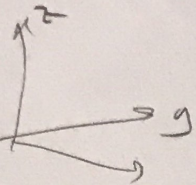
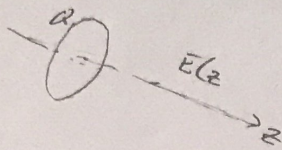


9/1-18

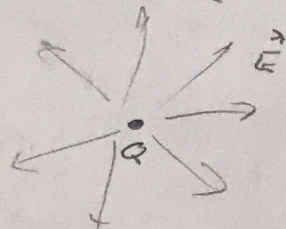
KARTESISK



SYLINDRISK



SPÆRISK



INTEGRALER

Linje  $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$   $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Flate

$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$

$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$

Volum

$\int_V \rho dV$

SKALARE FUNKSJONER

- høyde:  $h(x, y)$
- temper:  $T(x, y, z)$   
 $T(x, y, z, t)$
- trykk:  $P(x, y, z, t)$
- Elektrisk potensial:  $V(x, y, z)$
- Ladnings tetthet:  $\rho(x, y, z)$

VEKTORFELT

- elektrisk felt  $\vec{E}(x, y, z, \dots, t)$
- magnetisk felt  $\vec{B}(x, y, z)$
- strøm  $\vec{J}(x, y, z)$   
[vann, elektrisk]  $\vec{I}(x, y, z)$

- Beskrive
- Integre / deriver dem
- "Noen morsomme sammenhenger mellom disse integrasjon og deriver" nyttige

GRADIENTEN

$\nabla V = \left[ \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right]$  Vektor!

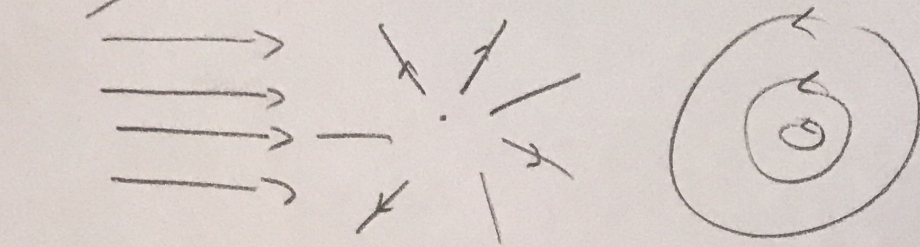
NABLAOPERATOREN:  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$  VEKTOR

LAPLACEOPERATOREN:  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  SKALAR

$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

9/1-18

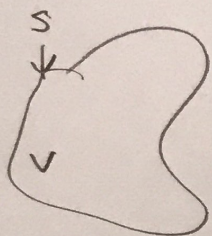
VEKTORFELT - Charakteristischer:



DIVERGENZ:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{skalar})$$

DIVERGENZTHEOREM:

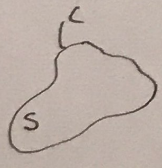


$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV$$

SIRKULATION (CURL):

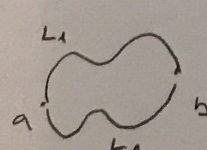
$$\operatorname{curl} \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{e}}{\Delta S} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{vektor})$$

STOKES THEOREM:



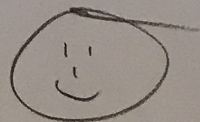
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

KONSERVATIVES FELT

$$\vec{A} = -\nabla V \quad \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \vec{A} \cdot d\vec{e}$$


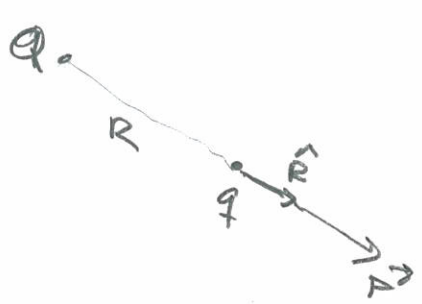
SISTE MORSUMME OPERATORRELATION:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$



# ELEKTROSTATIKK

Coulombs lov



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \hat{R}$$

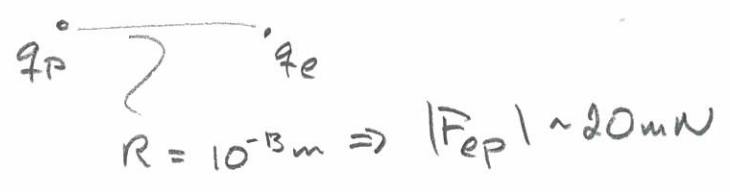
$\epsilon_0$ : Elektrisk permittivitet i vakuum

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Ladning til et elektron / proton:  $q_p$

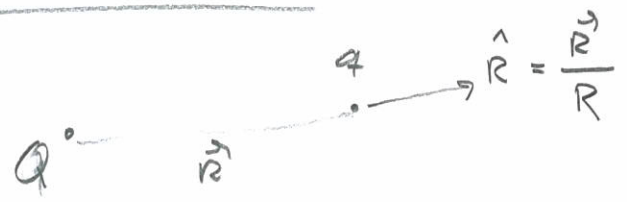
$$q_p = -q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

## STARRELSE



15/1  
2018

## RETNING



Like ladninger:  $\vec{F} \propto |Qq| \hat{R}$

Ulike ladninger:  $\vec{F} \propto -|Qq| \hat{R}$

## SUPERPOSISJON (Kraft fra flere punktladninger)

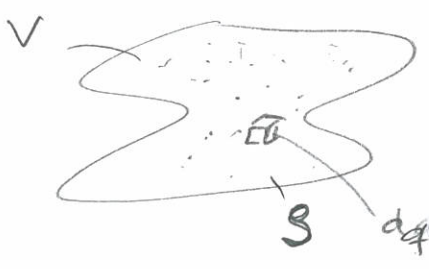
$q_i \quad i = 1, n$



$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{R}_i$$

Regneeksempl 2.1  $\leftrightarrow$  typiske ladningsk: batterier...

Coulombs lov for et utstrakt legeme



$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R^2} \hat{R}$$

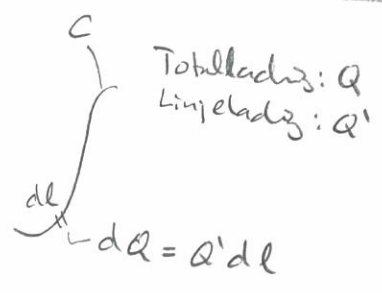
$dq = \rho dV$

ELEKTRISK FELT

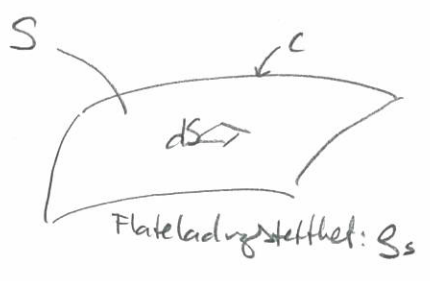
$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

For punktladning Q:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{R}$

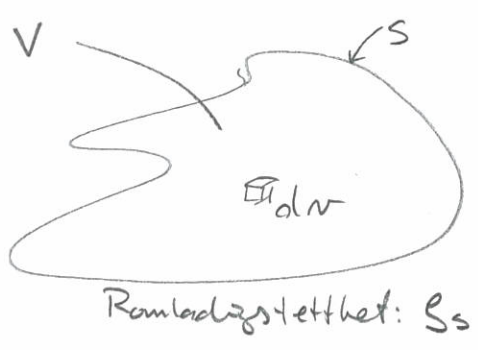
SUPERPOSITION GELDER OGSÅ FOR E-FELT



$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{q' \hat{R}}{R^2} dl$$



$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s \hat{R}}{R^2} dS$$



$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \hat{R}}{R^2} dV$$

PRAKTISKE REKNEDVERSØR

- Let etter symmetrier  
(Prøv å forstå feltet kvalitativt)
- Velg et hensiktsmessig koordinatsystem
- Sjekk dimensjoner og oppførsel f. eks i symmetripunkter / symmetriplan og/eller langt unna

SKALARPOTENSIALET

$$V_A = \int_A^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

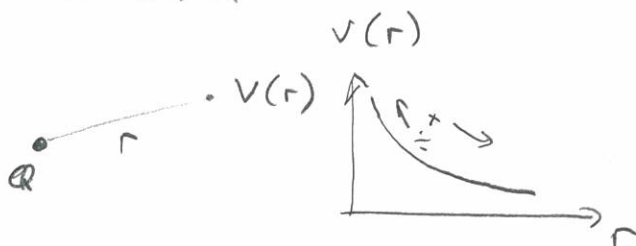
Enhet:  $[V] = \frac{J}{C} \equiv V$   
 $\Rightarrow [E] = V/m$

→ Uavhengig av integrasjonsvei fra A til ref 😊

16/1-2018

POTENSIAL FRA EN PUNKTLADNING, Q  
relativt til  $\infty$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



POTENSIAL FRA EN.....

