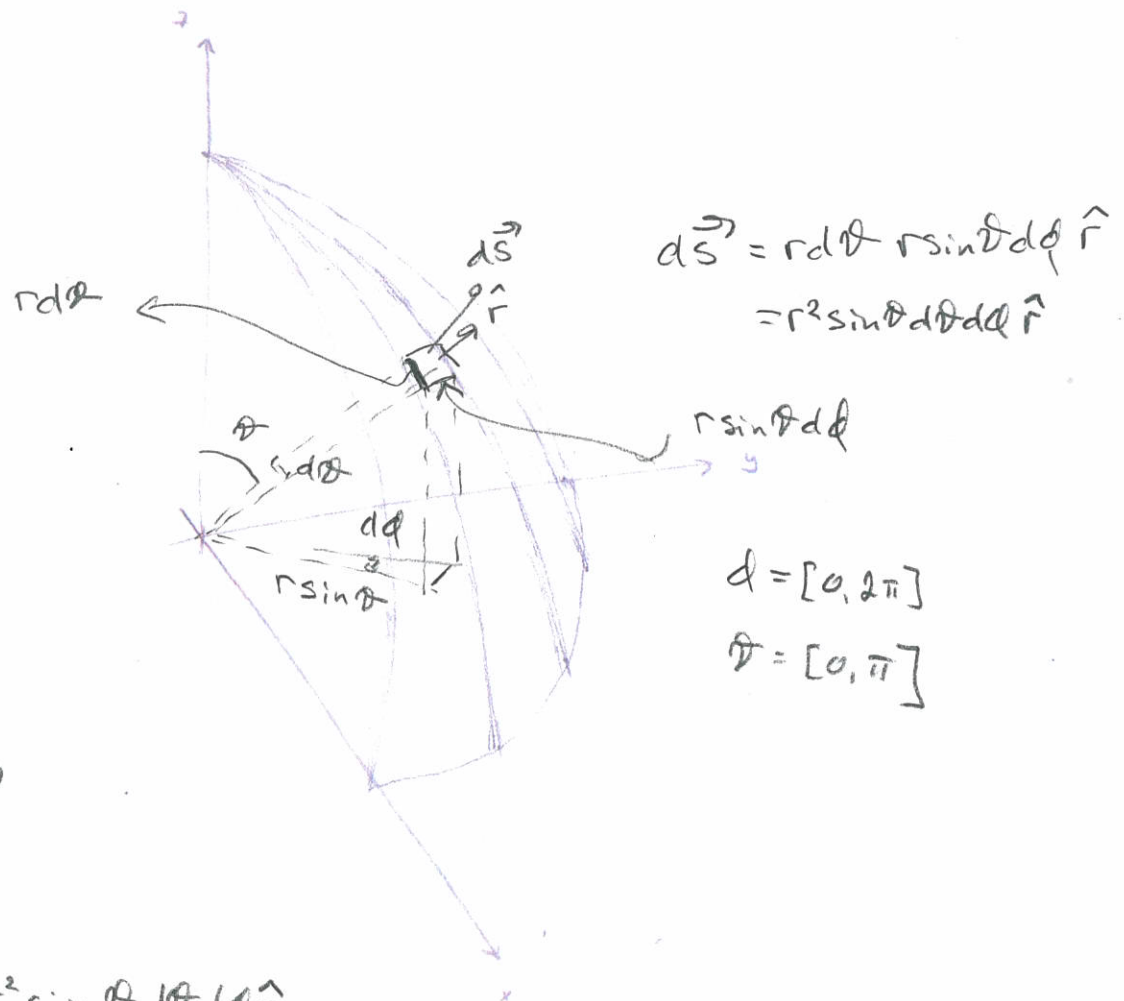
$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{ab}{b-a} \frac{V_0}{r^2}, & r \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



III: Feltet rundt et (uendelig) plan

$$E_z = \begin{cases} \frac{S_s}{2\epsilon_0}, & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -\frac{S_s}{2\epsilon_0}, & z < 0 \end{cases}$$



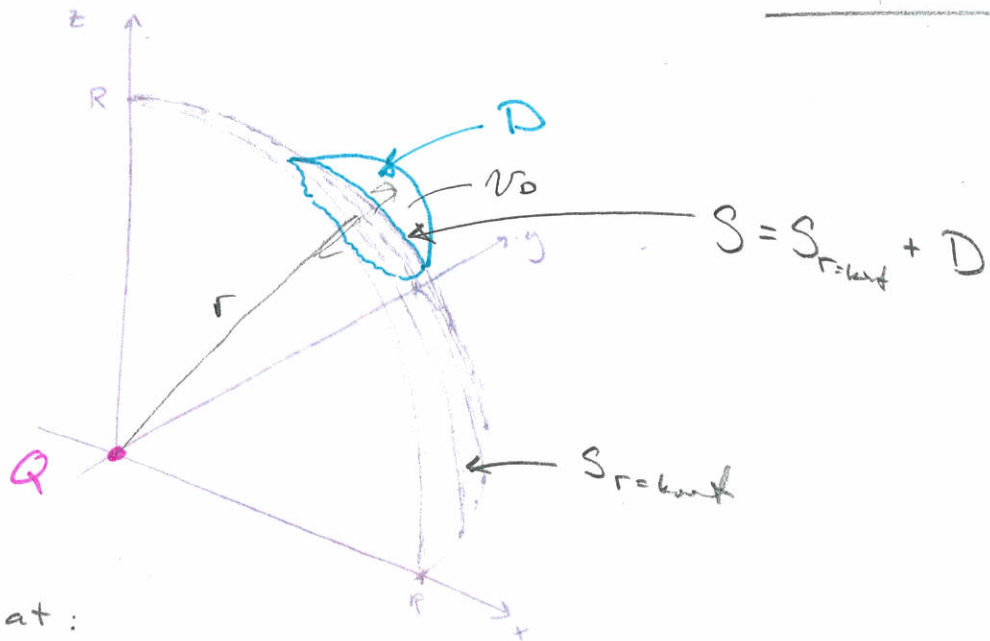


$$\oint_{S_{r=\text{const}}} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

$$= \oint_{S_{r=\text{const}}} \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

$2\pi \quad -\cos\theta \Big|_0^{\pi} = 2$



Har vist at:

For en punktladning Q og en kuleflate $S_{r=\text{konst}}$

$$\oint_{S_{r=\text{konst}}} \vec{E}_Q \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{r=\text{konst}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_D \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} + \underbrace{\int_D \nabla \cdot \vec{E} \, dV}_{=0}$$

Div. teoremet

Rager ud $\nabla \cdot \vec{E}$ via

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$E_\theta = E_\phi = 0$$

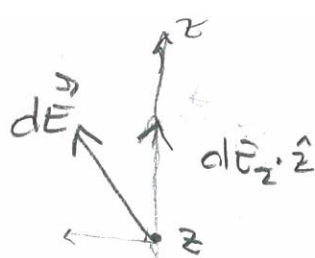
(Sylinderkoordinat)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0 \quad (\ddot{\smile})$$

Exs III

Felt regnet ut direkte



$$dE_z = |dE| \frac{z}{R} *$$

$R \rightarrow \infty$

Sylinderkoordinat



$r d\phi dr$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_s}{R^2} dS$$

$$\frac{q_s}{R^2} \hat{R} dS$$

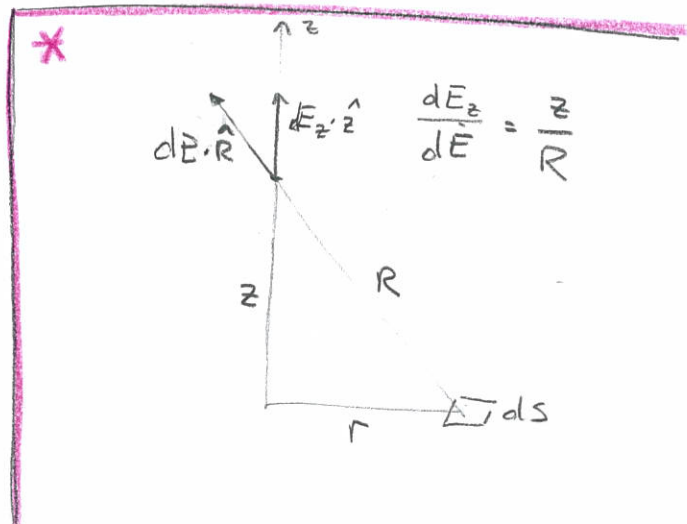
Ser bare p_z E_z siden alle E_x og E_y vil kanselleres ut p.g.a. symmetri

$$E_z = \int_S dE_z = \int_S |dE| \frac{z}{R} = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{z r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\phi dr$$

$$= \frac{q_s z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

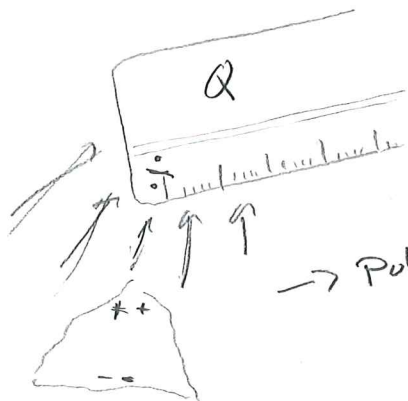
$$\int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{-1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{z}$$

$$E_z = \frac{q_s}{2\epsilon_0}$$



ELEKTRISKE FELT I DIELEKTRISKE MEDIER (2.4)

23/1
2018



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{R}$$

→ Polariseres dielektriske medier



TOTALLADNINGER I ET MEDIUM:

BUNDNE

- bundet sammen i dipoler (mønstre enheter)

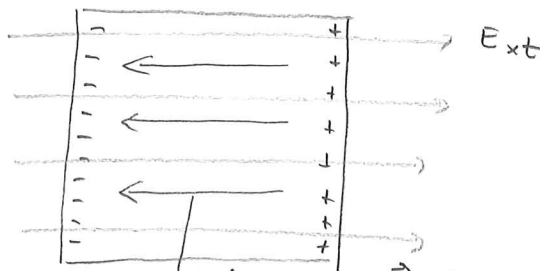
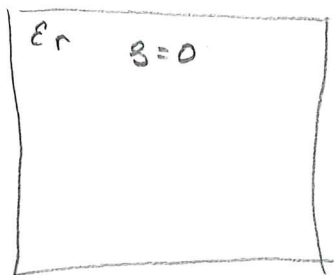
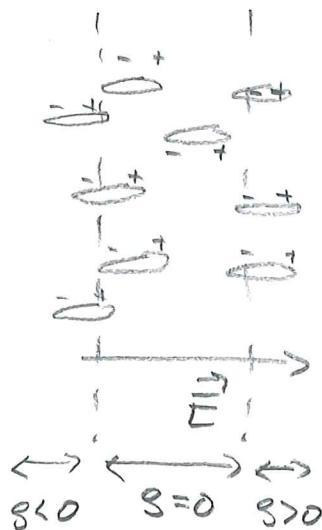
FR

- "enkeltladninger" e^- H^+
- får lov til å oppføre seg som ladninger

"KVALITATIVT BILDE"



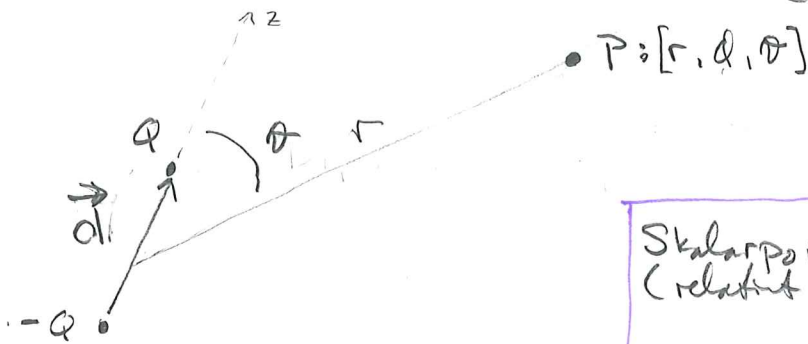
$$\vec{E} = 0$$



→ Internt \vec{E} -felt p.g.a. polarisering

$$\Rightarrow \text{Totalfelt } \vec{E}_{tot} = \vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int}$$

LA OSS SE LIT MER PÅ DIPOLER (Tilbudsblikk)



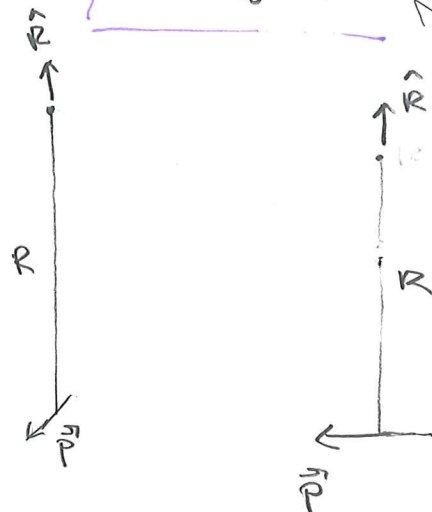
Dipolmoment:
 $\vec{p} = q\vec{d}$

Skalarpotensialet
 (relativt til ∞)

$$V_{dipol} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2}$$

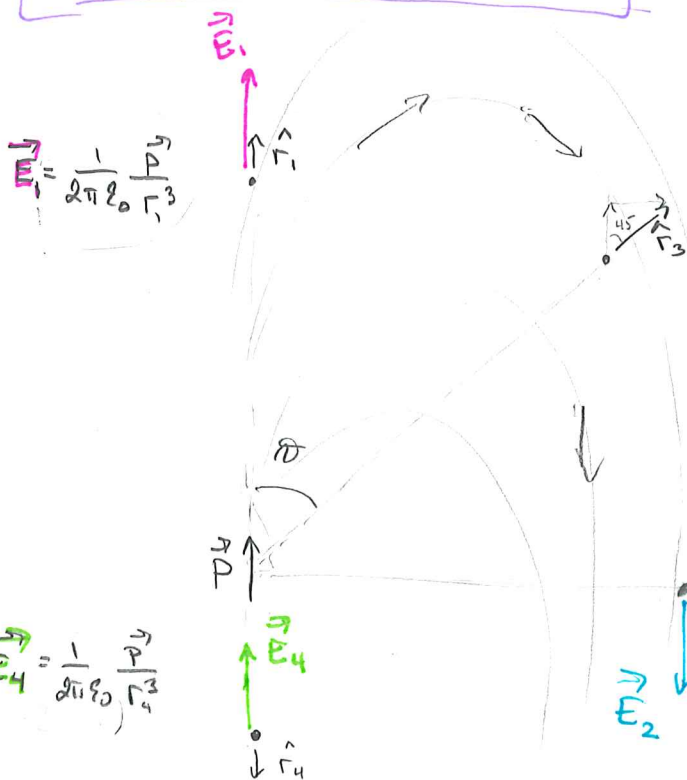
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

← sferiske koord.



E-felt:
 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{r^3}$

$\vec{p} \cdot \hat{r} = |\vec{p}| |\hat{r}| \cos\theta = p \cos\theta$



$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 2p \cos\theta \\ p \sin\theta \end{pmatrix}$ (GRIS med \cos/\sin)

$\vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{p}$ $\vec{p} = q\vec{d}$

$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{p}$

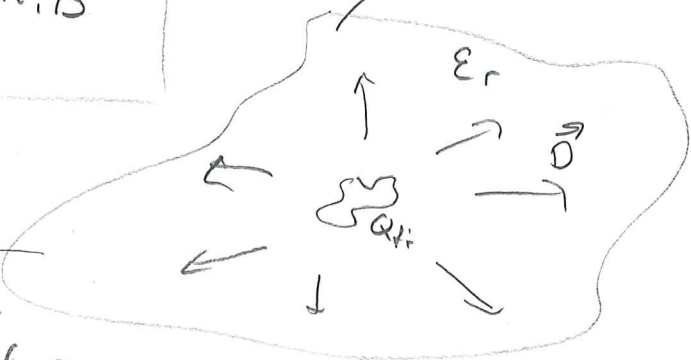
$\hat{r} = -\hat{z}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

- ↳ • elektrisk flukstetthet
- forskyvning
- \vec{D} -felt

GAUSS LOV I ET DIELEKTRISK MEDIUM:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{fri, is}$$



Materialparametre.

For mange materialer

$$\vec{P} \propto \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

↳ elektrisk sussesibilitet

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

relativ permittivitet

↳ absolutt permittivitet

Dimensionsanalyse:

$$[\vec{P}] = [q d] = C m$$

$$[\vec{E}] = [F/q] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{C^2}{N m^2} = \frac{C}{V m}$$

↓

$$[\chi_e] = 1 \quad (\text{!})$$

LINEÆRT MATERIALE
 $\vec{P}(\vec{E})$ [og ikke $(E)^2$ f. eks.]