- LINJELADNING

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{Q' dl}{R}$$

- FLATELADNING

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s ds}{R}$$

- RINGLADNING

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_s ds}{R}$$

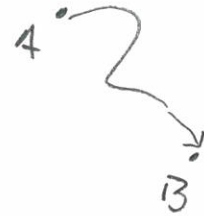
! ingen vektorer 😊

relativt til  $\infty$

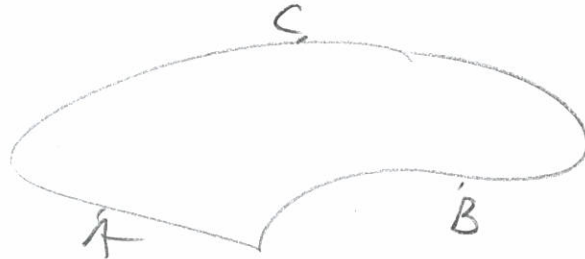


SPENNINGEN (uavhengig av referanse for  $V_A, V_B$ )

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e}$$



⇒ KIRCHHOFFS SPENNINGSLØY



$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$$



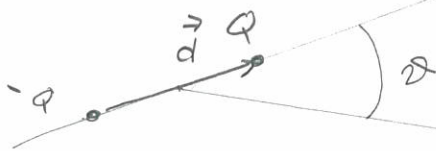
$\vec{E} = -\nabla V$  Nyttig sak

EQUIPOTENSIAL FLATER:

$$V = \text{konst}$$

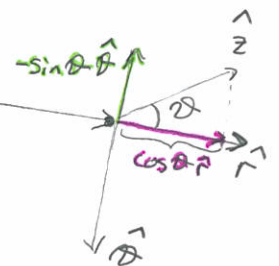
ELEKTRISK DIPOL

$$\text{Dipolmoment: } \vec{p} = Qd \vec{z} = Qd \hat{z}$$



$$\vec{p} \cdot \hat{r} = Qd \cos \theta$$

$$\hat{z} = \cos \theta \cdot \hat{r} - \sin \theta \cdot \hat{\theta}$$



I Punktet  $(r, \theta, \theta)$ :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3 \cos \theta \cdot \hat{r} - \hat{z})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}}{r^3}$$

enhets-  
vektorer i  
samme plan  
som arket

GAUSS' LOV:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

← Ladningene innenfor S

Div. teoret

→ Vilkålig S!



→ Hvis  $\vec{E} = 0$  overalt på S

ELLER

→ Hvis  $\vec{E}$  parallell med overflata overalt på S

ELLER

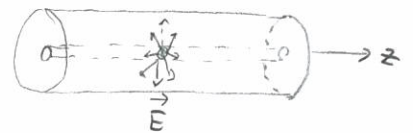
→ Hvis  $\text{div} \vec{E} = 0$  overalt inne i V

3 EKSEMPLER

⇒ INGEN LADNING I INNEFOR S

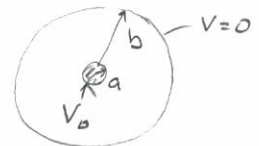
I: Feltet inne i en coax kabel (Hvorfor bruke Gauss lov)

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}, & r \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



II: Feltet rundt en ladd kule inne i et kuleskall

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{ab}{b-a} \frac{V_0}{r^2}, & r \in [a, b] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

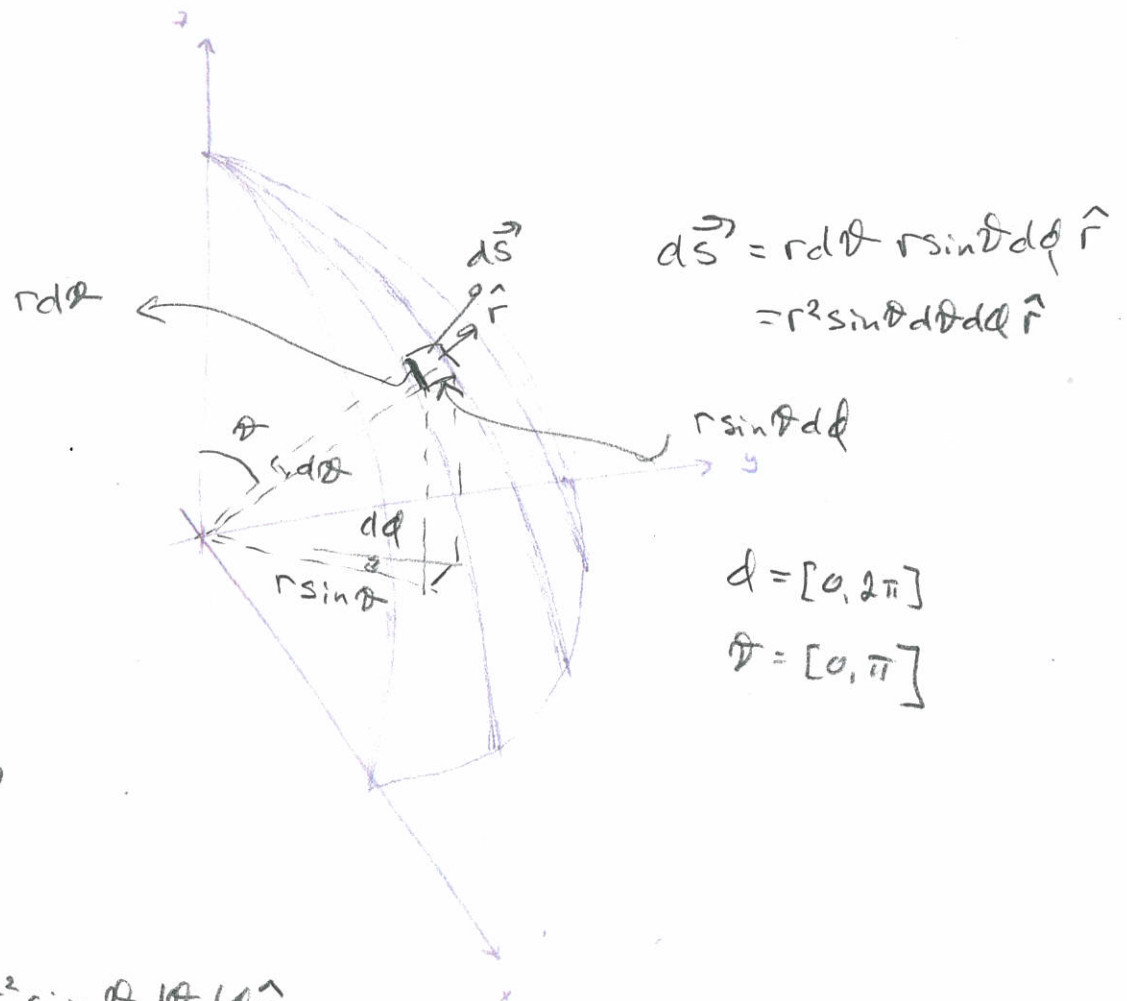


III: Feltet rundt et (uendelig) plan

$$E_z = \begin{cases} \frac{S_s}{2\epsilon_0}, & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -\frac{S_s}{2\epsilon_0}, & z < 0 \end{cases}$$





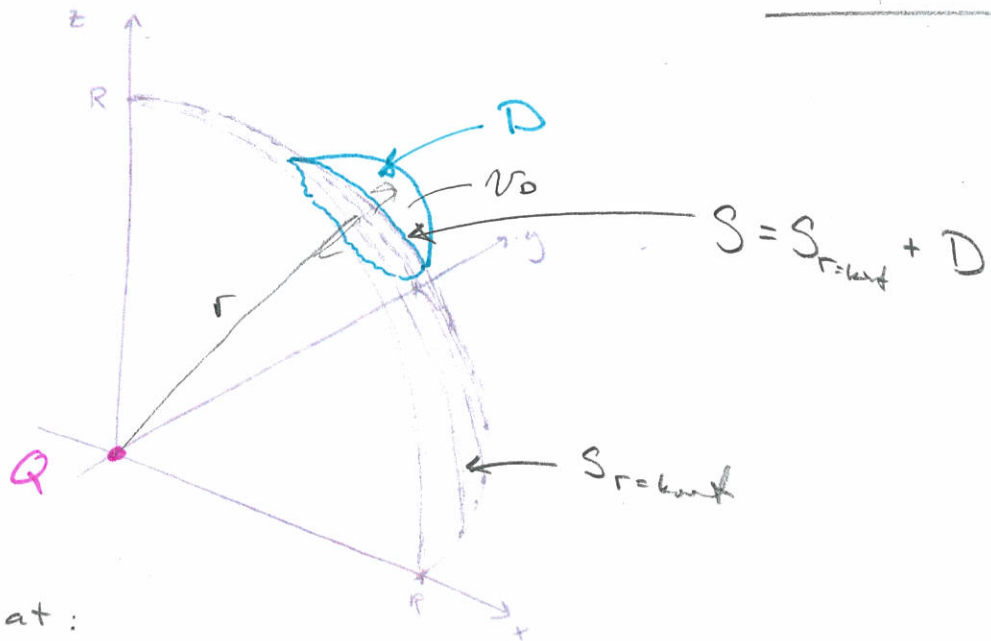


$$\oint_{S_{r=\text{const}}} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

$$= \oint_{S_{r=\text{const}}} \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

$2\pi \quad -\cos\theta \Big|_0^{\pi} = 2$



Har vist at:

For en punktladning  $Q$  og en kuleflate  $S_{r=\text{konst}}$

$$\oint_{S_{r=\text{konst}}} \vec{E}_Q \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{r=\text{konst}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_D \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} + \underbrace{\int_D \nabla \cdot \vec{E} \, dV}_{=0}$$

Div. teoremet

Rager ud  $\nabla \cdot \vec{E}$  via

$$\vec{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$E_\theta = E_\phi = 0$$

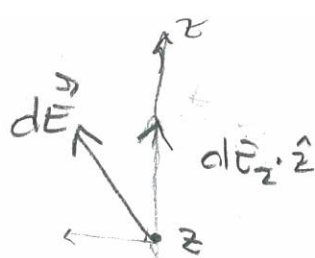
(Sylinderkoordinat)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) = 0 \quad (\ddot{\smile})$$

Eks III

Felt regnet ut direkte



$$dE_z = |dE| \frac{z}{R} *$$

$R \rightarrow \infty$

Sylinderkoordinat



$r d\phi dr$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_s}{R^2} dS$$

$$\frac{q_s}{R^2} \hat{R} dS$$

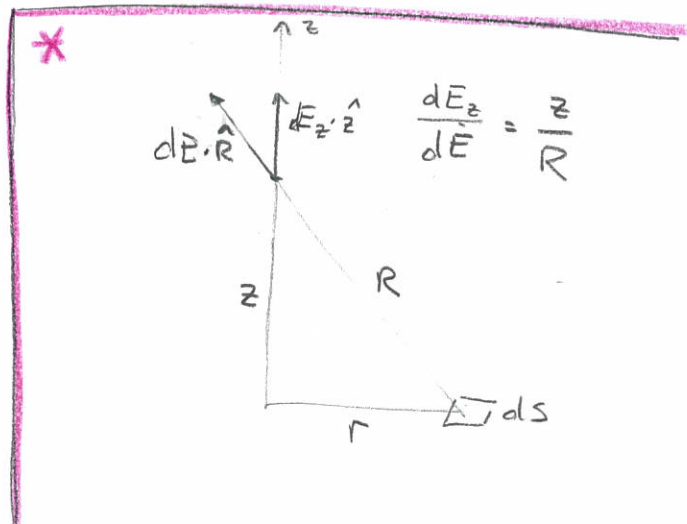
Ser bare p<sub>z</sub> E<sub>z</sub> siden alle E<sub>x</sub> og E<sub>y</sub> vil kanselleres ut p.g.a. symmetri

$$E_z = \int_S dE_z = \int_S |dE| \frac{z}{R} = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{z r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\phi dr$$

$$= \frac{q_s z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

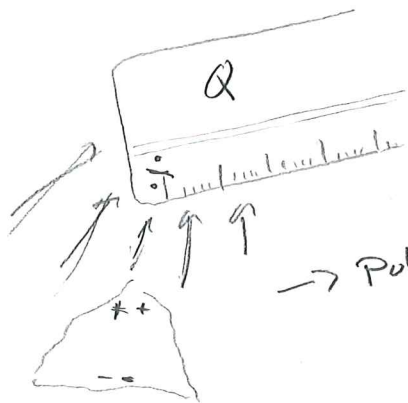
$$\int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr = \frac{-1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{z}$$

$$E_z = \frac{q_s}{2\epsilon_0}$$



ELEKTRISKE FELT I DIELEKTRISKE MEDIER (2.4)

23/1  
2018



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{R}$$

→ Polariseres dielektriske medier



TOTALLADNINGER I ET MEDIUM:

**BUNDES**

- bundet sammen i dipoler (mønstre enheter)

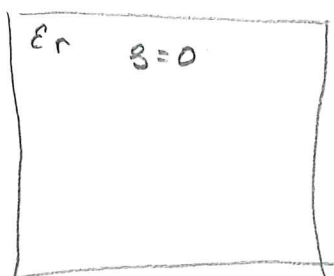
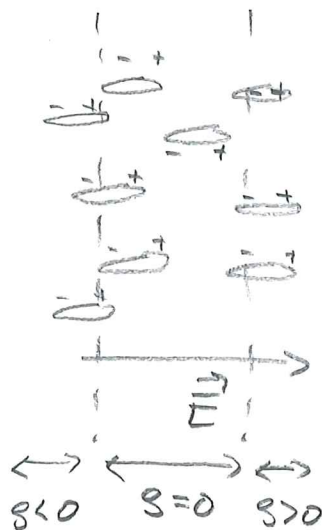
**FR**

- "enkeltladninger"  $e^-$   $H^+$
- får lov til å oppføre seg som ladninger

"KVALITATIVT BILDE"



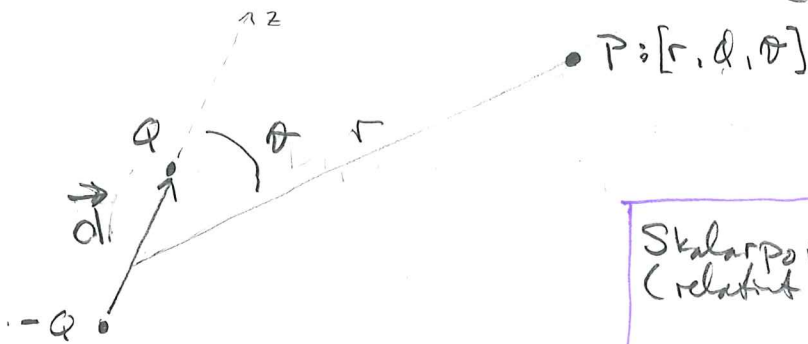
$$\vec{E} = 0$$



→ Internt  $\vec{E}$ -felt p.g.a. polarisering

$$\Rightarrow \text{Totalfelt } \vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}}$$

LA OSS SE LIT MER PÅ DIPOLER (Tilbudsblikk)



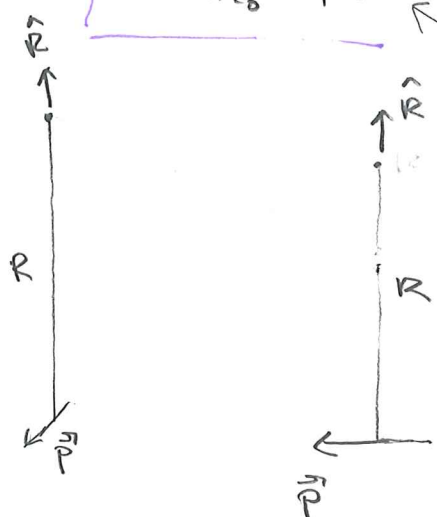
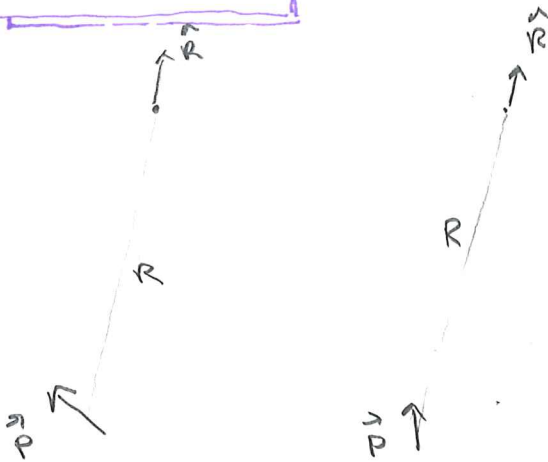
Dipolmoment:  
 $\vec{P} = Q\vec{d}$

Skalarpotensialet  
 (relativt til  $\infty$ )

$$V_{dipol} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

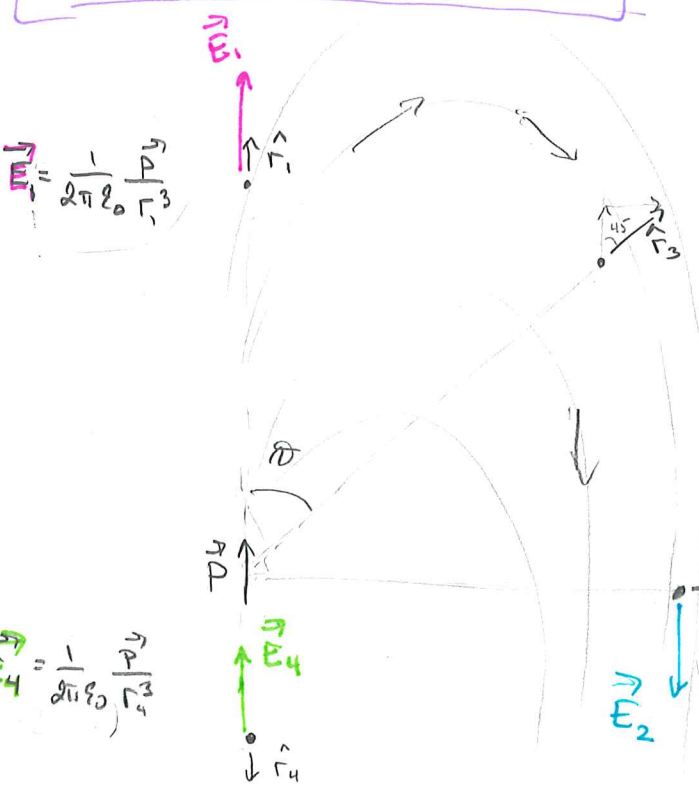
← sferiske koord.