HOMOGENT MATERIALE
 Konstant ϵ_r

ISOTROPT MATERIALE
 ϵ_r skalart gilde
 antenstor
 $\Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{P}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(x, y, z) \quad (2.76) \text{ Maxwell \# 3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.77) \text{ Maxwell \# 1 [elektrostatisk]}$$

29/1
2018

DIELEKTRISK STYRKE

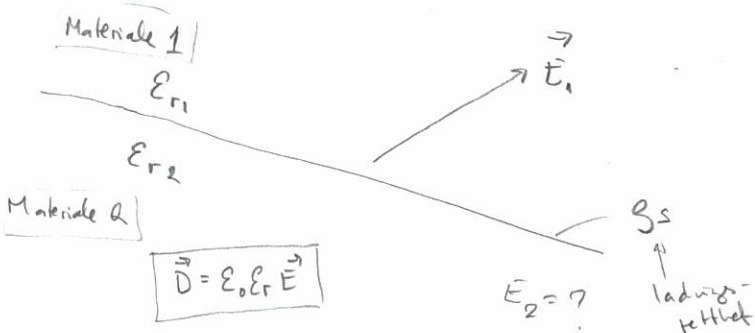
Den feltstyrken (\vec{E}) som skal til for å ionisere et materiale. Ioner \Rightarrow ladde partikler \Rightarrow strøm \Rightarrow overslag / gnist

Før luft: $3 \frac{kV}{mm} = 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$

Molekyl:

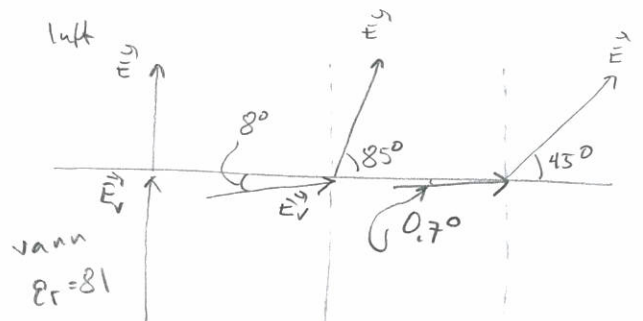
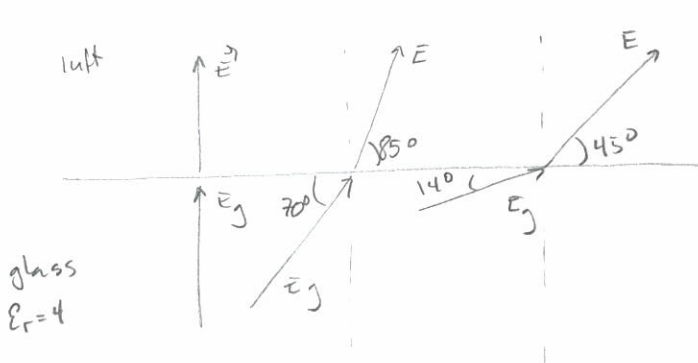
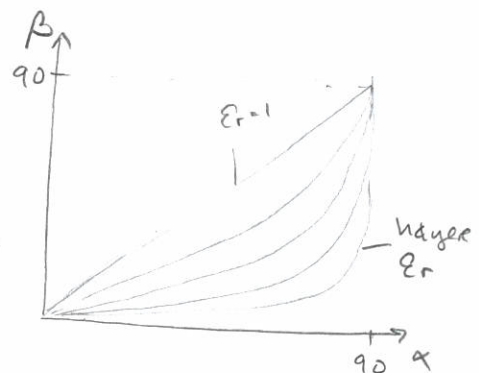
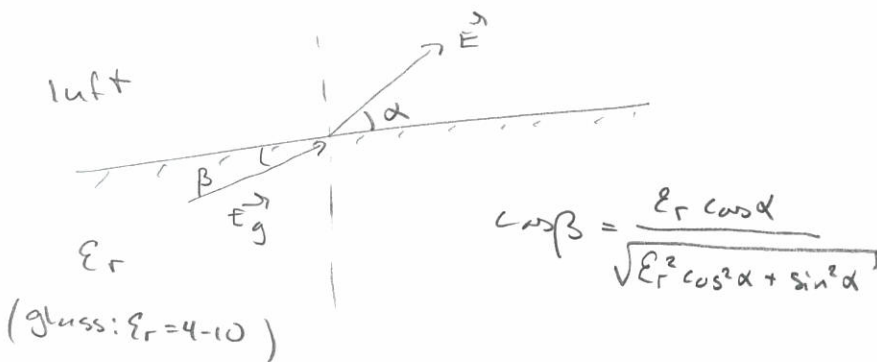


GRENSEBETINGELSER for \vec{E} og \vec{D} (2.5)



$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.94)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s \quad (2.95)$$



POISSON'S & LAPLACE' LIGNING (2.6)

Maxwell #3 + lineært & homogent

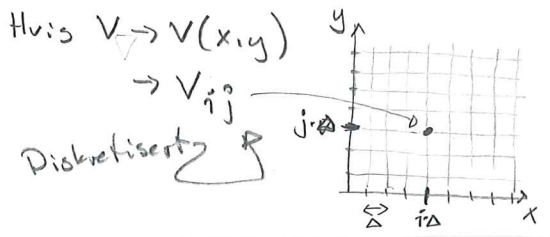
⇒ Poisson's ligning: $\nabla^2 V = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon}$ (2.97)

Laplace' ligning: $\nabla^2 V = 0$ (2.98)
 ($\rho=0$)
 Ladefritt rom

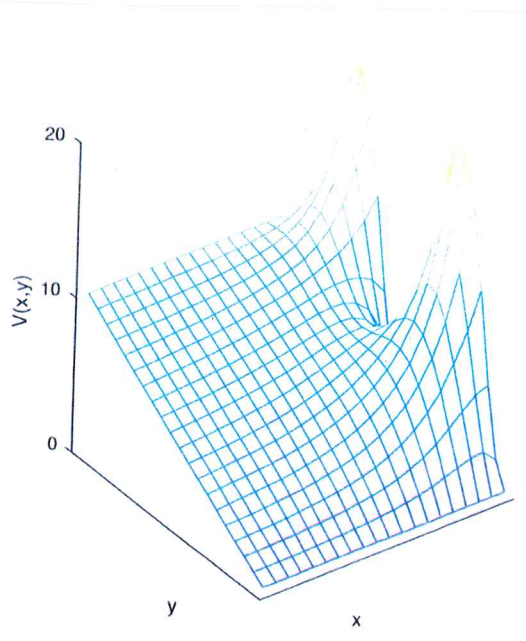
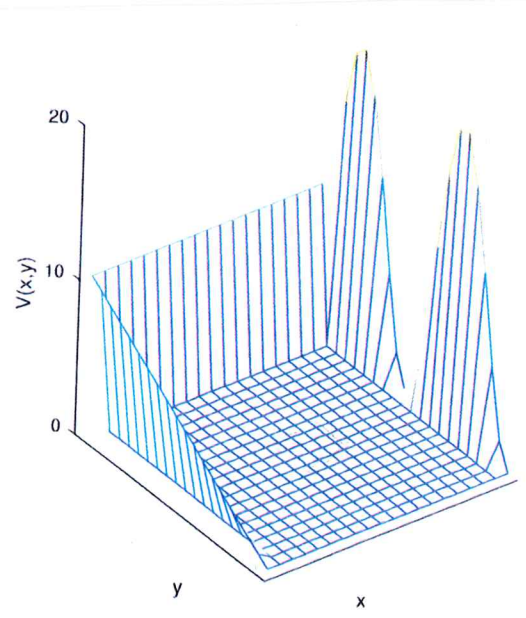
- EKS:
- FELT MELLOM 2 UENDLIG STORE PLATER ($V \rightarrow V(z)$, kart. koordinat)
 - FELT RUNDT EN KULE [EKS 2,14] ($V \rightarrow V(r)$, sfæriske koordinat)
 - FELT MELLOM EN KULE OG ET KULESKALL (men andre grense-betingelser)
 - FELT I COAX KABEL ($V \rightarrow V(r)$, syl. koordinat)
 - PN overgang
 - NUMERISKE LØSNINGER

30/1 2018

→ Æneste utvei når geometrien blir komplisert



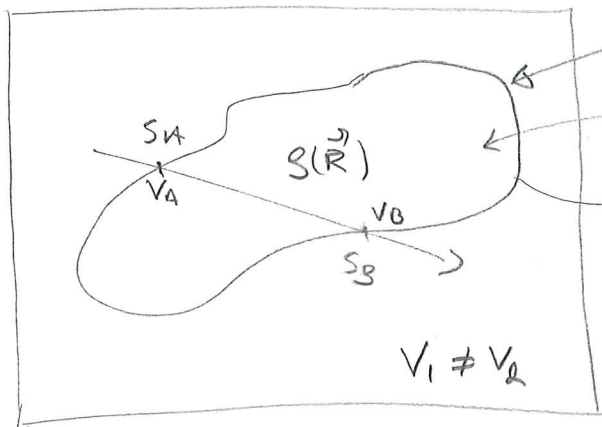
$$V_{ij} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1})$$



$\nabla^2 V = 0$

I et lineært, homogent og isotropt materiale uten fri ladning
 $\Rightarrow V(\vec{R})$ har ingen MAX eller MIN punkter

ENTYDIGHETSTEOREMET :



$\nabla^2 V(\vec{R}) = -\frac{\rho(\vec{R})}{\epsilon}$

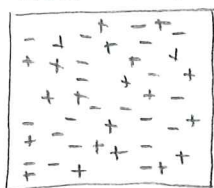
- ① Innenfor S tilfredstiller V_1 og V_2 Poisson's ligning
- ② På grenseflata S tilfredstiller begge grensebetingelsene (for $V(S)$) på S

$\Rightarrow V_1(\vec{R}) = V_2(\vec{R})$ i hele N selv om de kan være forskjellige utenfor N

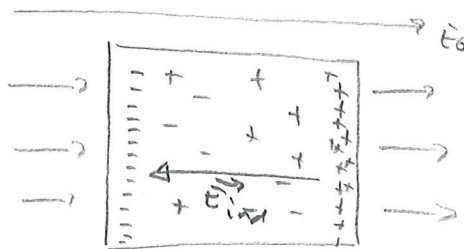
IDEELLE LEDERE (d. 7)

Ladningene i materialet er HÆLT FRI til å bevege seg hvor de vil

Ideell leder



\Rightarrow Påtrykt felt E_0



Egenskaper

1) På grunn av

ELEKTROSTATISK INDUKSJON,

vil $\vec{E} = 0$

inni en ideell leder

Ladninger vil flytte på seg HÆLT TIL $\vec{E}_{ind} = -\vec{E}_0$

$\Rightarrow \vec{E}_{int} = 0$

2) Hvis total ladning til ledaren er $Q \neq 0$ vil romladningstettheten inni ledaren = 0

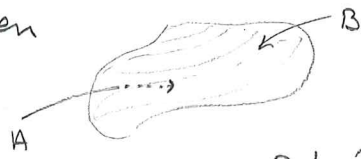
$\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \rho(x,y,z) = 0$

\Rightarrow All ladning $\rightarrow \rho_s(x,y,z)$ **INDUSERT PLATELADNINGSTETTHET**

3) Flukstettheten utenfor ledere?
 [kommer litt lengre ned 😊]

4) En ideell leder er en

**EKVIPOTENSIAL-
 PLATE / VOLUM**



$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

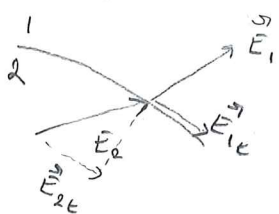
↙ 0 overalt

Potensial-
 forskjellen /
 spenningen.

↳ Kan ikke ha
 spennings forskjeller
 langs en ideell leder

5) Felt på grenseflaten?

Generelt:

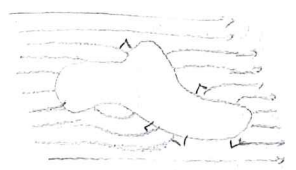


$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

Ideell leder:

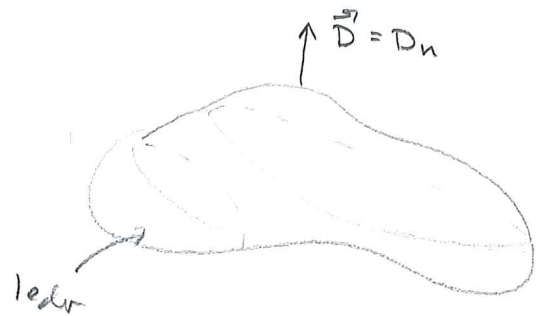
$$\vec{E}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{1t} = 0$$



**\vec{E} / \vec{D}
 ALLTID
 NORMALT
 PÅ OVER-
 FLATEN**

3) [Nå kan vi se på denne, tilbake til 5) felt]



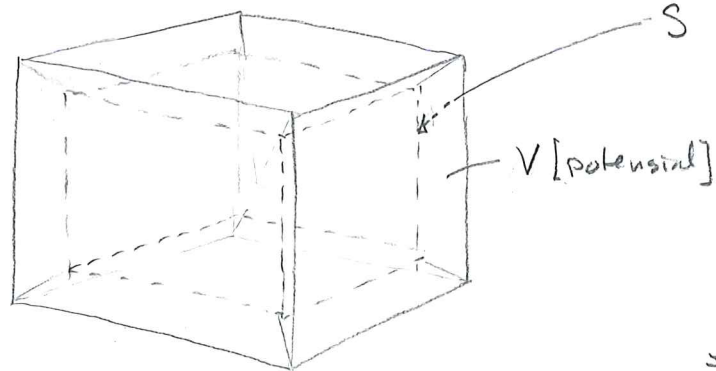
Generelt: $D_{in} - D_{out} = \rho_s$

⇒ \vec{D} utenfor / på overflaten til
 en leder:

$$|\vec{D}| = D_n = \rho_s$$

FARADAYBUR

Ideell leder m/ hulrom



V konstant på hele ledere
 ⇒ V konstant på hele flaten S
 som omslutter hulrommet.

Inni hulrommet: $\rho = 0$
 ⇒ $\nabla^2 V_{inni} = 0$

V konstant
 inni hele
 hulrommet

$$\vec{E} = -\nabla V = 0$$

↳ inni hele hulrommet

- EKS:
- 1) COAX 😊
 - 2) BIL/FLY (iturdenset)
 - 3) EMP-sikkert rom

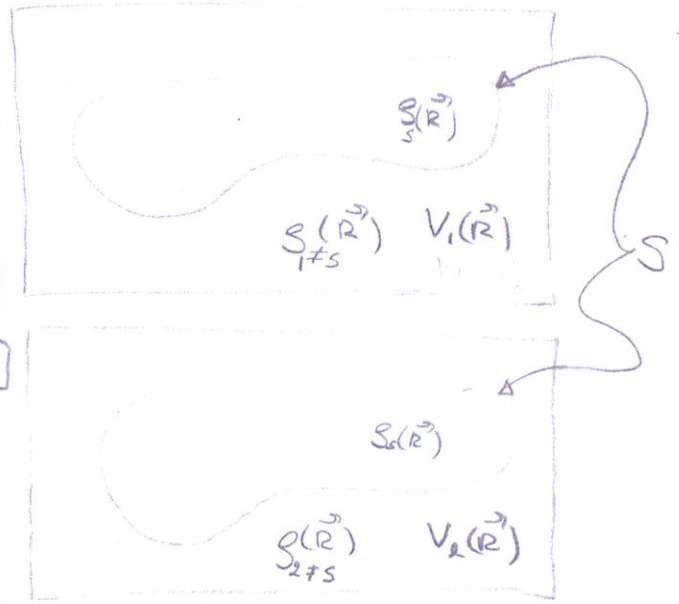
SPEILLADNINGSMETODEN

- Utgangspunkt:
- 1) $\vec{E} = -\nabla V$ Relasjonen mellom skalarpotensial og et elektrostatiske felt (gjelder alltid)
 - 2) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ Lineært og isotropt medium
 - 3) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$ Maxwell # 3 (gjelder alltid)
 - 4) $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon$ Homogent medium

$\Rightarrow \nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$ Poisson's ligning

ENTYDIGHETSTEOREM:

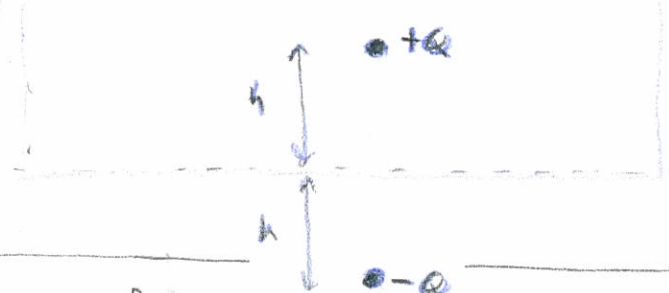
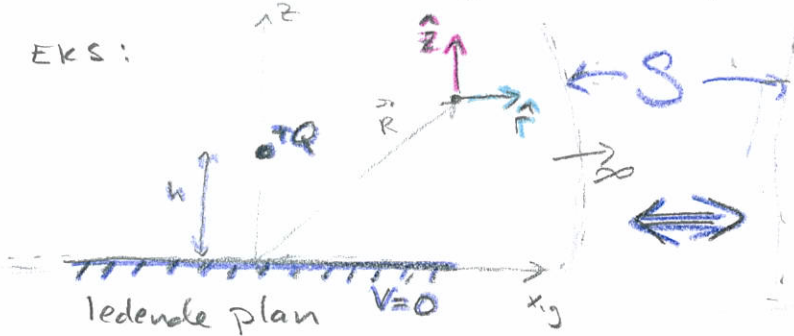
Hvis V_1 og V_2 BØGGE OPPFYLLER
 POISSON'S LIGNING OG DE HAR
 SAMME GRENSEBETINGELSER PÅ
 DEN LUKKETE FLATEN S [$V_1(S) = V_2(S)$]
 $\Rightarrow V_1(\vec{r}) = V_2(\vec{r})$ INNENFOR S
 $\Rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_2(\vec{r})$ — " —



\Rightarrow Hvis vi skal regne på potensial og felt innenfor en lukket flate, S , kan vi i stedet regne på et ekvivalent problem så lenge de to situasjonene har

- \rightarrow samme $\rho(\vec{r})$ innenfor S
- \rightarrow samme grensebetingelser på S

EKS:

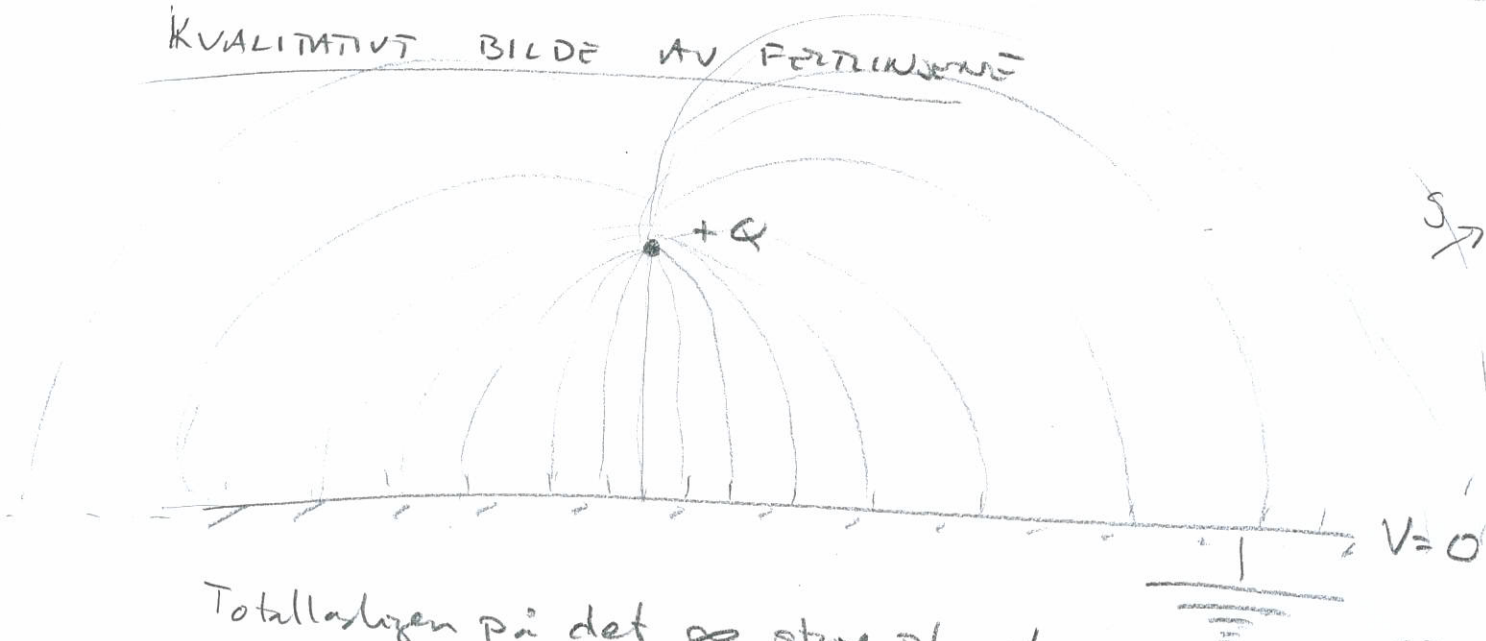


FELTET I PUNKTET $\vec{R} [r, \phi, z]$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{r}{(r^2 + [z-h]^2)^{3/2}} - \frac{r}{(r^2 + [z+h]^2)^{3/2}} \right] \cdot \hat{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{z-h}{(r^2 + [z-h]^2)^{3/2}} - \frac{z+h}{(r^2 + [z+h]^2)^{3/2}} \right] \cdot \hat{z}$$

$$S_s(r) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

KVALITATIVT BILDE AV FÄLTLINJER



Totalt laddningen på det ∞ stora planet

$$Q_{\text{plan}} = \int_{\text{plan}} E_s(r) r dr d\phi = - \frac{Qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{r}{(r+h^2)^{3/2}} dr = -Q$$

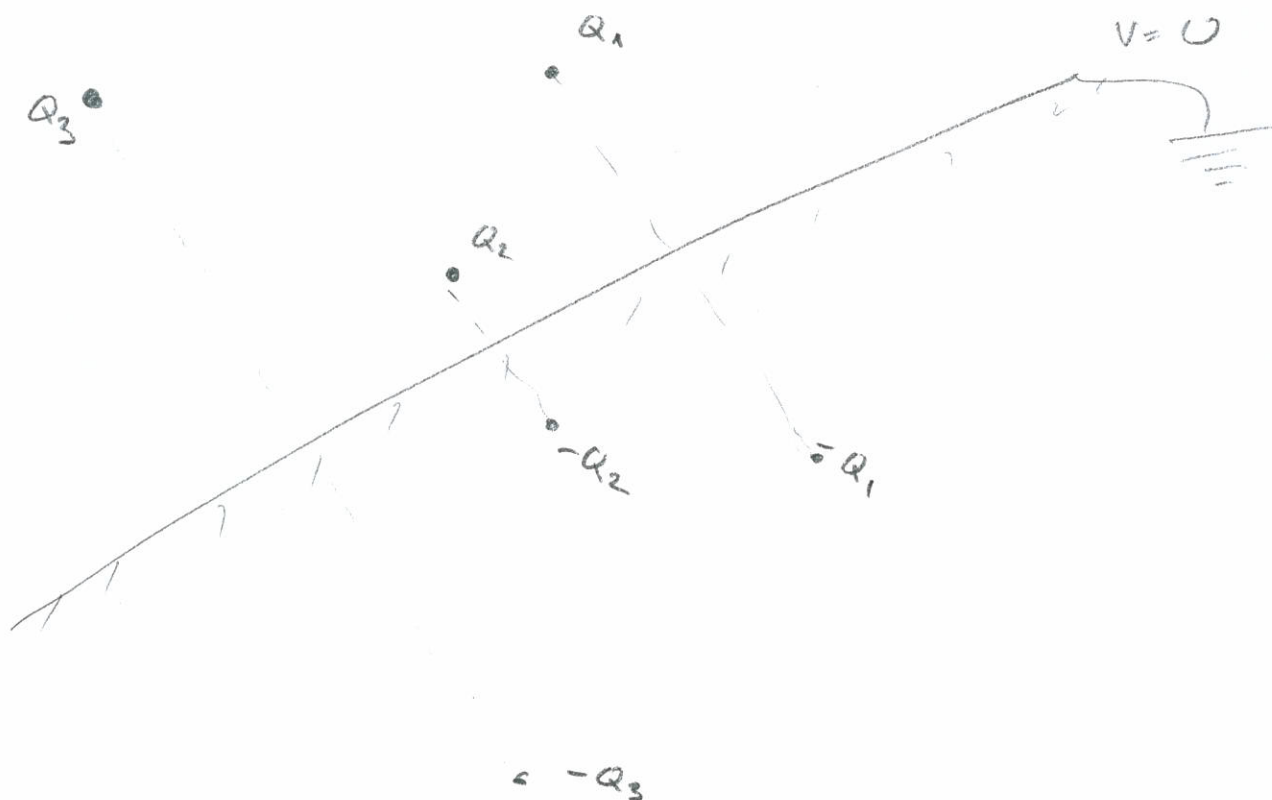
(smiley face)

$$\frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{h}$$

På S:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = +Q + Q_{\text{planet}} = \underline{\underline{0}}$$

S (med Q + planet)



LYN

$V_{ref} = 0$

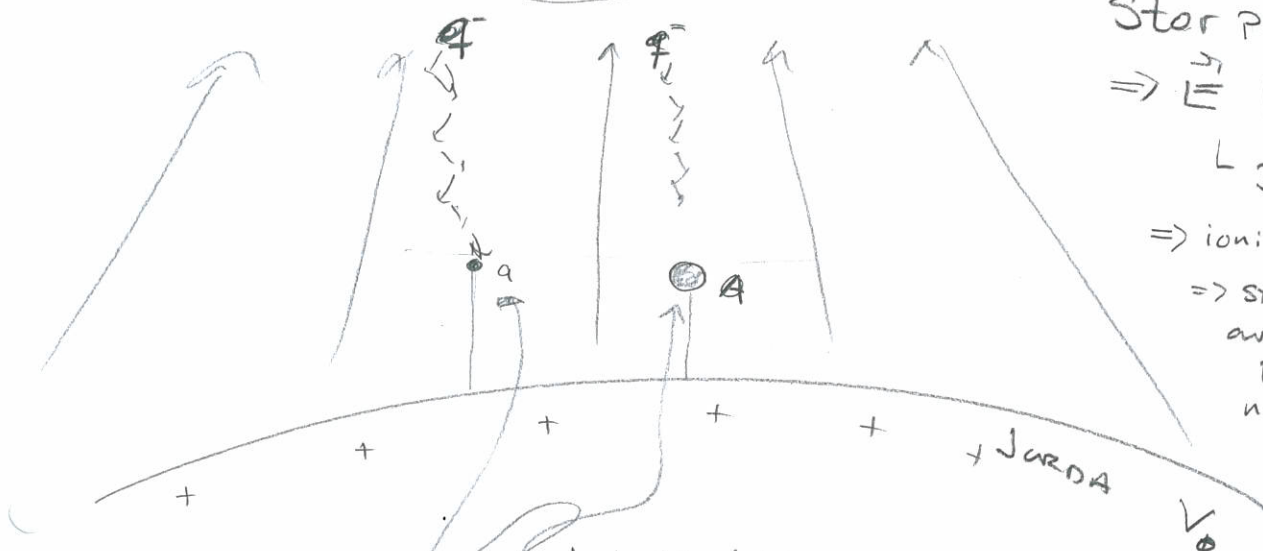
$\nabla V \neq 0!$

Stor potensialforskjell

$\Rightarrow \vec{E}$ kraftige

$L \sim 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$

\Rightarrow ionisering
 \Rightarrow "stråm front"
av ladde partikler ned mot jorda



Lokalt felt sterkere rundt a enn rundt A

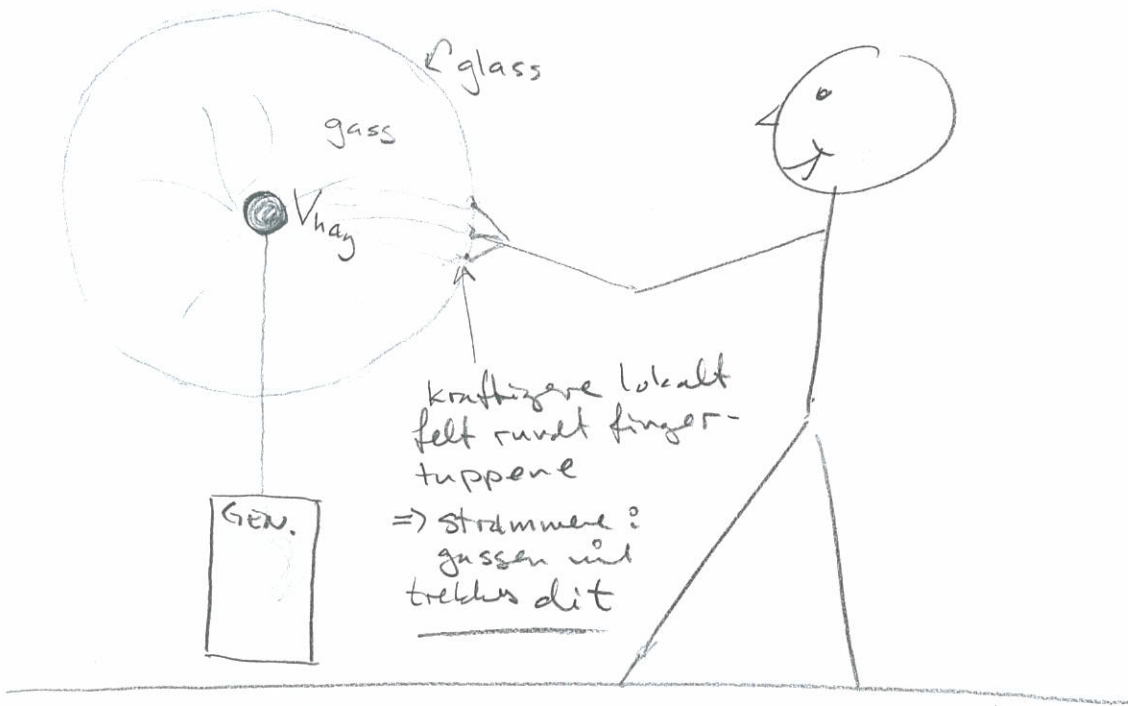
$\vec{E} \propto \frac{Q}{a^2}$

$E_s = \frac{2V_0}{a}$

$E \propto E_s!$

\Rightarrow LYNET VIL "SLÅ MED" (egentlig "SLÅ OPP" der)

VAN DER GRAAF GENERATOR

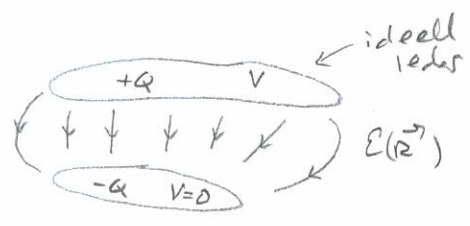


kræftigere lokalt felt rundt fingertuppene

\Rightarrow strømmene: gassen vil trekkes dit

KAPASITANS (2.8)

"Evnen/kapasiteten til et system til å lagre ladning (energi)"



DEFINISJON:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.121)$$

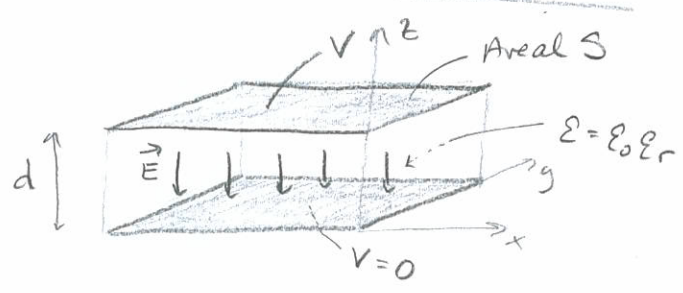
coulomb
↓
[C] = F = $\frac{C}{V}$
farad volt

Kapasitans
→ Bare avhengig av geometriske størrelser og materialparametere $\epsilon(r)$

KRETSLIGNING

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt}$$

PARALLELLPLATE KONDENSATOR



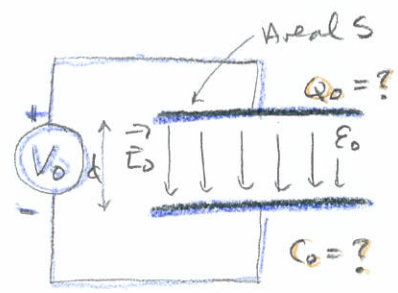
$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} \quad (2.127)$$

Større areal \Rightarrow kapasitansen øker

Mindre avstand \Rightarrow ———

Feltet inni: $\vec{E}(z) = -\frac{V}{d} \hat{z}$ (2.125)