E-felt:  

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{P} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{P}}{r^3}$$

$\vec{P} \cdot \hat{r} = |\vec{P}| |\hat{r}| \cos\theta = P \cos\theta$



$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 2P \cos\theta \\ P \sin\theta \end{pmatrix}$$
 (GRIS med  $\cos/\sin$ )

$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{P}$$
       $\vec{P} = Q\vec{d}$

$$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} P \cos\theta \\ P \sin\theta \end{pmatrix}$$

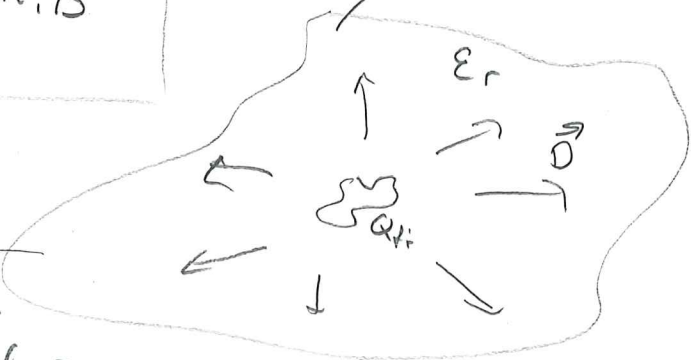
$\hat{r} = -\hat{z}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

- ↳ • elektrisk flukstetthet
- forskyvning
- $\vec{D}$ -felt

GAUSS LOV I ET DIELEKTRISK MEDIUM:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{fri, is}$$



Materialparametre.

For mange materialer

$$\vec{P} \propto \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

↳ elektrisk sussesibilitet

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$= \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

$$= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

relativ permittivitet

↳ absolutt permittivitet

Dimensionsanalyse:

$$[\vec{P}] = [q d] = C m$$

$$[\vec{E}] = [F/q] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{C^2}{N m^2} = \frac{C}{V m}$$

↓

$$[\chi_e] = 1 \quad (\text{!})$$

LINEÆRT MATERIALE  
 $\vec{P}(\vec{E})$  [og ikke  $(E)^2$  f. eks.]

HOMOGENT MATERIALE  
 Konstant  $\epsilon_r$

ISOTROPT MATERIALE  
 $\epsilon_r$  skalart gilde  
 antenstor  
 $\Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{P}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(x, y, z) \quad (2.76) \text{ Maxwell \# 3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.77) \text{ Maxwell \# 1 [elektrostatisk]}$$

29/1  
2018

DIELEKTRISK STYRKE

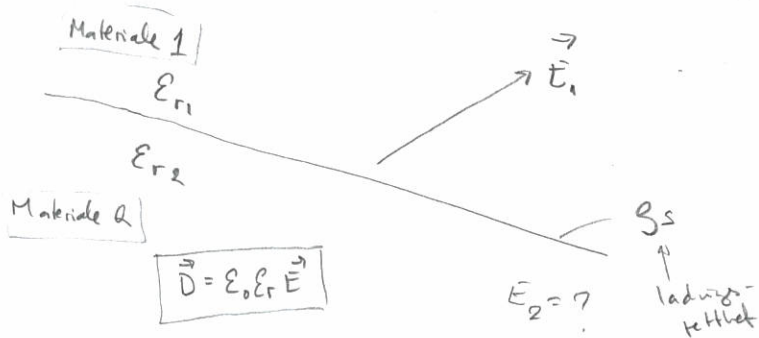
Den feltstyrken ( $\vec{E}$ ) som skal til for å ionisere et materiale. Ioner  $\Rightarrow$  ladde partikler  $\Rightarrow$  strøm  $\Rightarrow$  overslag / gnist

For luft:  $3 \frac{kV}{mm} = 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$

Molekyl:

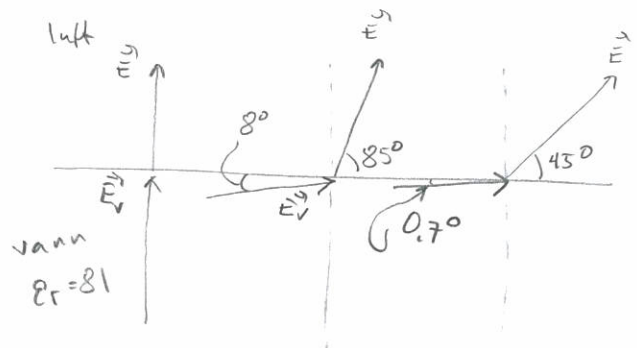
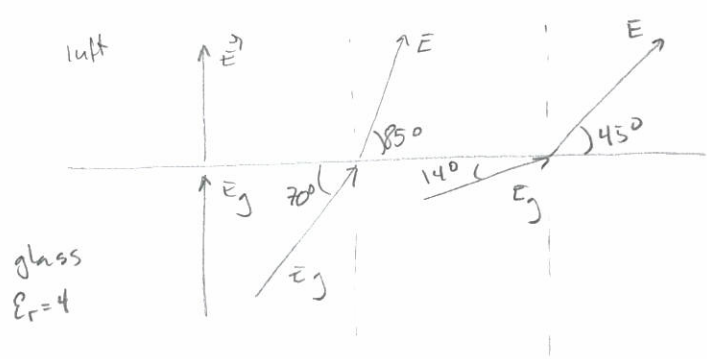
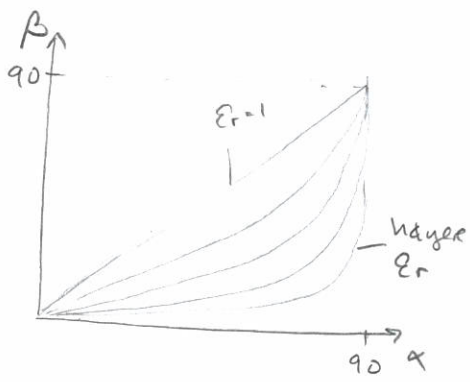
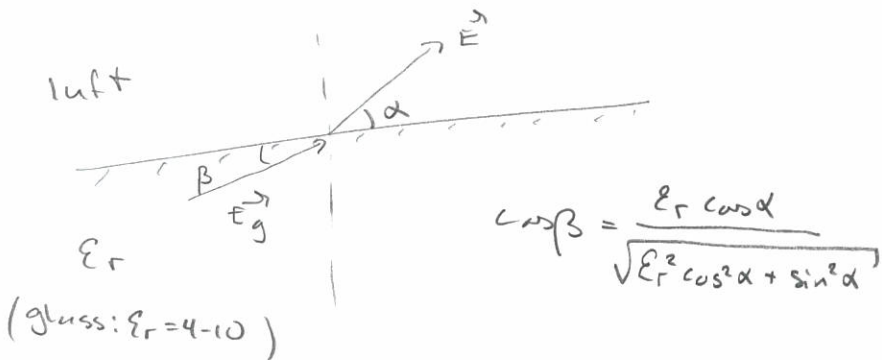


GRENSEBETINGELSER for  $\vec{E}$  og  $\vec{D}$  (2.5)



$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.94)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s \quad (2.95)$$



# POISSON'S & LAPLACE' LIGNING (2.6)

Maxwell #3 + lineært & homogent

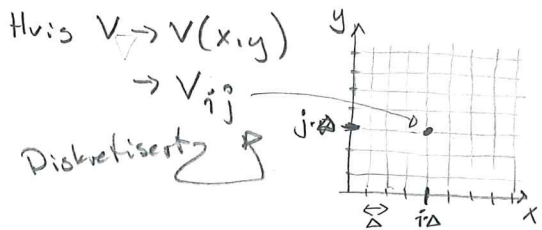
⇒ Poisson's ligning:  $\nabla^2 V = -\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon}$  (2.97)

Laplace' ligning:  $\nabla^2 V = 0$  (2.98)  
 ( $\rho=0$ )  
 Ladefritt rom

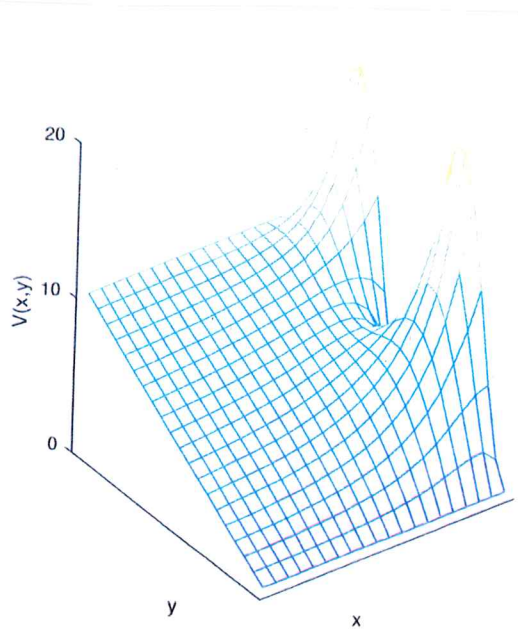
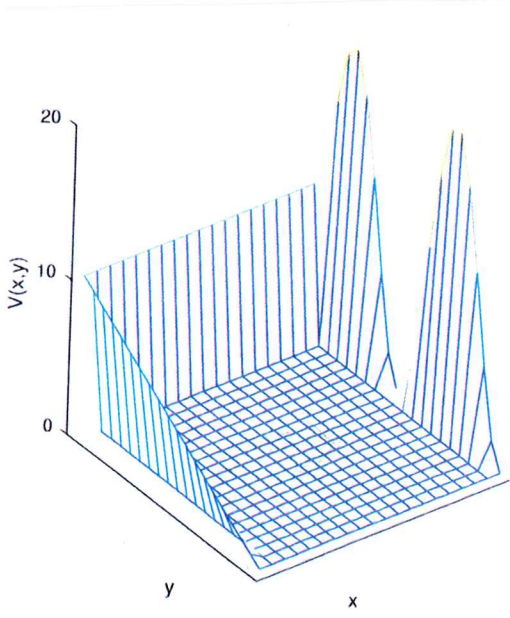
- EKS:
- FELT MELLOM 2 UENDLIG STORE PLATER ( $V \rightarrow V(z)$ , kart. koordinat)
  - FELT RUNDT EN KULE [EKS 2,14] ( $V \rightarrow V(r)$ , sfæriske koordinat)
  - FELT MELLOM EN KULE OG ET KULESKALL (men andre grense-betingelser)
  - FELT I COAX KABEL ( $V \rightarrow V(r)$ , syl. koordinat)
  - PN overgang
  - NUMERISKE LØSNINGER

30/1 2018

→ Æneste utvei når geometrien blir komplisert



$$V_{ij} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1})$$

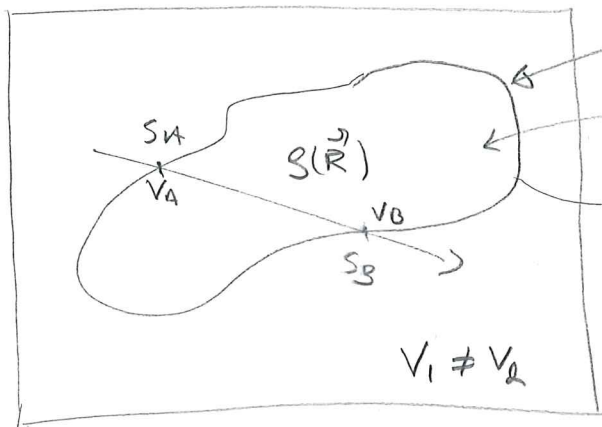




$\nabla^2 V = 0$

I et lineært, homogent og isotropt materiale uten fri ladning  
 $\Rightarrow V(\vec{R})$  har ingen MAX eller MIN punkter

ENTYDIGHETSTEOREMET :



$\nabla^2 V(\vec{R}) = -\frac{\rho(\vec{R})}{\epsilon}$

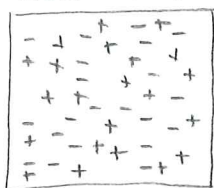
- ① Innenfor S tilfredstiller  $V_1$  og  $V_2$  Poisson's ligning
- ② På grenseflata S tilfredstiller begge grensebetingelsene (for  $V(S)$ ) på S

$\Rightarrow V_1(\vec{R}) = V_2(\vec{R})$  i hele  $N$  selv om de kan være forskjellige utenfor  $N$

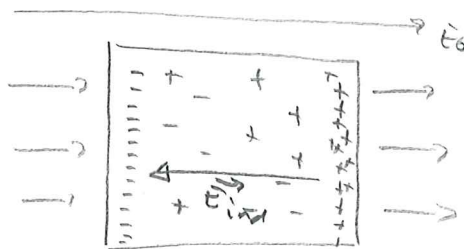
IDEELLE LEDERE (d. 7)

Ladningene i materialet er HÆLT FRI til å bevege seg hvor de vil

Ideell leder



$\Rightarrow$  Påtrykt felt  $E_0$



Egenskaper

1) På grunn av

**ELEKTROSTATISK INDUKSJON**, vil

$E = 0$

inni en ideell leder

Ladninger vil flytte på seg HÆLT TIL  $E_{ind} = |E_0|$

$\Rightarrow E_{int} = 0$

2) Hvis total ladning til ledaren er  $Q \neq 0$  vil romladningstettheten inni ledaren = 0

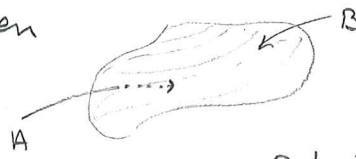
$\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \rho(x,y,z) = 0$

$\Rightarrow$  All ladning  $\rightarrow \rho_s(x,y,z)$  **INDUSERT PLATELADNINGSTETTHET**

3) Flukstettheten utenfor ledere?  
 [kommer litt lengre ned 😊]

4) En ideell leder er en

**EKVIPOTENSIAL-  
 PLATE / VOLUM**



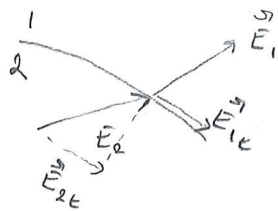
$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Potensial-  
 forskjellen /  
 spenningen.

↳ Kan ikke ha  
 spennings forskjeller  
 langs en ideell leder

5) Felt på grenseflaten?

Generelt:

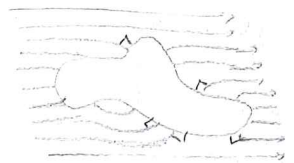


$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

Ideell leder:

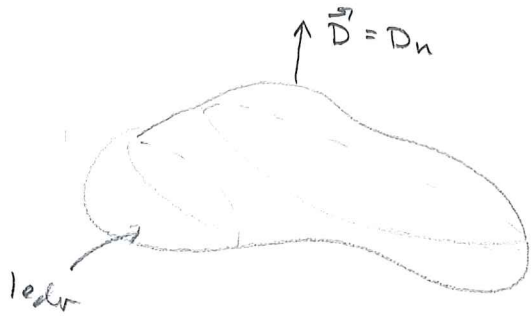
$$\vec{E}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{1t} = 0$$



$\vec{E} / \vec{D}$   
**ALLTID  
 NORMALT  
 PÅ OVER-  
 FLATEN**

3) [Nå kan vi se på denne, tilbake til 5) felt]



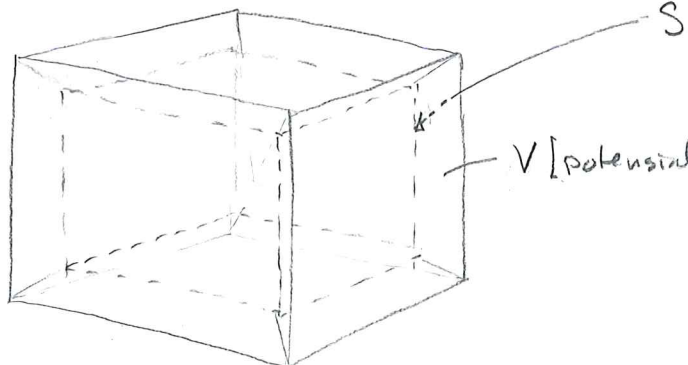
Generelt:  $D_{in} - D_{out} = \rho_s$

⇒  $\vec{D}$  utenfor / på overflaten til  
 en leder:

$$|\vec{D}| = D_n = \rho_s$$

**FARADAYBUR**

Ideell leder m/ hulrom



V konstant på hele ledere  
 ⇒ V konstant på hele flaten S  
 som omslutter hulrommet.