EFFEKTEN AV Å ENDRE MATERIALE INNE I KONDENSATOREN



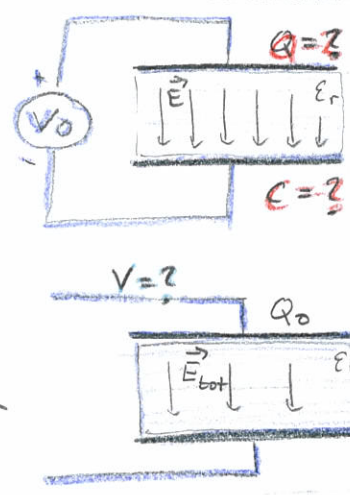
$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{V_0}{d} \hat{z}$$

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

$$Q_0 = S D_0$$

$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$
 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$
+ ta vekt spenningskilden



summe

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = \epsilon_r C_0$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z} = \vec{E}_0 (!)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_r \vec{D}_0$$

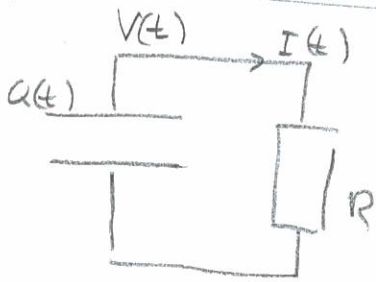
$$Q = S D = S \epsilon_r D_0 = \epsilon_r Q_0$$

$$E_{tot} = E_0 - E_{ind} = ?$$

$$V = \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q_0}{C_0} = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

$$\vec{E}_{tot} = -\frac{V}{d} \hat{z} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

UTLADNING GJENNOM EN KONDENSATOR

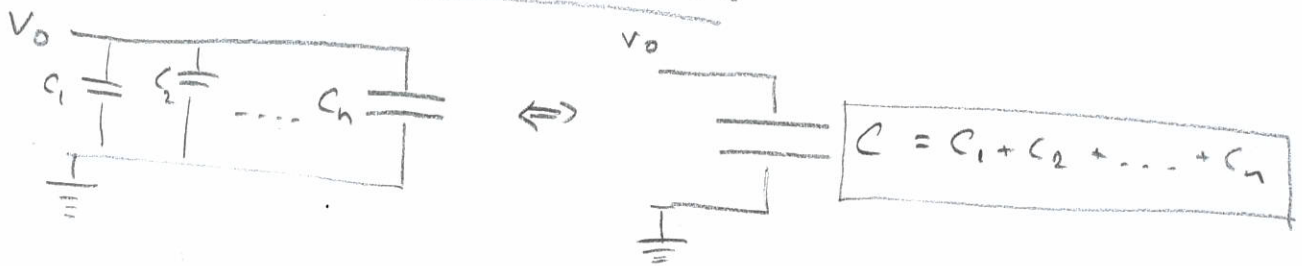


$t=0 : V(0) = V_0$

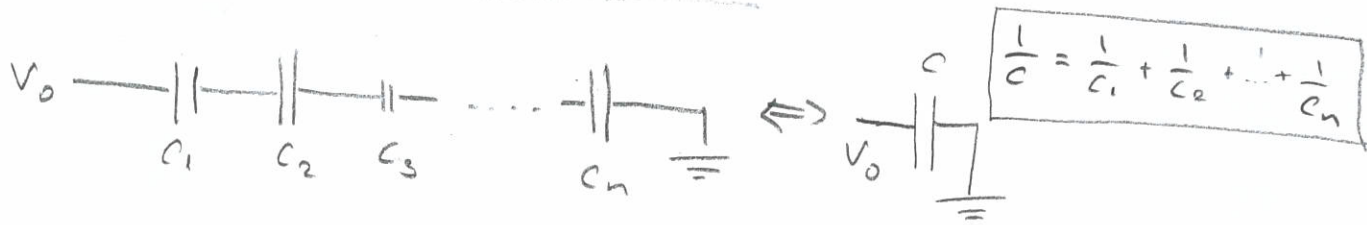
$t \neq 0 : I(t) = -C \frac{dV(t)}{dt} = \frac{V(t)}{R}$

$\Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = -\frac{1}{CR} V(t) \Rightarrow V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

PARALLELKOBLEDE KONDENSATORER

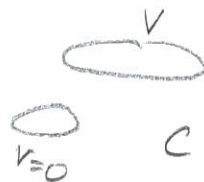


SERIEKOBLEDE KONDENSATORER



ENERGI I ELEKTRISKE FELT d.a

ENERGI I EN KONDENSATOR



$W = \frac{1}{2} C V^2 \quad (2.141)$

PARALLELLPLATEKONDENSATOR :

$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d$

ENERGITETTHET

I ELEKTRISKE FELT :

$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (2.143)$

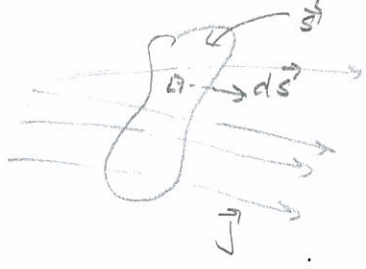
$\Rightarrow w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (2.144)$

STRØM & STRØMTETTHET (2.10)

Def STRØMTETTHET: $\vec{J} = Nq \vec{v}_d$ (2.155) ↖ driftshastighet
 ↳ antallstetthet av ladningsbærere $\cdot q$

Def. STRØM (av ladningsbærere gjennom et flateareal)

$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt}$ (2.157)



$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ (2.158)

Siemens ↗

ELEKTRISK LEDNINGSEVNE

σ : konduktivitet $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m}$

$\rho = \frac{1}{\sigma}$: resistivitet $[\rho] = \Omega m$

Ohms lov: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (2.160)

Generelt: $J_i = \sigma_{ij} E_j$

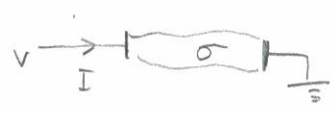
ENERGI TAP P.G.A. STRØM I LEDENDE MATERIALE

Pr volumenet:

$P_J = \vec{J} \cdot \vec{E}$ (2.162)

Ohmsk/Joulsk tap

RESISTANS



$R = \frac{V}{I}$ (2.163)

Effektforbruk i en resistans

$P_J = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$ (2.167)

LADNINGSBEVARELSE

$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$ (2.178)

$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$ (2.182)

1 EL-SMÅKRETJ [ingen endringer m/td]

$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

$\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Kirchhoffs strømlov:

$\sum_{i=1}^n I_i = 0$

OPPSUMMERING ENHETER I EL MAG

TFE 4120-2018 XX

Ligninger

Kraft: $F = ma = qE$

Arbeid/
energi: $W = \frac{1}{2}mv^2 = qV$

Kapasitans: $C = \frac{Q}{V}$

Strøm: $I = \frac{Q}{T}$

Resistans: $R = \frac{V}{I}$

Enheter

$$N = \text{kg m/s}^2 = C \frac{V}{m}$$

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = CV$$

$$F = \frac{C}{V}$$

$$A = \frac{C}{s}$$

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

GRUNNENHETER I SI-SYSTEMET: A, kg, m, s

AVLEDEDE ENHETER:

El-Mag:

$$C = As$$

$$V = \frac{\text{kg m}^2}{As^3}$$

$$F = \frac{A^2 s^4}{\text{kg m}^2}$$

$$\Omega = \frac{\text{kg m}^2}{A^2 s^3}$$

Generell:

$$N = \text{kg m/s}^2$$

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2$$

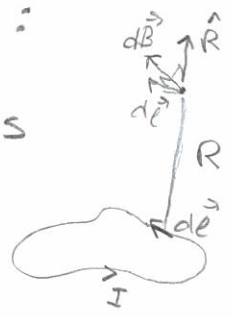
$$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3$$

Siemens $\rightarrow S = \frac{1}{\Omega}$

Magnetisk kraft (3.1)

MAGNETISK FLUKSTETTHET FRA LUKKET STRØMSLEDE: μ_0

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^2} \quad (3.2) \quad \leftarrow \text{Biot-Savart's lov}$$



Magnetisk permeabilitet: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2}$

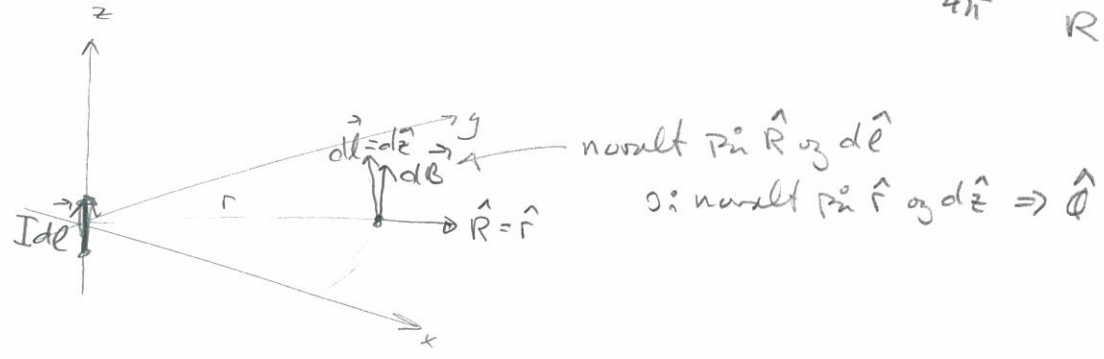
KRAFT PÅ ELEKTRISK LADNING, q, I BEVEGELSE:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.1) \quad [B] = T \text{ (Tesla)}$$

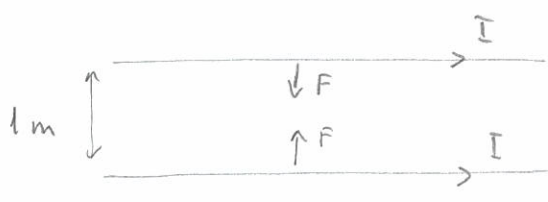
$$[B] = \frac{N}{C \frac{m}{s}} = \frac{N}{As \frac{m}{s}} = \frac{N}{Am}$$



FØR ET INFINITESIMALT STRØMELEMENT $\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^2}$



DEFINISJON AV AMPERE

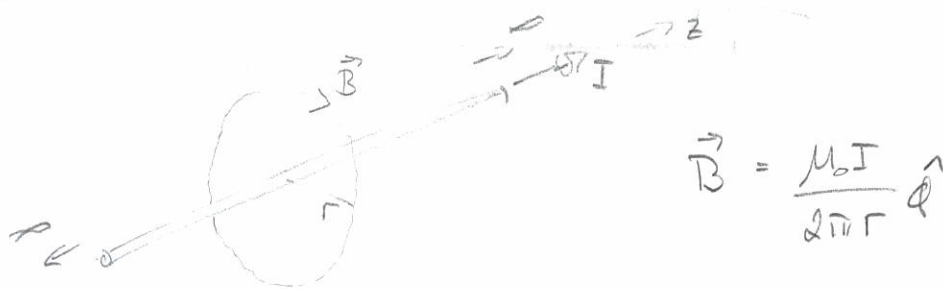


1A = Den strømmen som skal til for at tiltrekningen mellom to ledere i avstand 1m blir

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$$

(Pr lengdeenhet)

\vec{B} -felt RUMDT VENDINGA LANG LEDNING



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

10 meter unna
er \vec{B} -felt fra

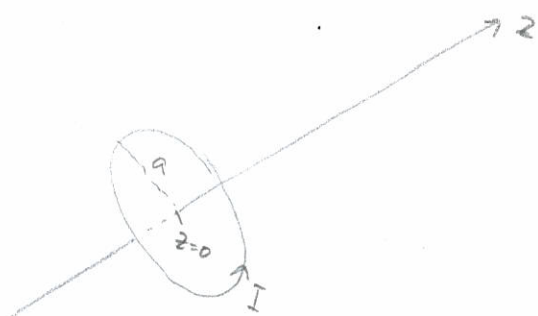
H4462ENT (1000A)

$$|B| \sim 2 \cdot 10^{-5} T \sim \frac{1}{2} B_{jord}$$

MAGNESIUMELEKTRO-
LYSEFABRIKKABLEVR
(200.000 A)

$$|B| \sim 4 mT \sim 100 B_{jord}$$

\vec{B} -felt FRA EN SIRKULÆR STRØM SLEIFE (= MAGNETISK DIPOL)



PÅ AKSEN:

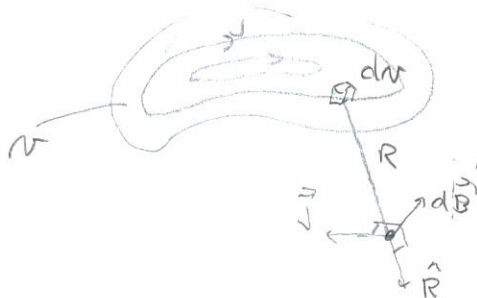
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$a = 1 \text{ cm}$$

$$I = 1 \text{ A}$$

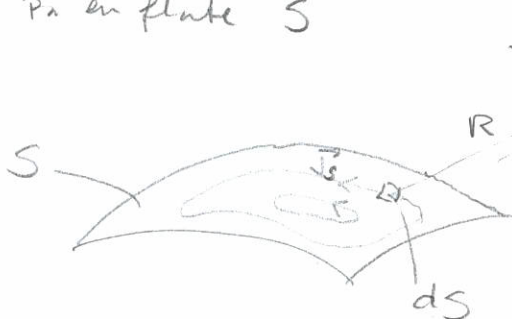
$$|B| \sim B_{jord} \text{ (midt i } \odot)$$

\vec{B} -felt på grunn av en STRØMTETTHET inni et volum V:



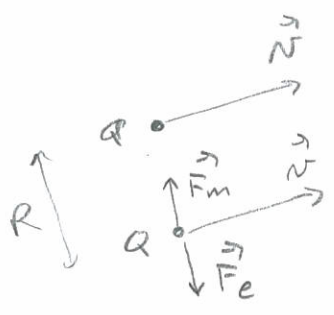
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dv \times \vec{R}}{R^3}$$

\vec{B} -felt på grunn av FLATESTRØMTETTHET på en flate S



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s dS \times \vec{R}}{R^2}$$

KVALITATIV SAMMENLIGNING AV STR PÅ ELEKTRISKE, MAGNETISKE KREFTER



$$F_m = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{4\pi R^2}$$

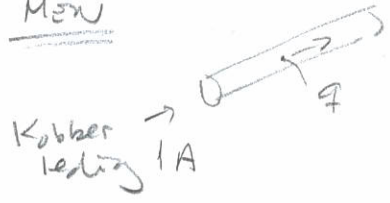
$$F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = \frac{1}{c^2}$
 Lyshastighet i vakuum

For to enkeltpartikler or $F_m \ll F_e$ med mindre de beveger seg opp mot relativistisk hastighet

Men

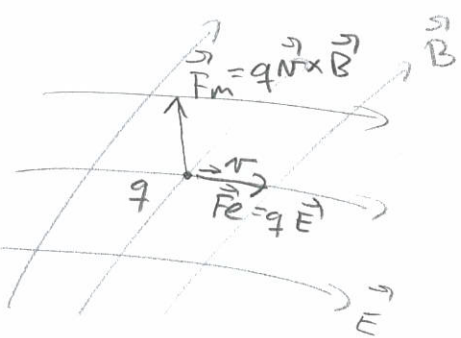


$v = 10^{-3} \text{ m/s}$

$N = 8.45 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3$

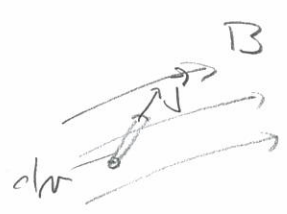
Selv om $\frac{F_m}{F_e} \sim 10^{-21}$ får vi signifikante magnetiske krefter selv for ladninger med små hastigheter.