Inni hulrommet:  $\rho = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 V_{inni} = 0$$

V konstant  
 inni hele  
 hulrommet

$$\vec{E} = -\nabla V = 0$$

↳ inni hele hulrommet

EKS:

- 1) COAX 😊
- 2) BIL/FLY (iturdenset)
- 3) EMP-sikkert rom

## SPETILLADNINGSMETODEN

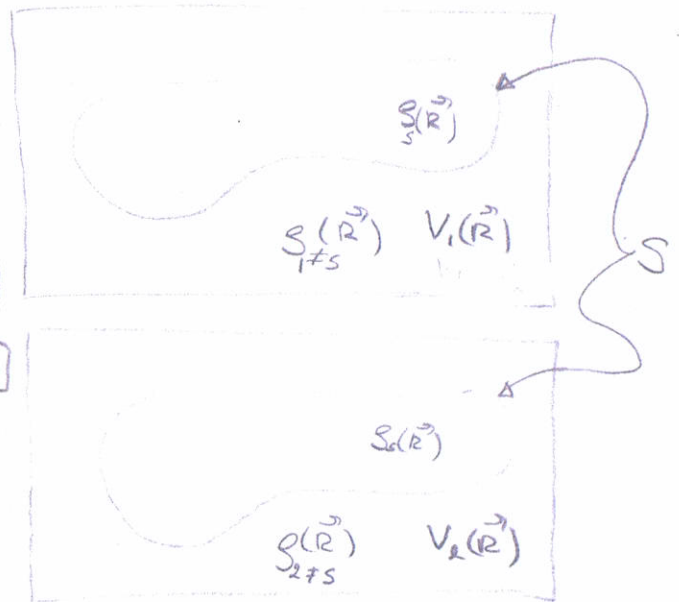
5/2  
2018

- Utgangspunkt:
- 1)  $\vec{E} = -\nabla V$  Relasjonen mellom skalarpotensial og et elektrostatiske felt (gjelder alltid)
  - 2)  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  Lineært og isotropt medium
  - 3)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$  Maxwell # 3 (gjelder alltid)
  - 4)  $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon$  Homogent medium

$$\Rightarrow \nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon} \quad \text{Poissons ligning}$$

ENTYDIGHETSLEMMET:

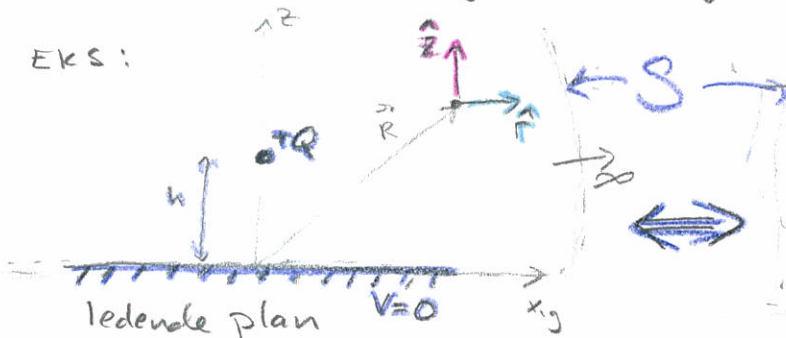
Hvis  $V_1$  og  $V_2$  BØGGE OPPFYLLER  
POISSON'S LIGNING OG DE HAR  
SAMME GRENSEBETINGELSER PÅ  
DEN LUKKETE FLATEN  $S$  [ $V_1(S) = V_2(S)$ ]  
 $\Rightarrow V_1(\vec{r}) = V_2(\vec{r})$  INNENFOR  $S$   
 $\Rightarrow \vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_2(\vec{r})$  — " —



$\Rightarrow$  Hvis vi skal regne på potensial og felt innenfor en lukket flate,  $S$ , kan vi i stedet regne på et ekvivalent problem så lenge de to situasjonene har

- $\rightarrow$  samme  $\rho(\vec{r})$  innenfor  $S$
- $\rightarrow$  samme grensebetingelser på  $S$

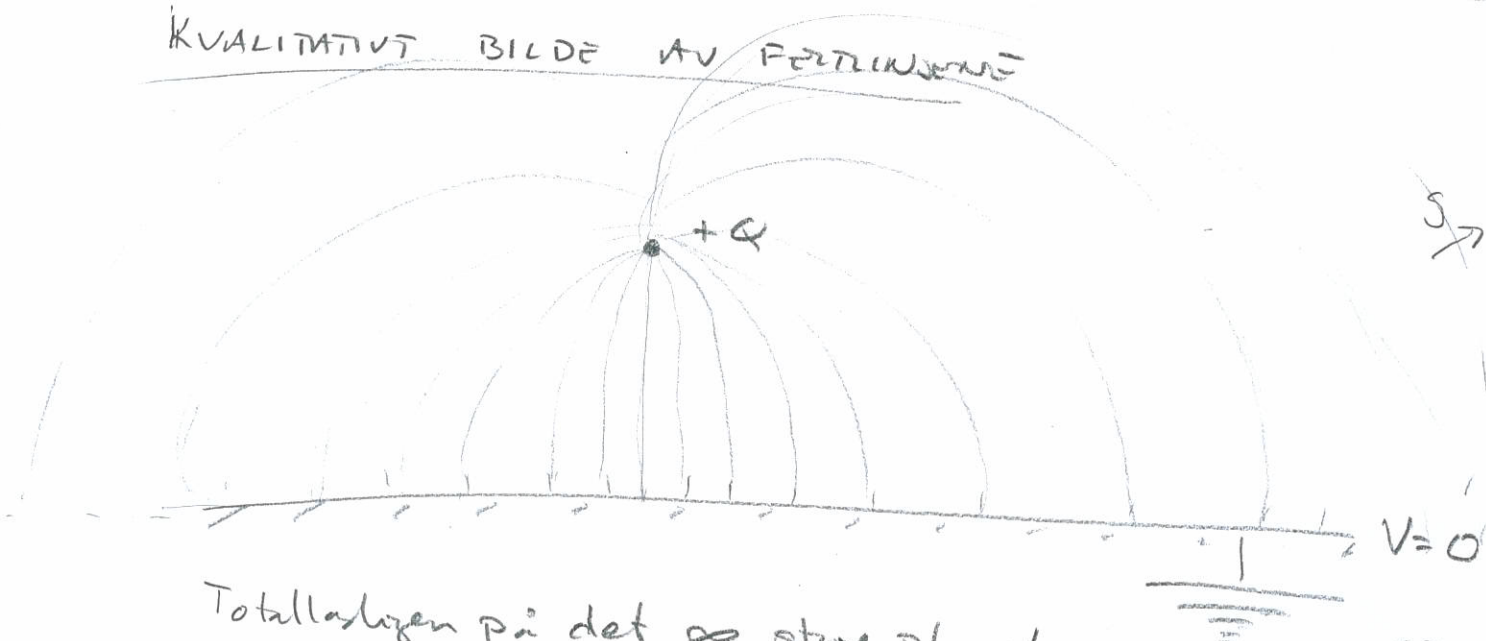
EKS:

FELTET I PUNKTET  $\vec{R}$  [ $r, \phi, z$ ]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{r}{(r^2 + [z-h]^2)^{3/2}} - \frac{r}{(r^2 + [z+h]^2)^{3/2}} \right] \cdot \hat{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{z-h}{(r^2 + [z-h]^2)^{3/2}} - \frac{z+h}{(r^2 + [z+h]^2)^{3/2}} \right] \cdot \hat{z}$$

$$S_s(r) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

KVALITATIVT BILDE AV FÄLTLINJER



Totalt laddningen på det  $\infty$  stora planet

$$Q_{\text{plan}} = \int_{\text{plan}} \epsilon_0 E_s(r) r dr d\phi = - \frac{Qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{r}{(r+h^2)^{3/2}} dr = -Q$$

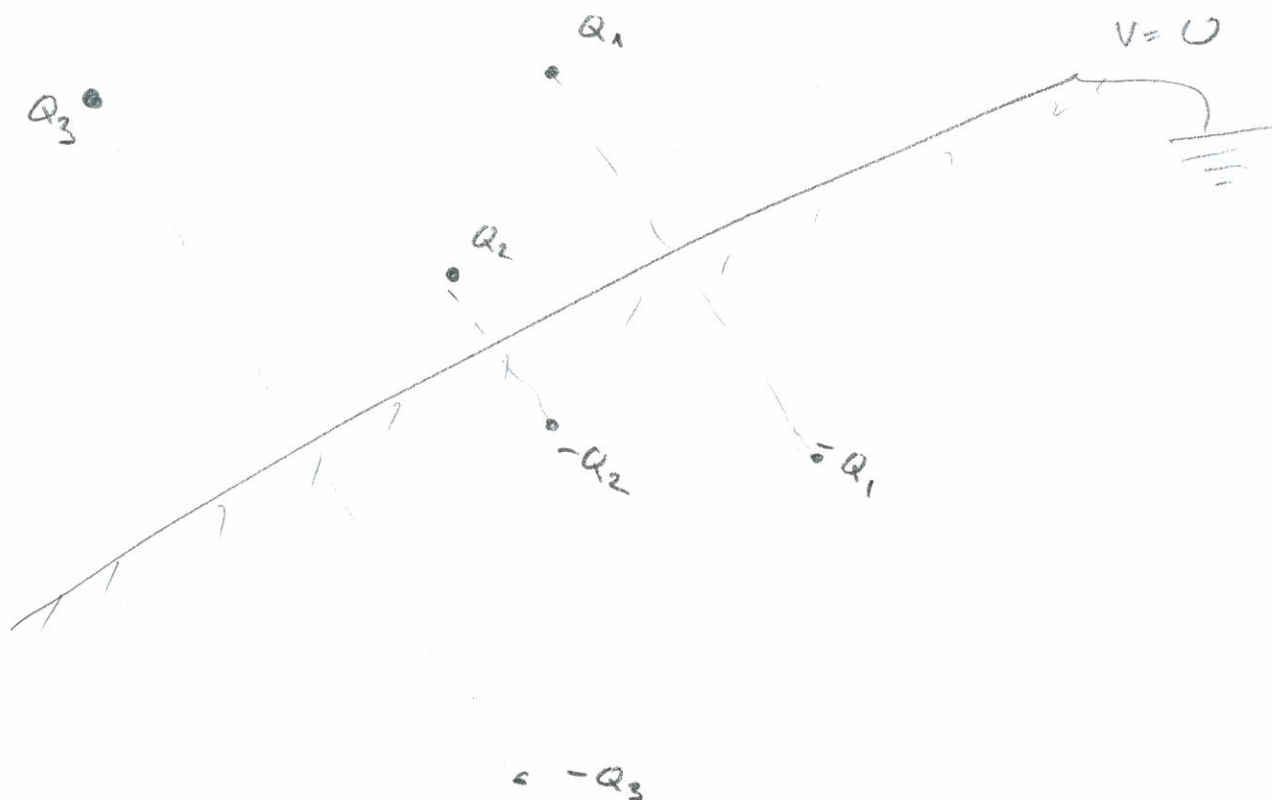
(smiley face)

$$\int_0^{\infty} \frac{r}{(r+h^2)^{3/2}} dr = \frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{h}$$

På S:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = +Q + Q_{\text{planet}} = \underline{\underline{0}}$$

S (med Q + planet)



LYN

$V_{ref} = 0$

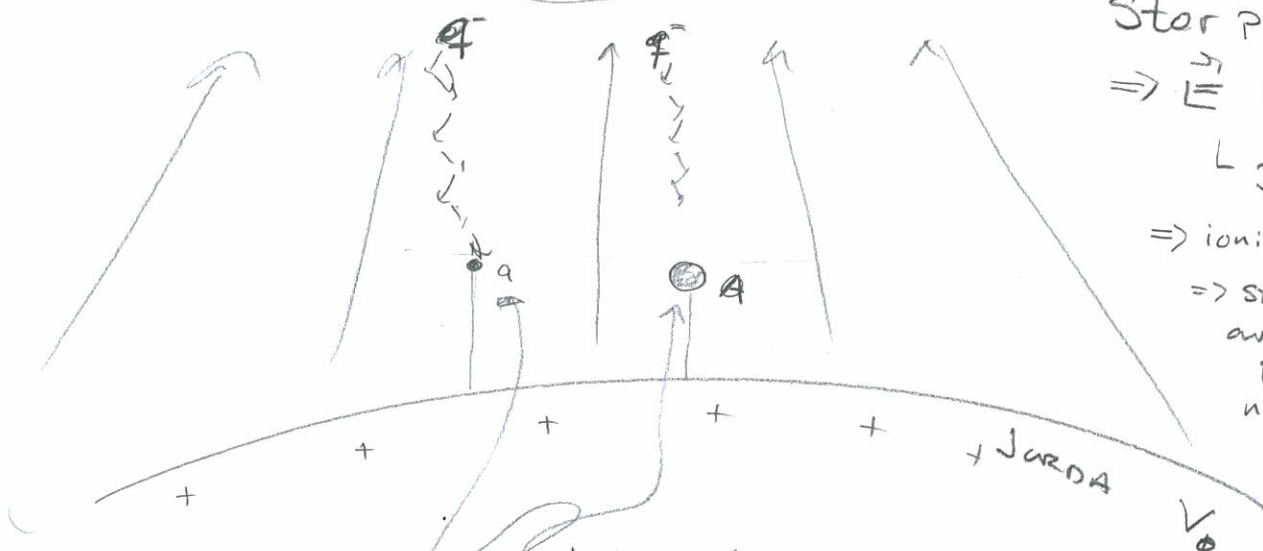
$\nabla V \neq 0!$

Stor potensialforskjell

$\Rightarrow \vec{E}$  kraftige

$L \sim 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$

$\Rightarrow$  ionisering  
 $\Rightarrow$  "stråm front"  
av ladde partikler ned mot jorda



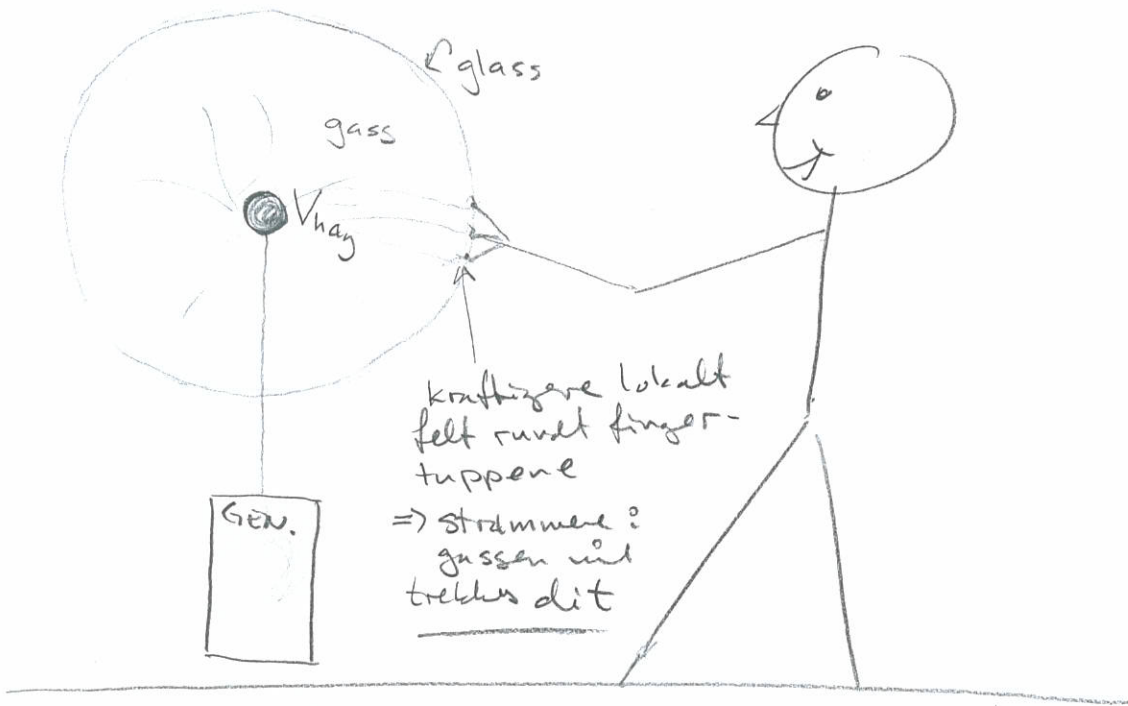
Lokalt felt sterkere rundt a enn rundt A

$E_s = \frac{2V_0}{a}$

$E \propto S_s!$

$\Rightarrow$  LYNET VIL "SLÅ MED" (egentlig "SLÅ OPP" der)

VAN DER GRAAF GENERATOR

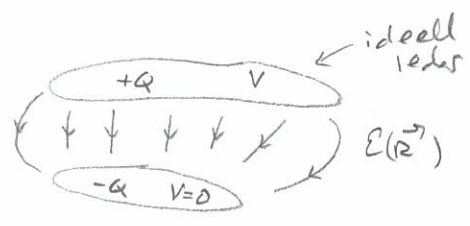


kraftigere lokalt felt rundt fingertuppene

$\Rightarrow$  strømmene: gassen vil trekkes dit

# KAPASITANS (2.8)

"Evnen/kapasiteten til et system til at lagre ladning (energi)"



DEFINISJON:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.121)$$

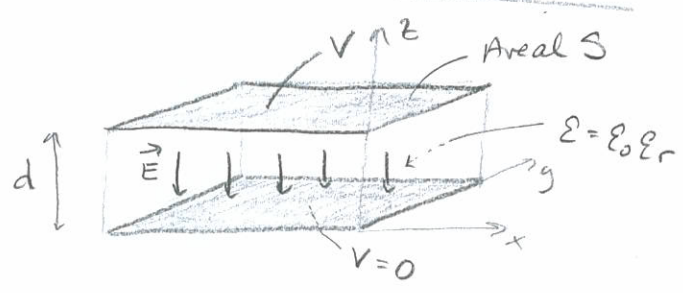
coulomb  
↓  
[C] = F =  $\frac{C}{V}$   
farad      volt

Kapasitans  
→ Bare avhengig av geometriske størrelser og materialparametere  $\epsilon(r)$