LORENTZ - KRAFTEN



$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.18)$$

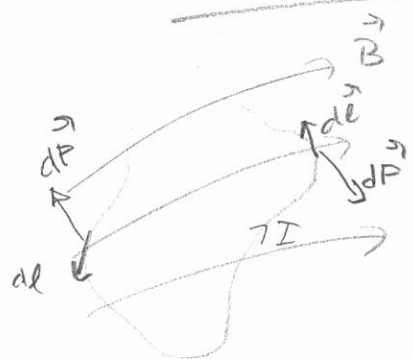
MAGN KRAFT PÅ STRØMELEMENT



$$d\vec{F} = \vec{J} d\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.19)$$

$$= I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.20)$$

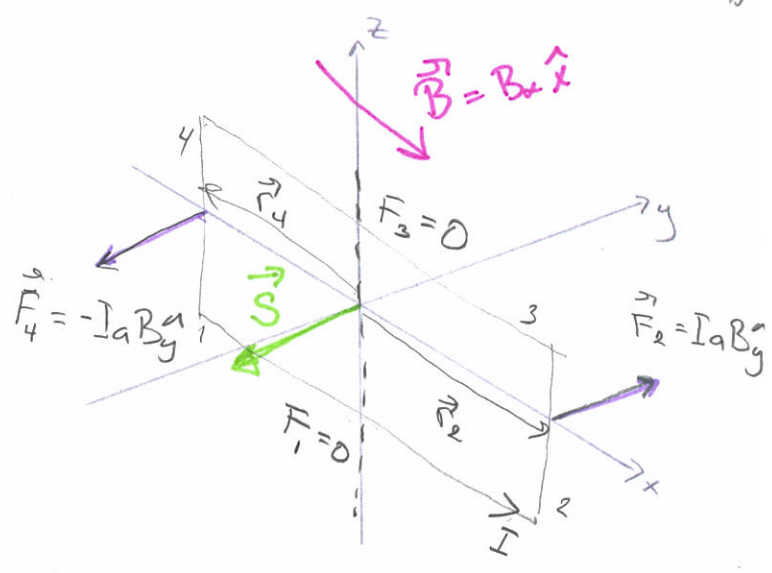
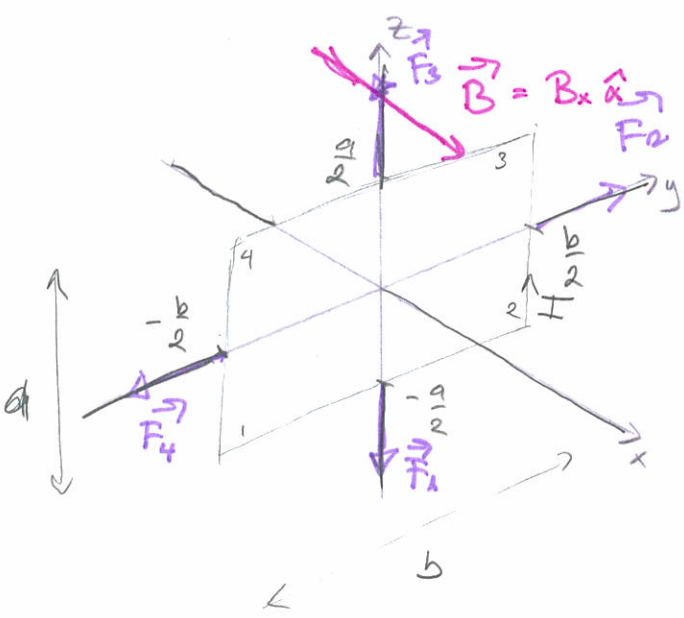
MAGN. KRAFT PÅ STRØMSLØYFE



$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.21)$$

Kan ha netto kraft?
Kan ha moment!

\vec{B} -FELT!



$$\vec{F}_1 = I b \hat{y} \times B_x \hat{x} = -I b B_x \hat{z} = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_2 = I a \hat{z} \times B_x \hat{x} = I a B_x \hat{y} = -\vec{F}_4$$

Netto kraft = 0
Dreiemoment = 0

Netto kraft = 0
Dreiemoment $\neq 0$

$$\vec{T} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

$$= \frac{b}{2} \hat{x} \times I a B_x \hat{y} + \left(-\frac{b}{2} \hat{x}\right) \times \left(-I a B_x \hat{y}\right)$$

$$= ab I B_x \hat{z}$$

Definerer magnetisk moment (dipolmoment) til sløjfen:

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

↳ længde: arealet til sløjfen

retningen: "højrehandsregel"

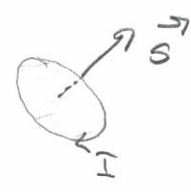
$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

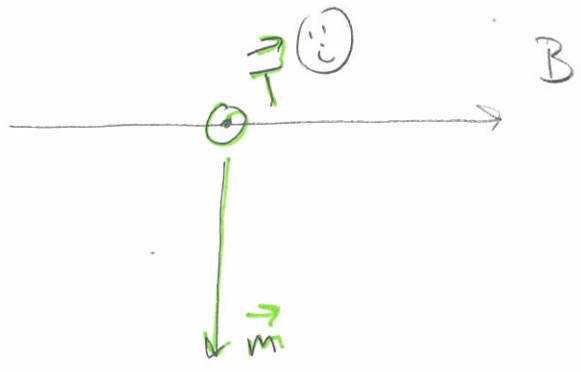
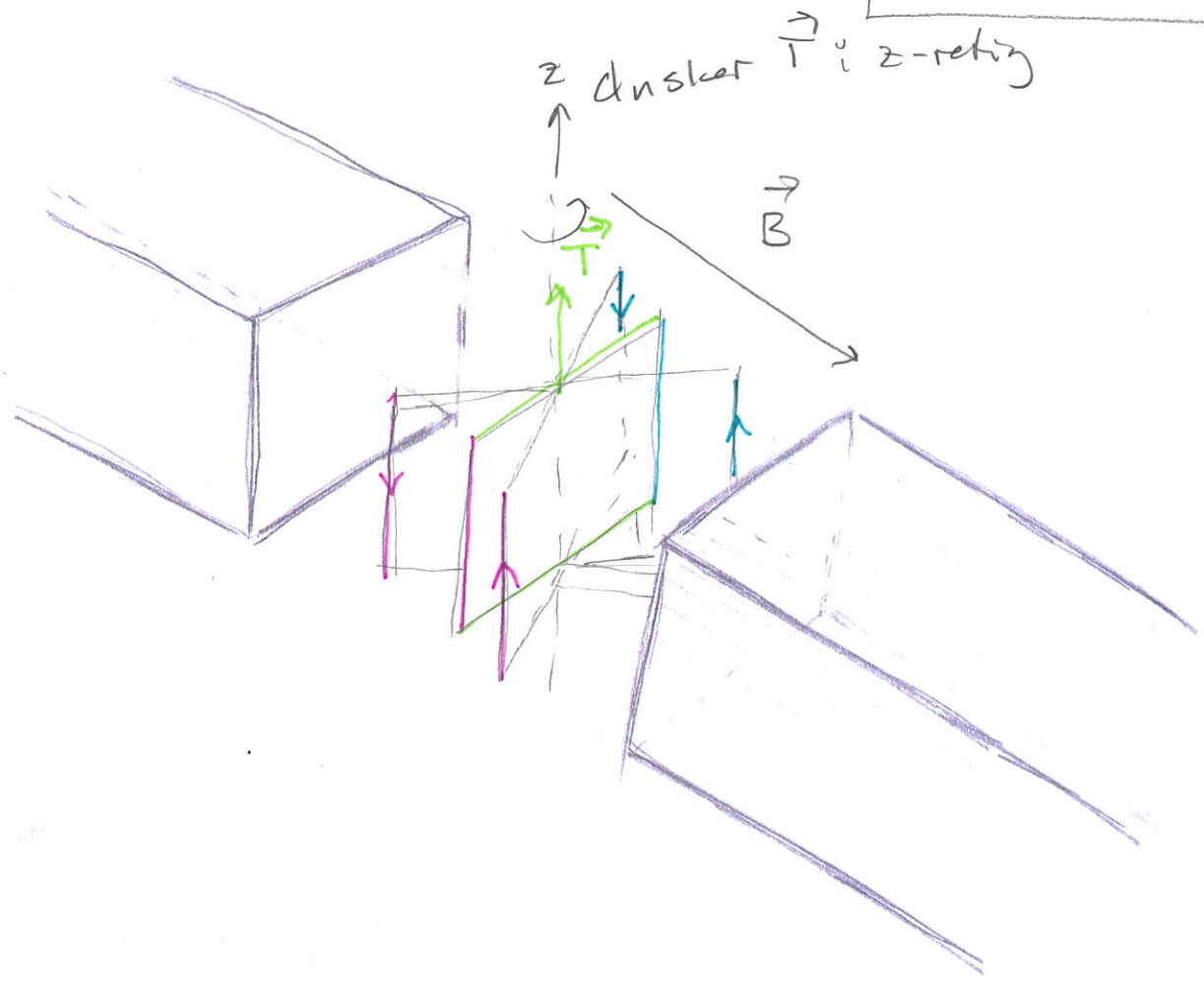
$$= I \vec{S} \times \vec{B}$$

eksemplet vort:

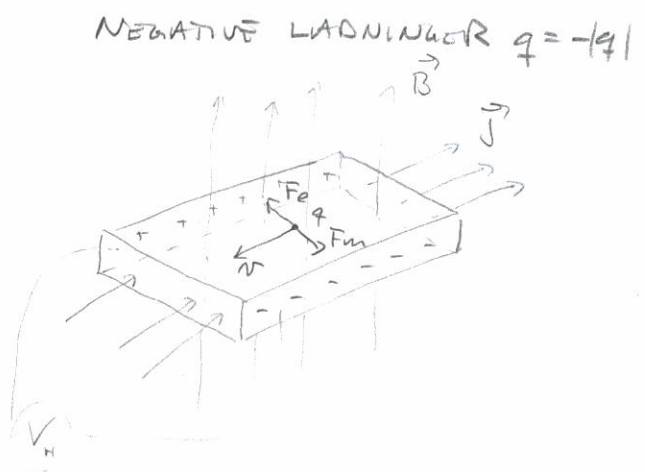
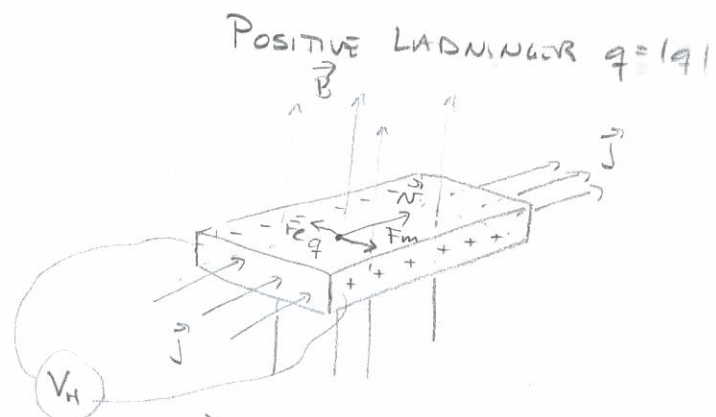
$$\vec{T} = I (-ab \hat{y}) \times B_x \hat{x}$$

$$= I a b B_x \hat{z}$$





HALL-EFFEKT



$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{F}_e = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = n\vec{B} \quad \text{✓ Likevekt}$$

$$V_H = \vec{E}a = naB$$

$$V_H = -naB$$

↳ motsatt fortegn på spenning

MAGNETISK FLUKS



$$\Phi_s = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (3.36)$$



$$\Phi_s = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.37)$$

For \vec{B} som oppfyller Biot-Savarts lov

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.39)$$

Maxwell # 4
 ⇒ MAGNETISKE MONOPOLER
 FINNS IKKE (☹)

VEKTORPOTENSIAL (\vec{A})

Siden $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ Overalt

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

For vektorpotensialet gjelder da:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} dV}{r} \quad (3.42)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dV}{r}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{e}}{r}$$

AMPÈRE'S LOV FOR KONSTANTE STRØMMER (3.4)

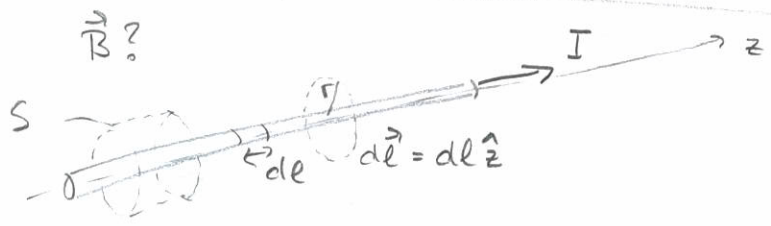


Sirkulasjon av magnetisk flukstetthet rundt en lukket sløyte

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

Total strøm gjennom S

\vec{B} -FELT RUNDT LANG, RETT STRØMFØRANDE LEDER



Symmetribetraktninger:

1) Biot-Savart's lov $d\vec{B} \propto d\vec{\ell} \times \hat{r}$
 $\Rightarrow d\vec{B} \perp \hat{z} \Rightarrow B_z = 0$

2) Sylinderflate S; hvis $B_r \neq 0$

$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \neq 0 \Rightarrow B_r = 0$
 Lilleok

3) B_ϕ ? : må være symmetrisk & uavhengig av ϕ & z
 $\vec{B} = B_\phi(r) \hat{\phi}$

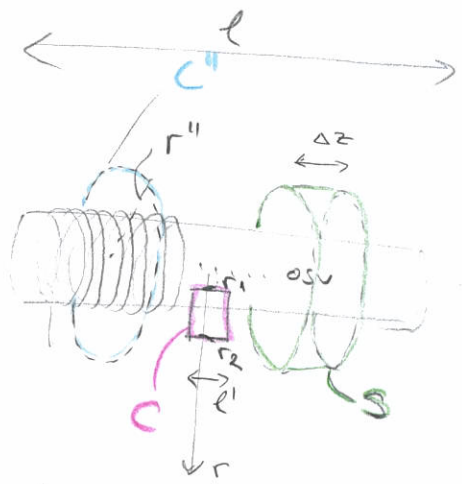
BRUK Ampère's lov på sløyta C

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$\Rightarrow B_\phi(r = \text{konst}) \int_C dl = B_\phi 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$

B-FELT RUMDT SOLENOIDENE

Antar: Solenoiden er ∞ lang
 Ellers vi er langt fra endepunktene



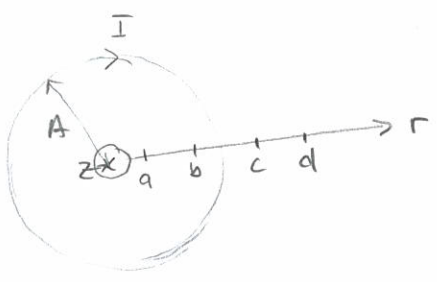
#viklinger: N
 Avstand mellom viklinger: $\Delta = \frac{l}{N}$

Symmetri betraktninger:

1) Antar $B_\phi \neq 0$, må ha B_ϕ uavhengig av ϕ
 Bruk Ampère's lov på sløyte C'' \rightarrow Parallel med strøm i høyre \Rightarrow gir ingen strøm gjennom C''
 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B_\phi r'' d\phi = 2\pi B_\phi r'' = \mu_0 I = 0 \Rightarrow B_\phi = 0$

2) Antar $B_r \neq 0$, må være uavh. av ϕ
 Bruk: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_r \int dS + \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ (må være)
 Sylindervegger $\int dS$ Endeflater $= 0$ hvis $\Delta z \rightarrow 0$
 $\Rightarrow B_r = 0$

1) + 2) $\Rightarrow \vec{B} = B(r) \hat{z}$



Bruk Ampère's lov på integrasjons sløyte C:

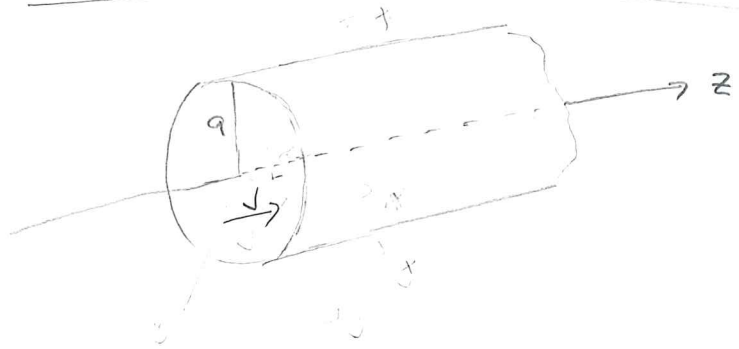
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$r_1 = a, r_2 = b$: hele ∞ solenoiden \Rightarrow ingen strøm gjennom C
 $B_z(a)l - B_z(b)l = 0 \Rightarrow B_z(r) = \text{konstant} = B_z$ for $r < A$

$r_1 = b, r_2 = c$:
 $B_z l - B_z(c)l = \mu_0 \frac{l}{\Delta} I \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{\Delta} = \frac{\mu_0 I}{l} N$ for $r < A$

$r_1 = c, r_2 = d$:
 $B_z(c) - B_z(d) = 0 \Rightarrow B_z(r) = \text{konstant} = 0$ for $r > A$
 $\Rightarrow B = 0$ når $r \rightarrow \infty$

\vec{B} -felt INN I EN STRØMFØRANDE LEDER



Strømteitet inn i ledere:

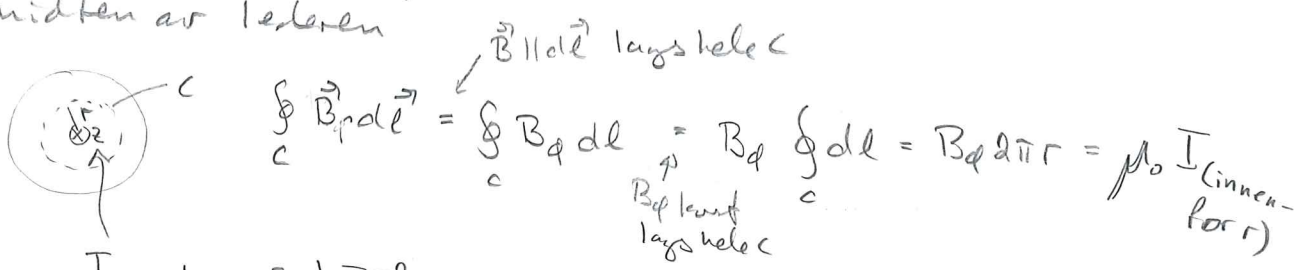
$$\vec{J} = \begin{cases} J_0 \hat{z}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$
 Konstant (1)

ANALYSE AV SYMMETRIER I \vec{B} -felt

- 1) Må være uavhengig av ϕ (symmetri)
- 2) Kan ikke ha z-komponent ($d\vec{B} \propto \vec{J} \times \hat{r} \Rightarrow d\vec{B} \perp \vec{J} = J_0 \hat{z}$)
- 3) Kan ikke ha r -komponent ($\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_r \int ds \neq 0$ ikke ok)

$\Rightarrow \vec{B} = B(r) \hat{\phi}$

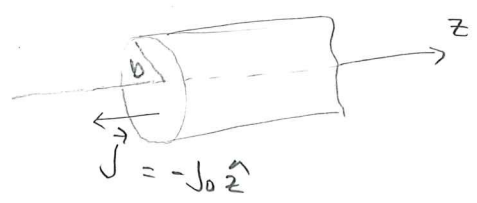
Bruk Ampère's lov på en sirkel med radius r sentrert i midten av ledere



$B_{\phi} 2\pi r = \mu_0 J_0 \pi r^2$

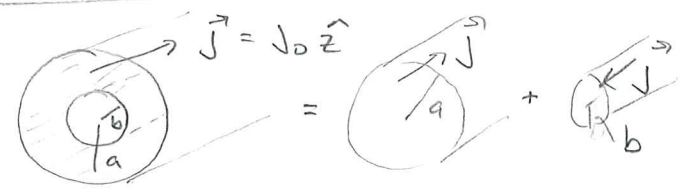
$B_{\phi} = \frac{\mu_0}{2} J_0 r$

NY LEDER MED STRØM I ANDRE RETNING MEN SAMME STRØMTETTHET (1)



$\Rightarrow B_{\phi, b} = -\frac{\mu_0}{2} J_0 r$

LEDER MED HULL I MIDTEN

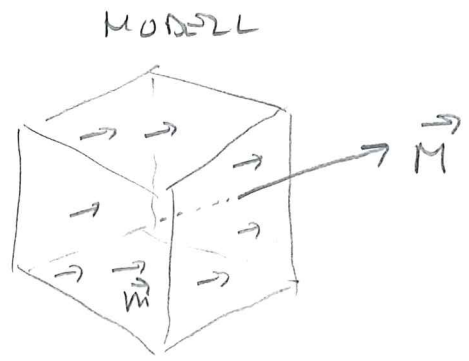
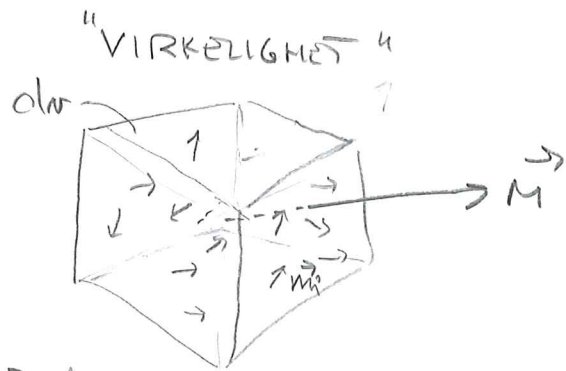


$\Rightarrow \vec{B}$ inn i hullet
 $= B_{\phi, a} + B_{\phi, b} = \underline{\underline{0}}$ (1)

MAGNETISKE FELT I MATERIALER

Materialer kan bestå av molekyler / atomer som har dipolmoment. Hva skjer ved Amperes lov i slike materialer?

Trenger en modell for å kunne regne på dette



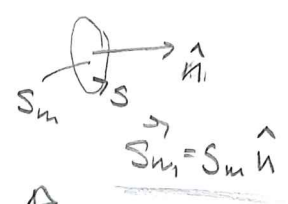
Definerer MAGNETISERING:

$$\vec{M} = \frac{\sum_{dV} \vec{M}_i}{dV} \quad (3.76)$$

$$\vec{M} = N \vec{m} \quad (3.77)$$

Lantall magn. dipoler pr volum enhet.

$$V \vec{m} = I \vec{S}_m$$



SE PÅ MATERIALE m / "PRI" / "MAKROSKOPISK" STRØMTETTHET \vec{J} + MAGNETISERING \vec{M} BESKREVET AV MODELLEN \vec{M}

⇒ Amperes lov:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 [I_{fri} + I_{magn. dipoler}]$$

$$= \mu_0 [\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_C \vec{M} \cdot d\vec{e}]$$

DEF \vec{H} -FELT:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (3.85)$$

Ampere's lov for materialer

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad 3.84$$

Maxwell #2
← integral form

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad 3.89$$

← differential form

For mange materialer gjelder

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Materialer hvor dette er tilfelle er LINJÆRE

↳ magnetisk susceptibilitet

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

μ_r :
relativ
permeabilitet

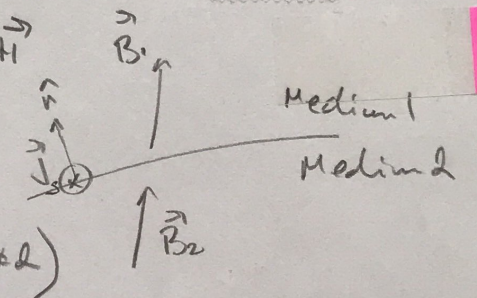
absolutt
permeabilitet

Materiale	Rel. permeabilitet	Materiale	Rel. permeabilitet
gull	0.99996	luft	1.0000004
sølv	0.99997	aluminium	1.00002
kobber	0.999991	jern + 4% silisium	7000
vann	0.999991	rent jern (0.04% forurensn.)	$2 \cdot 10^5$
tre	0.999995	supermalloy	$\sim 10^6$
vakuum	1		

GRENSEBETINGELSE FOR \vec{B} OG \vec{H}

$B_{1n} = B_{2n}$ (Vises fra Maxwell #4)

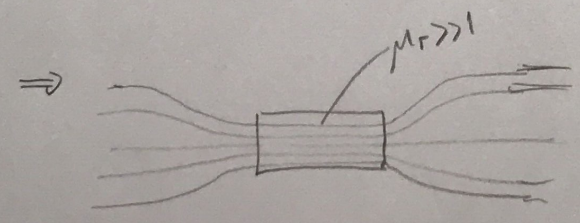
$\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{J}_s \times \hat{n}$ (Vises fra Maxwell #2)



12/3
2018

$$\Rightarrow \frac{|\vec{B}_{1t}|^2}{|\vec{B}_{2t}|^2} = \frac{B_{2n}^2 + \mu_0^2 H_{2t}^2}{B_{2n}^2 + \mu_0^2 \mu_r^2 H_{2t}^2}$$

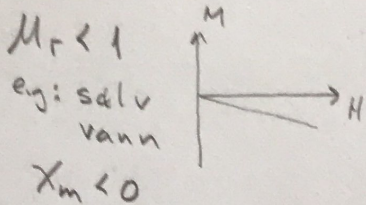
For
- små normalkomp. $\Rightarrow \frac{|B_{1t}|}{|B_{2t}|} \sim \frac{1}{\mu_r} \ll 1$
- $\mu_r \gg 1$



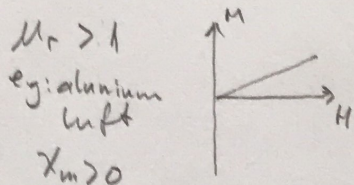
Et materiale med $\mu_r \gg 1$ vil "fange" \vec{B} -feltlinjene

MAGNETISKE MATERIALER (3.7)

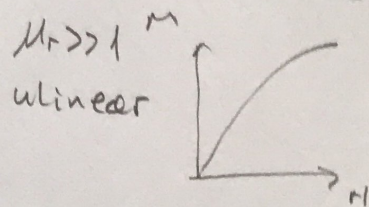
DIAMAGNETISK MAT.



PARAMAGNETISK MAT.



FERROMAGNETISK MAT.



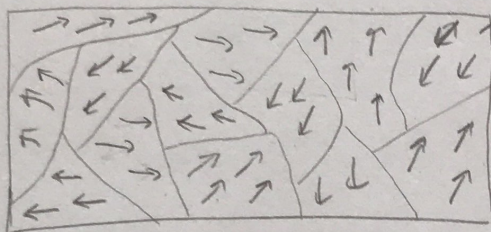
Lineære materialer

$\mu_r \approx 1$

μ_{eff} også avh. av "historie"

⇒ MAGN HYSERESE

Ferromagnetiske materialer



Weiss domener

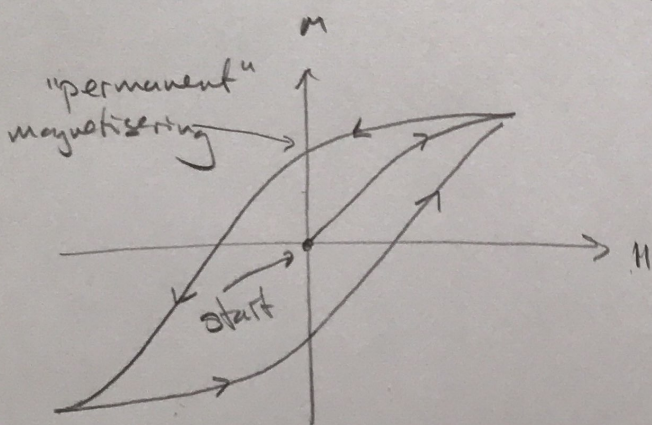
→ Lokal magnetisering i små domener på grunn av kvantemekaniske effekter.

→ Nabo domener tenderer til å ha motsatt rettet magnetisering

→ Påtrykt felt vil øke størrelsen på domener magnetisert parallelt med feltet

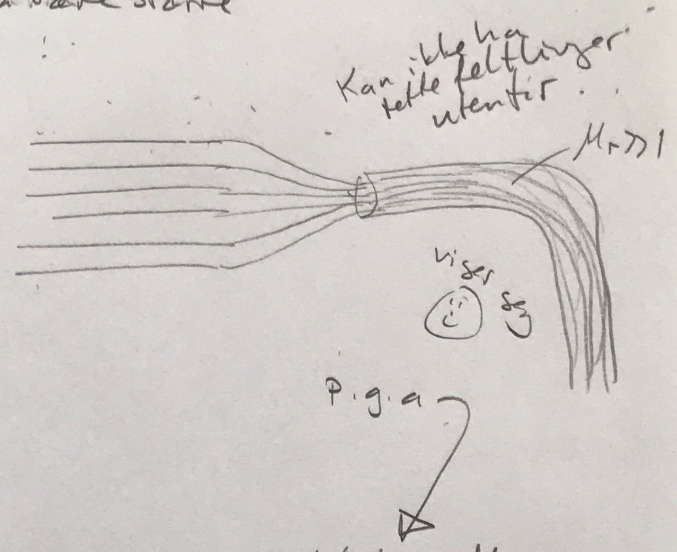
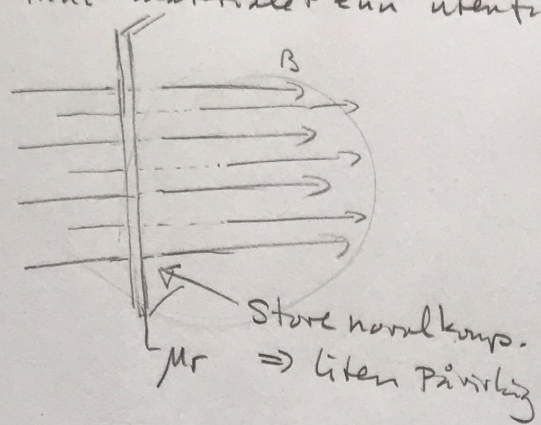
→ Når feltet skrues av tar det litt tid før magnetiseringen er tilbake til utgangspunktet

Hysteresekurve



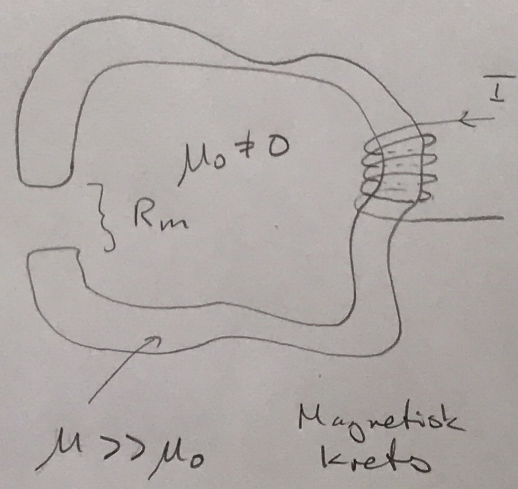
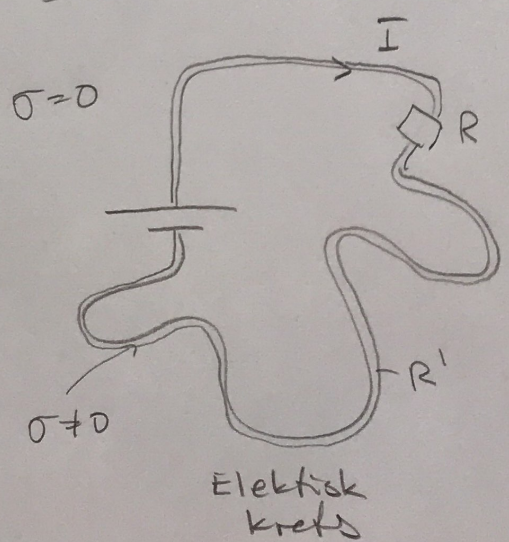
MAGNETISKE KRETSLØR

Grensebetingelsene for $B \approx \mu H$ note:
 små normal komponent $\rightarrow B$ må være større
 inn i materialet enn utenfor:



SAMMENLIGNING AV SAMMENHENGER FOR ELEKTISKE OG MAGN. STRØMRETTET:

	ELEKTRISK		MAGNETISK	
Strømtetthet	\vec{J}	I	\vec{B}	Magn. fluks tetthet
Strøm	$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$	II	$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	Magn. fluks
For konstante strømmer:	$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$	III	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	Alltid !!
	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	IV	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	
	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{emf}$	V	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$	
Resistans:	R	VI	R_m	Reluktans



Emf = elektromotorisk spenning

Summen av alle elektriske krefter som virker på ladningene i kretsen

$$e = \oint_{\text{krets}} \vec{f} \cdot d\vec{l} \quad (4.1) \quad \text{elektrostatisk!}$$

Hvor: \vec{f} = (ekstern) kraft pr ladning

→ emf:

"alt som vil bidra som kilder i kretsen og få elektroner (ladningsbærere) til å bevege seg rundt i kretsen ⇒ strøm 😊"

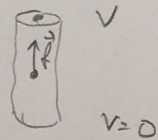
I elektrodynamikk kan $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$

⇒ må ta med bidrag fra \vec{E} til elektromotorisk spenning:

$$e = \oint_{\text{krets}} (\vec{f} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} \quad (4.3)$$

Eks

I et batteri virker det en elektrokemisk kraft på ladningene i batteriet som gir en potensialforskjell mellom batteripolene: V

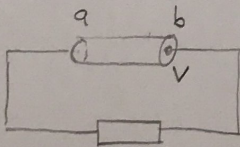


Denne må være (pr ladning)

$$\vec{f} = -\vec{E}$$

Hvor \vec{E} = feltet inne i batteriet p.g.a ladningsseparasjon:

Hvis batteriet står i en krets, hva blir da emf i denne kretsen?

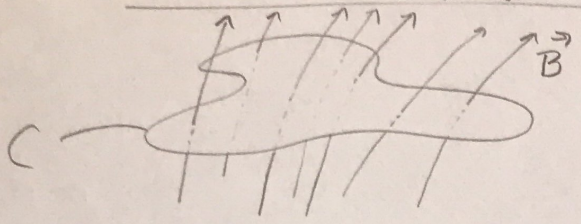


$$\begin{aligned} e &= \oint_{\text{krets}} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{batter}} \vec{f} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{resten av kretsen}} \vec{f} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^b \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_a^b (-\vec{E}) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{er ingen elektriske krefter der}) \\ &= \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = V \end{aligned}$$

↑ definisjonen av potensialforskjell

⇒ emf: $e = V$ 😊

FARADAY'S INDUKSJONSLOV

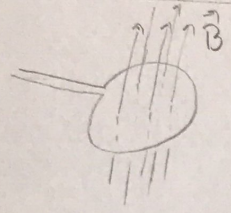


Integral form:

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{f} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.8)$$

Differential form: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (4.14) Maxwell #3

FARADAY'S LOV FOR EN SPOLE MED N VIKLINGER



Fluks i vikling nr i: $\Phi_i \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}$

N-viklinger:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \sum_N \Phi_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.11)$$

Φ : total fluks
 $= \sum_{i=1}^N \Phi_i$

Hvis lik fluks i alle vinkl:

$\Phi = N \Phi_i$

↑
 fluks i en av vinkl.

FOR EN KRETZ MED

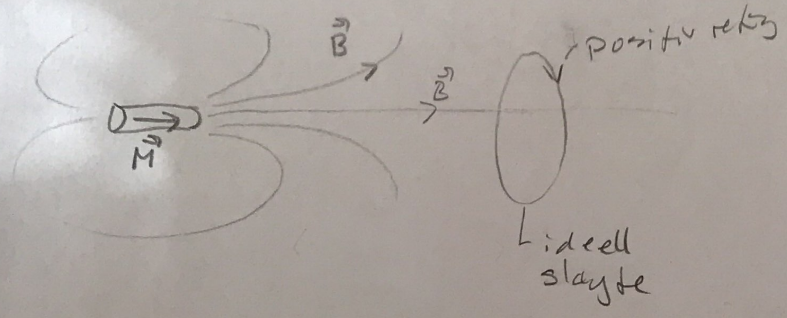
- ideell spenningskilde / batteri w/ total potensial V_b
- Komponenter w/ potensial fall, $V_{comp i}$

$$\Rightarrow V_b - \sum_i V_{comp i} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.20)$$

19/3
2018

LENTZ' LOV

"LEDENDE SLUJFER ER KONSERVATIVE OG LIKER IKKE ENDRING"

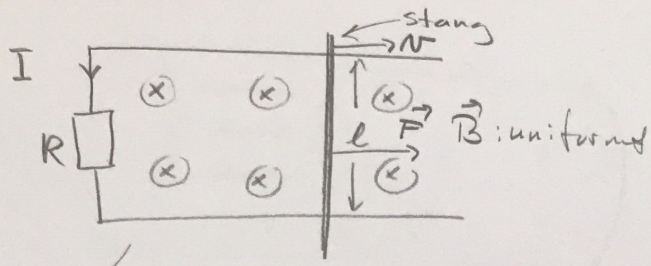


Når disse to nærer seg hverandre øker fluksen gjennom sløyta

$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$

\Rightarrow Det induseres en strøm i negativ retning som vil forsøke å motvirke fluksestigning

EKS: Kraft på bevegelig stang i \vec{B} -felt



- 1) Strøm i sløyten?
- 2) Effekten: motstanden R?

Krets: $\sum \text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = RI$

1) Vi finne fluxendring for å finne strømmen I:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = -BS$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{ds}{dt} = Blv$$

$$I = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}$$

2) Effekt: motstanden:

$$P = RI^2 = \frac{(Blv)^2}{R}$$

How kommer denne fra?

Kraft på stanga p.g.a strømmen I og \vec{B} -feltet:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

virker normalt på hverandre mot venstre

For at stanga skal bevege seg med konstant hastighet, må kraften \vec{F} som trekker på den være lik

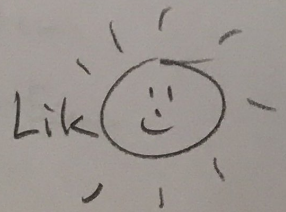
$$|\vec{F}_m| = \left| \int d\vec{F}_m \right| = I l B$$

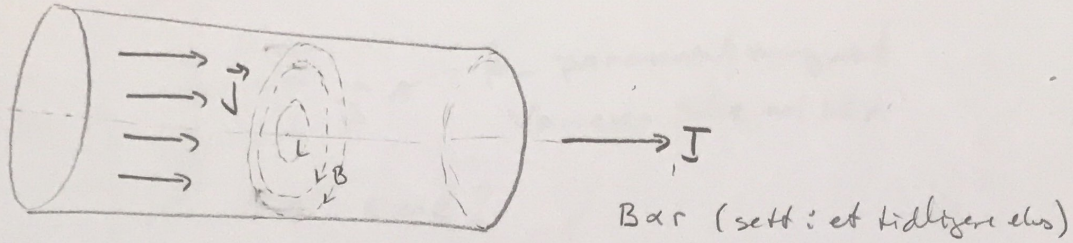
\Rightarrow Arbeidet som utføres av \vec{F} i løpet av tiden dt :

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = I l B v dt$$

\Rightarrow Effekten:

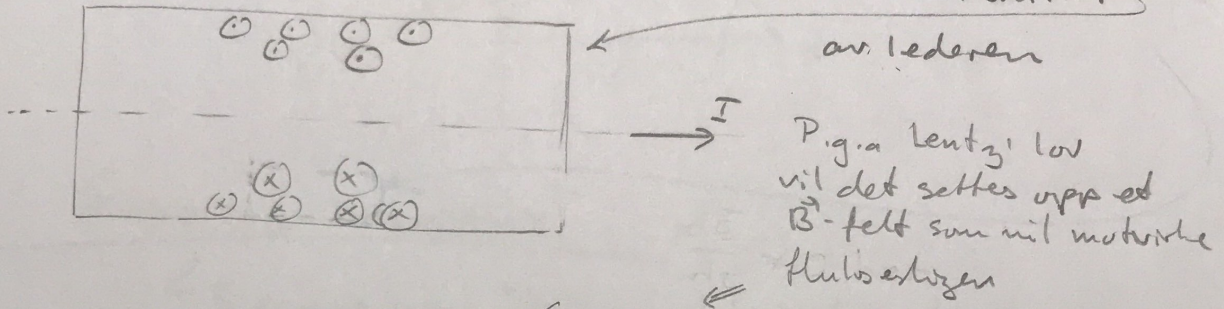
$$P = \frac{W}{dt} = I l B v = \frac{(Blv)^2}{R}$$





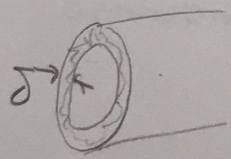
Anta uniform strømfordeling
 $\Rightarrow \vec{B}$ som sirkulerer

Hvis \vec{J} er vekselstrøm \Rightarrow Fluksendring gjennom flater parallelt med tverrsnittet av lederen



Genereres en strøm motsatt rettet \vec{I}
 Vil søke å oppri $\vec{B} = 0$ inne i lederen, for da vil ikke tidsvariasjonen i \vec{I} gi noen fluksendring midt i lederen
 Strømmen vil konsentreres rundt kanten av lederen.

Heter: SKINNEFFEKT



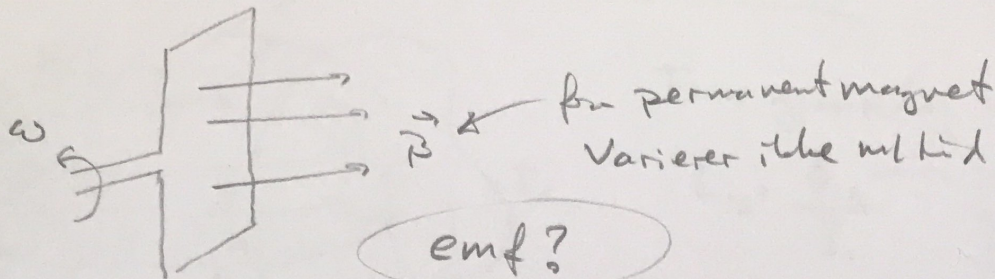
Kan regne på at tykkelsen på det strømferende sjiktet er gitt av:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0}}$$

↑
frelvansen

For Cu:

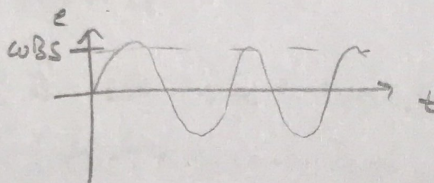
- nett-frelvns $\rightarrow f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow \delta = 1 \text{ cm}$
- radio-frelvns $\rightarrow f = 100 \text{ MHz} \Rightarrow \delta = 5 \mu\text{m}$



emf?

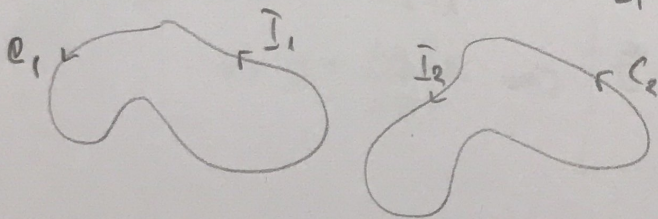
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \vec{B} \cdot \int_S d\vec{s} = \vec{B} \cdot \vec{s} = BS \cos \omega t$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin \omega t$$



GLÆDSIDIG INDUKTANS

↳ Siemne om: "Hvor nært koblet er to spoler, magnetisk sett"



DEFINERER:

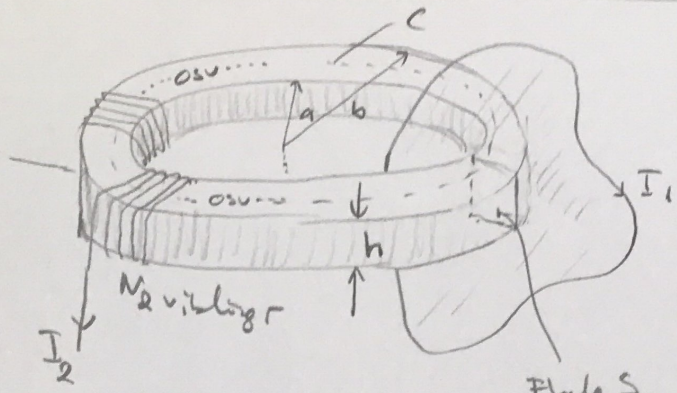
$$\Phi_{12} = \text{Total flux i sløjfe 2 p.g. a } I_1$$

GLÆDSIDIG INDUKTANS: $L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$

Blir uafhængig af I_1 . Kun afhængig af geometri og materialparametre (analogt til kapacitans)

DET VISER SEG: $L_{12} = L_{21}$ (vises i en øving)

EKS: TOROIDE M/ REKTANGULÆRT TVÆRSNITT



Finne gjensidig induktans L_{12}

$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$ → Total fluks: $2 \pi \cdot a$
 "vanstelt" strømslette $I_1 \Rightarrow \mu N_1 I_1$

$M \leftrightarrow N$

Flate S som defineres av en flate omsluttet av strømsløyfen I_1

$L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$ ← lettere å regne ut

I_2 vil generere et \vec{B} -felt inne i toroiden \Rightarrow fluks gjennom flaten S Φ_{21} (fluks gjennom I_1 på grunn av I_2)

Må finne \vec{B} -feltet

- 1) Ampère's lov på integrasjons sløyfe C : $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{e} = I_{fri} = N_2 I_2$
- 2) Symmetri $\Rightarrow \vec{H}(r) = H(r) \hat{\phi}$

3) $H \cdot 2\pi r = N_2 I_2$
 $\Rightarrow H = \frac{N_2 I_2}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu N_2 I_2}{2\pi r} \hat{\phi}$

4) Finne fluksen gjennom $I_1 =$ fluksen gjennom S (felt utenfor toroiden = 0)
 $\Phi_{21} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = h \int_a^b \frac{\mu N_2 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu h N_2 I_2}{2\pi} \ln b/a$

5) Gjensidig induktans : $L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu h N_2}{2\pi} \ln b/a$

Generelt finner vi

$L_{21} = \mu \cdot \text{"geometri"} \cdot N_1 \cdot N_2$

Gjensidig induktans:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$



$$e_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \frac{d}{dt} (L_{12} I_1) = - L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

↑ induert emf i sløyfe 2 pga. feltet fra strømmen I_1 (Faradays lov)

Selvinduktans:

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

← tot fluks i sløyfa/spolen pga strømmen i den samme sløyfa.



For spole med N vindinger: " $L = \mu \cdot \text{geometri} \cdot N^2$ "

Lagret energi i en spole:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

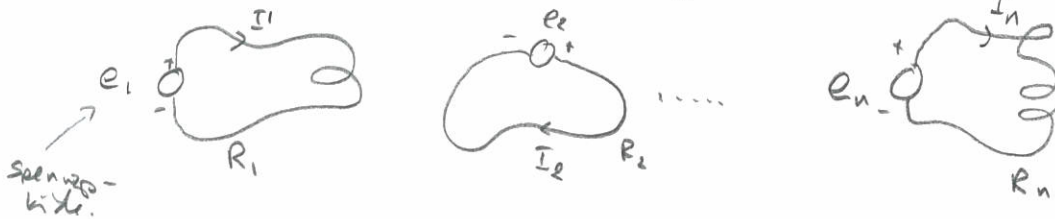
Energitetthet i magnetiske felt:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (\text{energi/volum})$$

ENERGI I MAGNETISKE FELT

9/4
2018

System av spoler / strømledere



Total induisert elektromotorisk spenning i lagte #j:

$$\sum \text{emf} = e_j + \left(-\frac{d\Phi_j}{dt}\right) = R_j I_j$$

Effekt levert av spenningskilde j: $e_j I_j$

\Rightarrow Arbeid utført av spenningskilde j i løpet av tiden dt:

$$dA_j = e_j I_j dt = \underbrace{R_j I_j^2 dt}_{\text{Joulsk tap i motstanden}} + \underbrace{I_j d\Phi_j}_{\text{Arbeid utført for å endre fluxen med } d\Phi_j}$$

Arbeid som trengs for å endre fluxen: ALLE kretser

$$dA_m = \sum_{j=1}^n I_j d\Phi_j \quad \text{Gjelder generelt}$$

For lineære medier: $d\Phi_j = \sum_{k=1}^n L_{kj} dI_k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dA_m &= \sum_{j=1}^n I_j \sum_{k=1}^n L_{kj} dI_k \\ &\stackrel{\text{(regler)}}{=} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n L_{kj} I_j \right] dI_k \\ &= \frac{\partial W_m}{\partial I_k} \quad \text{hvis} \end{aligned}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j$$

Viser seg at dette er energien som skal til for å etablere alle strømmene I_j i alle strømledere

= LAGRET MAGNETISK ENERGI I SYSTEMET!

VED Å REGNE PÅ MAGNETISK ENERGI TIL EN TOROIDE KAN EN FINNE

Energitettheten til et magnetisk felt:

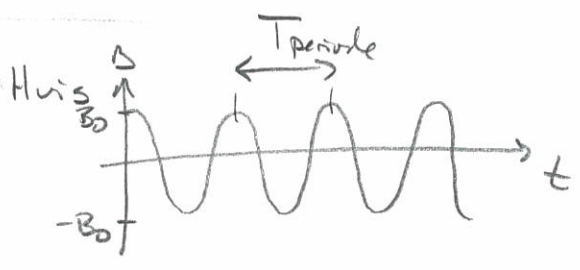
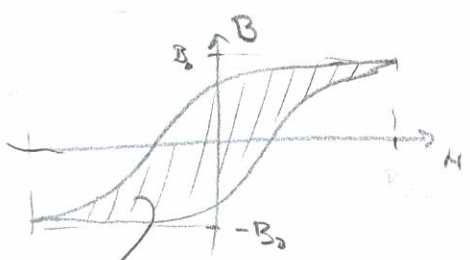
$$w_m = \frac{W_{m, \text{toroide}}}{V_{\text{toroide}}} = \frac{\frac{1}{2} L_{\text{tor.}} I^2}{V_{\text{tor.}}} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Dette gjelder generelt for \vec{B} -felt!

MED IKKE-LINEÆRT MATERIALE I TOROIDEN

Kan ikke bruke $w_m = \frac{1}{2} LI^2$ & gjelder bare for lineære materialer

$$\frac{\text{Tilført magnetisk energi}}{\text{volum}} = H dB$$



A
(Arealen innover)

$$\Rightarrow \frac{\text{energitap}}{\text{volum}} = \oint H dB = A$$

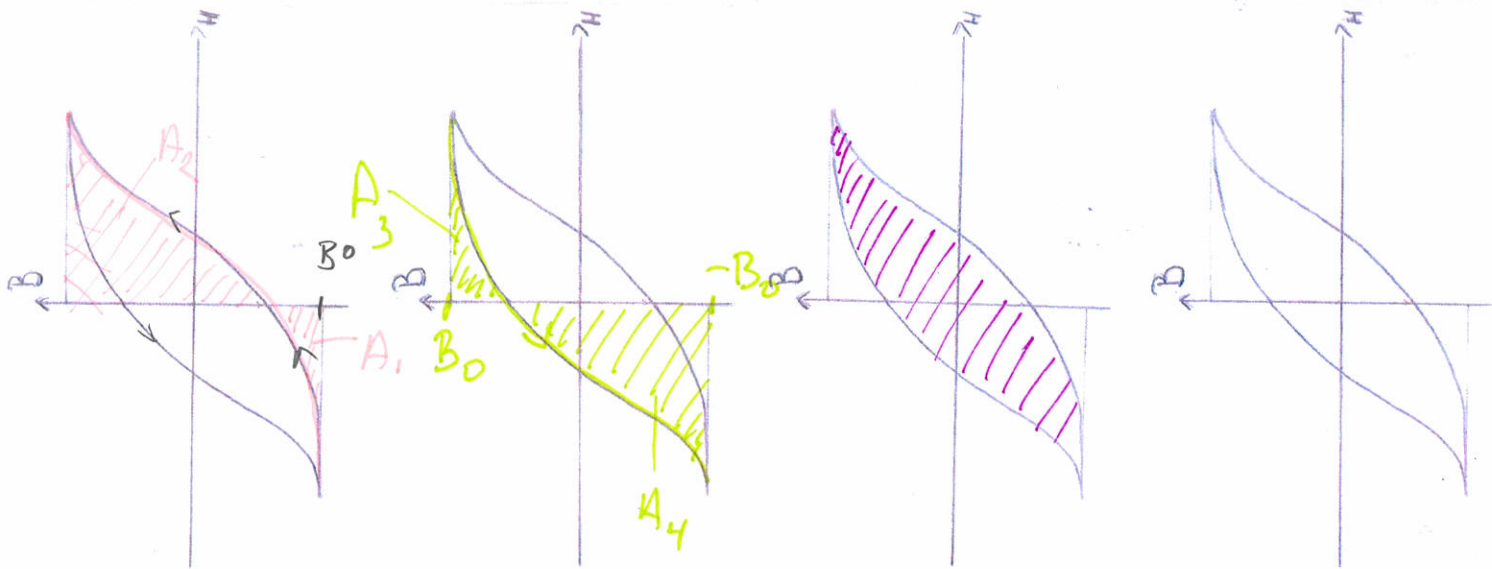
hysteresis-
kurven

$$\frac{\text{effekttap}}{\text{volum}} = \frac{\text{energitap/volum}}{\text{tid}} = \frac{A}{T_{\text{periode}}} = A \cdot f$$

↑ felnes

Høy felnes = høyt effekttap

[Kort å vite hvis en skal lage en induktans topp....]



Tilført energi
 Volum = $\oint H dB$

Variere B fra $-B_0$ til B_0

$$\int_{-B_0}^{B_0} H dB = -A_1 + A_2$$

Variere H fra B_0 til $-B_0$

$$\int_{B_0}^{-B_0} H dB = -A_3 + A_4$$

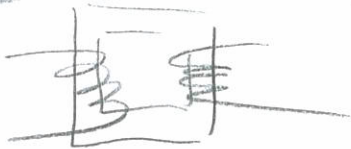
Tilført (= tappet)
 magnetiske
 energi er
 en "pude"

Volumet = $\oint H dB$

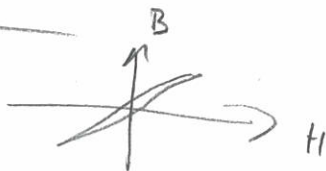
= $A_2 + A_4 + A_1 - A_3$

= arealet innenfor
 hystereseløp.

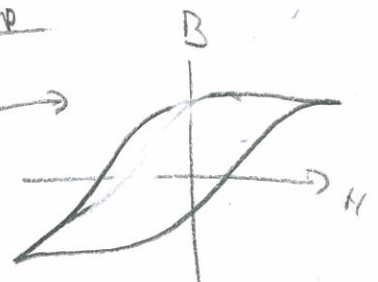
Transformator



Φ skifter løst
 og gir $\dot{\Phi}$



Koplet til
 induktansstørrelse



Endrer \dot{H} og
 energi tap

\Rightarrow mer varme (☹)

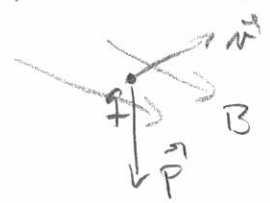
KREFTER I MAGNETISKE FELT

10/4
2018

Har tidligere regnet på kraft som virker på bevegelig ladd partikkel i et magnetfelt:

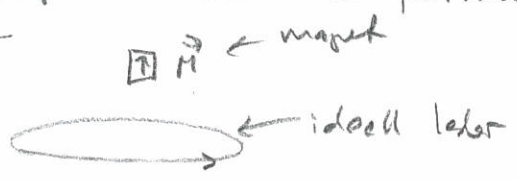
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$



Hva med krefter mellom to permanent magneter?

TAPSRITT SYSTEM:



Antar at systemet virker på magneten med en kraft \vec{F} som gir en forflytning z -retning

Arbeid utført av "systemet":

$$dA_m = \text{kraft} \cdot \text{vei}$$

$$= F_m \cdot dz \hat{z}$$

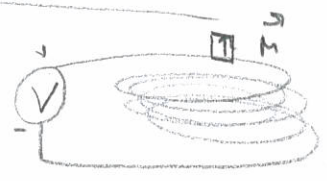
$$= F_{mz} \cdot dz$$

$$= -dW_m$$

utført arbeid når helde energi fra systemet

$$\Rightarrow \vec{F}_m = -\nabla W_m \quad (4.119)$$

SYSTEM M/ KILDER:



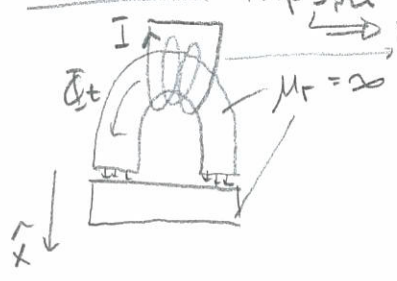
1) Mechanisk arbeid på grunn forflytning: $dA_{\text{mech}} = \vec{F} \cdot d\vec{x}$

2) Kilden utfører et arbeid $dA_m = \sum_j I_j d\Phi_j$

1+2 \Rightarrow Endring i energien til systemet

$$dW_m = dA_m - dA_{\text{mech}} \Rightarrow \vec{F} = \nabla W_m$$

Eks 4.17 Tapsløse elektromagnet



Resultat:
$$\vec{F}_m = -\nabla W_m = -\frac{\Phi_t^2}{\mu_0 S} \hat{x}$$

For små x !

4.6: FØRSKYVNINGSSTRØM

I elektrodynamikken må Ampères lov erstattes med

Ampère-Maxwell's lov: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (4.137)

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$

for å oppfylle ladnings-

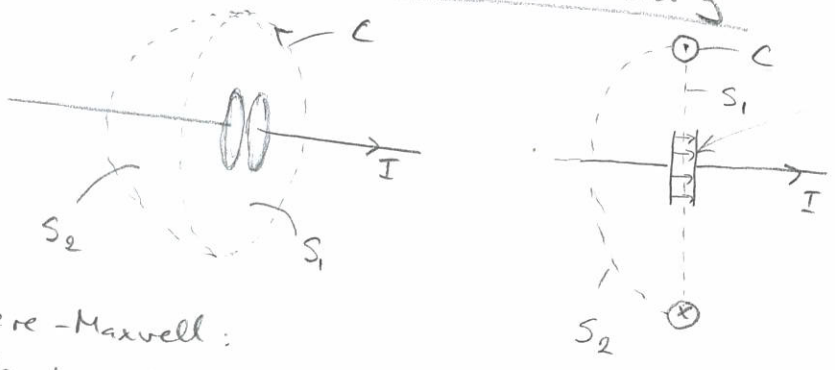
bevarelse: $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Forskyvningsstrømteitet

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

uavhengig av materiale endring / forskyvning av bunden ladning

Ampère-Maxwell's lov brukt på kondensator under opplutning



- Antar dimensjoner til 11-plate kondensator \Rightarrow alt felt er inni kondens.

$E = \begin{cases} \frac{V}{d}, & \text{mellom plater} \\ 0, & \text{utenfor} \end{cases}$

Ampère-Maxwell:
Venstre side: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_{\phi} 2\pi r$

$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{d} \frac{I}{C}$
 $= \frac{I}{d} \frac{d}{\epsilon_0 S} = \frac{I}{\epsilon_0 S}$

Høyre side for to valg av S:

$\int_{S_2} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$
 \downarrow
felt = 0 for hele S_2

$\int_{S_1} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{S} \int_{S_{kond}} dS = I$ (litt smile)

16/4 2018

4.7 Maxwells ligninger – oppsummering

Vi kan nå summere opp de fire Maxwells ligningene på differensialform:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.145a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.145b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.145c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.145d)$$

og så på integralform:

Coulombs lov $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\mathbf{r}}{R^3} \hat{R} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ Faraday's lov (4.146a)

Ampère-Maxwell's lov $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$ (4.146b)

Gauss lov $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv$ (4.146c)

Biot-Savarts lov $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^2} \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ "Magnetiske monopoler finnes" (4.146d)

I tillegg har vi Lorentz-kraften, som viser virkningen av feltene på en punktladning:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.147)$$

Faradays lov (4.146a) kan også skrives

$$e = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.148)$$

121

der C og dermed S godt kan være tidsavhengige. Her er $\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ den magnetiske kraften per ladning pga. bevegelsen til C .

Til de fire Maxwells ligninger hører også relasjonene

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.149a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.149b)$$

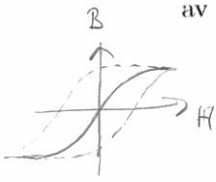
der polariseringen \mathbf{P} er en funksjon av det elektriske feltet \mathbf{E} , og magnetiseringen \mathbf{M} er en funksjon av \mathbf{B} . For lineære medier er disse funksjonene lineære, og da kan vi skrive

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.150a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (4.150b)$$

Selv om vi har argumentert for Maxwells ligninger ut fra Coulombs lov og Biot-Savarts lov, er den virkelige rettferdiggjørelsen at de stemmer med alle eksperimenter som har blitt utført fram til i dag⁵ I videregående kurs og bøker postuleres vanligvis Maxwells ligninger direkte, og så utleder man det man trenger ut fra dem.

Grensebetingelsene for de fire feltene \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} og \mathbf{H} som vi viste i elektro- og magnetostatikken gjelder fortsatt. Dette er fordi tilleggsleddene i elektrodynamikken, dvs. $-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ og $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$, blir null for integrasjonssylinderen med neglisjerbar høyde, jfr. bevisene i kap. 2.5 og 3.6.



I elektrodynamikken kan \vec{E} og \vec{B} felt uttrykkes v.h.a. et skalarpotential V og et vektorpotential \vec{A} i hht :

$$\text{II } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{Maxw. \#4 oppfylt!})$$

$$\text{III } \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{Maxw \#1 oppfylt})$$

JUSTERINGSTRANSFORMASJONER (Gauge transf)

av \vec{A} og V er lov for å gjøre livet [ligningene] så lette som mulig 😊

⇒ Kan kreve tilleggshetizeler på \vec{A} og V så leste betingelsene kan skrives på formen

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla f \\ V' &= V - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.156) \quad f(x,y,z,t): \text{vilkårlig funksjon} \\ (\vec{A}', V') \text{ vil gi same } \vec{E} \text{ og } \vec{B} \text{ som } (\vec{A}, V)$$

LIGNINGER FOR \vec{A} og V som oppfyller Maxwell #2 og #3 blir enkle og fine hvis vi bruker

LORENTZBETINGELSER: $\nabla \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$ I som justeringstranf.

Anbr også lineært medium: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ | $\vec{B} = \mu \vec{H}$ V

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} + \text{V} + \text{Maxwell \#2 og \#3}$$

⇒ BÆLGERIGNINGER FOR LORENTZPOTENSIALENE

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.161)$$

(RETRADERTE POT.)

L "forsinkelte"

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (4.162)$$

LORENTZPOTENSIALENE - RETARDERTE POTENSIALER

+ Lorentz bet:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.145a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{J} \quad (4.145b)$$

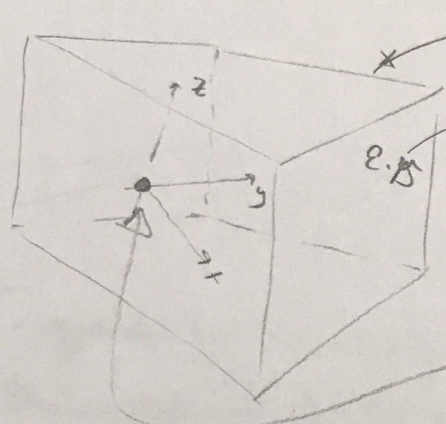
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.145c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.145d)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

17/4 2018

LØSNING AV BØLGELIGNINGENE FOR LORENTZPOTENSIALENE:



Generelt:

$$\rho(x,y,z,t)$$

$$\vec{J}(x,y,z,t)$$

Nå: skal løse for Tidsvarierende punktladn. i origo:
 $\rho(t) dV$

Over alt UNNTATT origo har vi: $\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

Vi skjønner at løsningen til V må ha kulesymmetri, så $\nabla^2 V$ kan enkeltst uttrykkes i sfæriske koordinater

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

høreførel osv...

Braker et trix: $V = \frac{U}{r} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

1D bølge ligning m/ generell løsning

$$U(r,t) = f(t - r/c) + g(t + r/c) \quad \text{m/ } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

← bølge som beveger seg fremover i tid

↑ bølge som beveger seg bakover i tid (ikke-kausalt)

$\Rightarrow V = \frac{U}{r} : \quad V(r,t) = \frac{1}{r} f(t - r/c)$

+ ikke-kausalt ledd som vi GLATT ser bort fra FORDI det ikke stemmer med OBSERVASJONENE !!

f kan finnes ved sammenligning med elektrostatikken:

$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$
 \Downarrow
 $V = \frac{\rho dr}{4\pi \epsilon r}$

dynamikk:

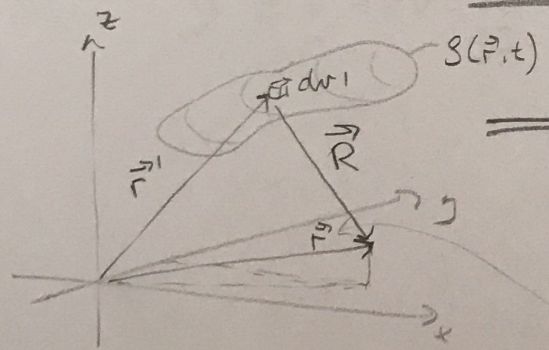
$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$
 $\Rightarrow V(r,t) = \frac{\rho(t - r/c) dr}{4\pi \epsilon r}$

Samme uttrykk som potensial i elektrostatikken, men "forsinket" ved tiden det tar for effekten av punktladningen når observasjonspunktet.

Utbredelsehastigheten: $c = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ (lyshastighet)

gjelder for PUNKTLADNING i origo

Skalarpotensial er et fra en VILKÅRLIG SAMLING TIDSAHJENGLIGE LADNINGSBIDRAG $\rho(\vec{r}', t')$ finnes ved SUPERPOSITION !!



$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dr'$$

 (4.173)

Tilsvarende dykke for ligningen for \vec{A} gir:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dr'$$

 (4.174)

KALLES de RETARDERTE POTENSIALENE (eller Lorentz-potensialene)

KVASISTATIKK

Uttrykkene for Lorentz potensialene inneholder

$$\text{RETARDERT TID: } t - R/c$$

For avstander som er små sammenlignet med avstanden
potensialene propagerer: 1 løp av en periode er
det ok å anta $t - R/c \rightarrow t$

$$f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow T = 0.02 \text{ s} \Rightarrow R: \text{1 løp av } T = T \cdot c = \underline{6000 \text{ km}}$$

$$f = 20 \text{ MHz} \Rightarrow T = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s} \Rightarrow R: \text{1 løp av } T = T \cdot c = \underline{15 \text{ m}}$$

Hvis $t - R/c \rightarrow t \Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J} dV}{r}$ ← Biot-Savart's lov

⇒ Når vi er INNENFOR KVASISTATIKKENS GRENSE
kan følgende OPPSKRIFT BRUKES:

1) Biot-Savart's lov $\rightarrow \vec{A}$

2) $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

3) Poisson's / Laplace' ligning $\rightarrow V$

4) $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ evt