## KRETSLIGNING

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = C \frac{dV}{dt}$$

## PARALLELLPLATE KONDENSATOR



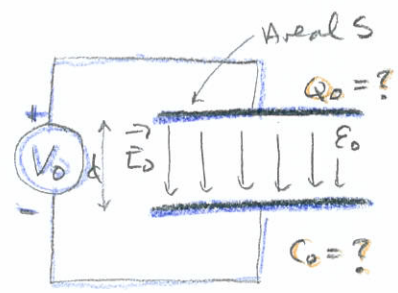
$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \quad (2.127)$$

Større areal ⇒ kapasitansen øker

Mindre avstand ⇒ ———

Feltet inni:  $\vec{E}(z) = -\frac{V}{d} \hat{z}$  (2.125)

## EFFEKTEN AV Å ENDRE MATERIALE INNE I KONDENSATOREN



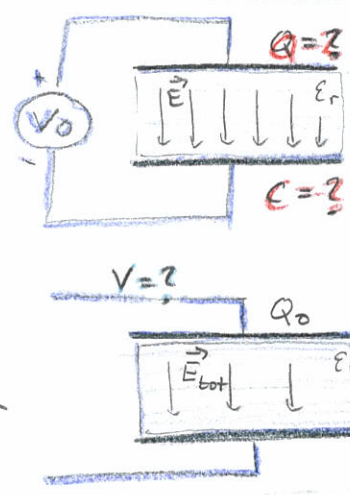
$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$\vec{E}_0 = -\frac{V_0}{d} \hat{z}$$

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

$$Q_0 = S D_0$$

$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$   
 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$   
+ ta vekt spenningskilden



summe

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = \epsilon_r C_0$$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{d} \hat{z} = \vec{E}_0 (!)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_r \vec{D}_0$$

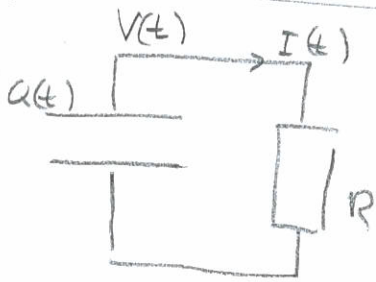
$$Q = S D = S \epsilon_r D_0 = \epsilon_r Q_0$$

$$E_{tot} = E_0 - E_{ind} = ?$$

$$V = \frac{Q_0}{C} = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q_0}{C_0} = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

$$\vec{E}_{tot} = -\frac{V}{d} \hat{z} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0$$

UTLADNING GJENNOM EN KONDENSATOR

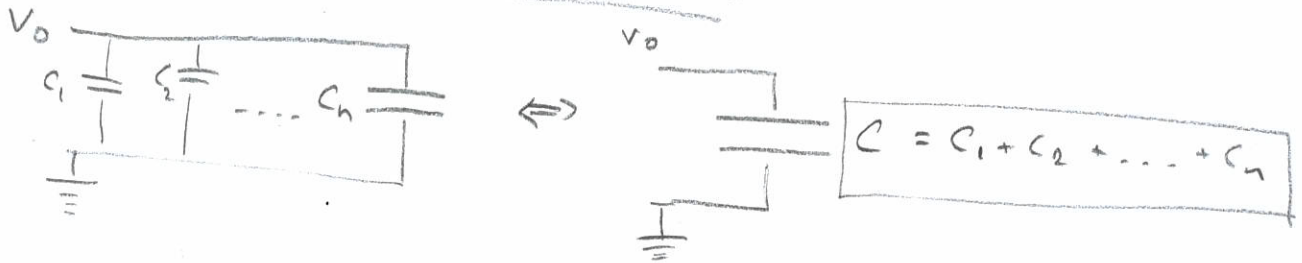


$t=0 : V(0) = V_0$

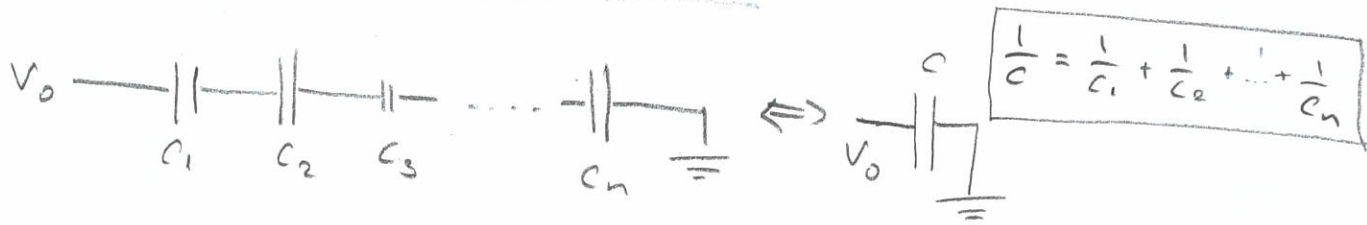
$t \neq 0 : I(t) = -C \frac{dV(t)}{dt} = \frac{V(t)}{R}$

$\Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = -\frac{1}{CR} V(t) \Rightarrow V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

PARALLELKOBLEDE KONDENSATORER

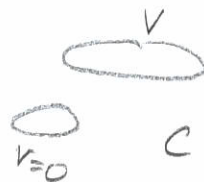


SERIEKOBLEDE KONDENSATORER



ENERGI I ELEKTRISKE FELT 2.9

ENERGI I EN KONDENSATOR



$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.141)$

PARALLELLPLATEKONDENSATOR :

$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d$

ENERGITETTHET

I ELEKTRISKE FELT :

$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (2.143)$

$\Rightarrow w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (2.144)$

STRØM & STRØMTETTHET (2.10)

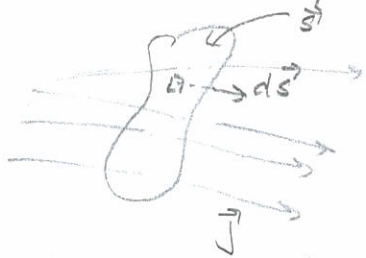
Def STRØMTETTHET:  $\vec{J} = Nq \vec{v}_d$  (2.155)

driftshastighet

↳ antallstetthet av ladningsbærere  $n$

Def. STRØM (av ladningsbærere gjennom et flateareal)

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{dQ}{dt} \quad (2.157)$$



$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.158)$$

Siemens

ELEKTRISK LEDNINGEVNE

$\sigma$ : konduktivitet  $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m}$

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ : resistivitet  $[\rho] = \Omega m$

Ohm's lov:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

(2.160) Generelt:  $J_i = \sigma_{ij} E_j$

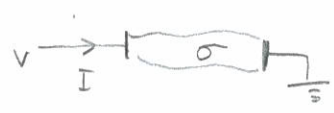
ENERGI TAP P.G.A. STRØM I LEDENDE MATERIALE

Pr volumenet:

$$P_J = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (2.162)$$

Ohmsk / Joulsk tap

RESISTANS



$$R = \frac{V}{I} \quad (2.163)$$

Effektforbruk i en resistans

$$P_J = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad (2.167)$$

LADNINGSBEVARELSE

$$\Rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV \quad (2.178)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt} \quad (2.182)$$

1 EL-SMÅKROEN  
[ingen endringer m/tid]

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Kirchhoff's strømlov:  $\sum_{i=1}^n I_i = 0$



# OPPSUMMERING ENHETER I EL MAG

TFE 4120-2018 XX

## Ligninger

Kraft:  $F = ma = qE$

Arbeid/  
energi:  $W = \frac{1}{2}mv^2 = qV$

Kapasitans:  $C = \frac{Q}{V}$

Strøm:  $I = \frac{Q}{T}$

Resistans:  $R = \frac{V}{I}$

## Enheter

$$N = \text{kg m/s}^2 = C \frac{V}{m}$$

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = CV$$

$$F = \frac{C}{V}$$

$$A = \frac{C}{s}$$

$$\Omega = \frac{V}{A}$$

GRUNNEHETER I SI-SYSTEMET: A, kg, m, s

AVLEDEDE ENHETER:

El-Mag:

$$C = As$$

$$V = \frac{\text{kg m}^2}{As^3}$$

$$F = \frac{A^2 s^4}{\text{kg m}^2}$$

$$\Omega = \frac{\text{kg m}^2}{A^2 s^3}$$

Generell:

$$N = \text{kg m/s}^2$$

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2$$

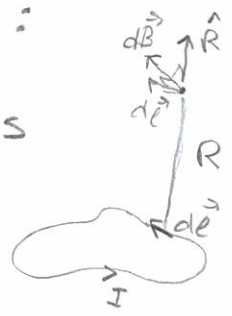
$$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3$$

Siemens  $\rightarrow S = \frac{1}{\Omega}$

Magnetisk kraft (3.1)

MAGNETISK FLUKSTETTHET FRA LUKKET STRØMSLEDE:  $\mu_0$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^2} \quad (3.2) \quad \leftarrow \text{Biot-Savart's lov}$$



Magnetisk permeabilitet:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2}$

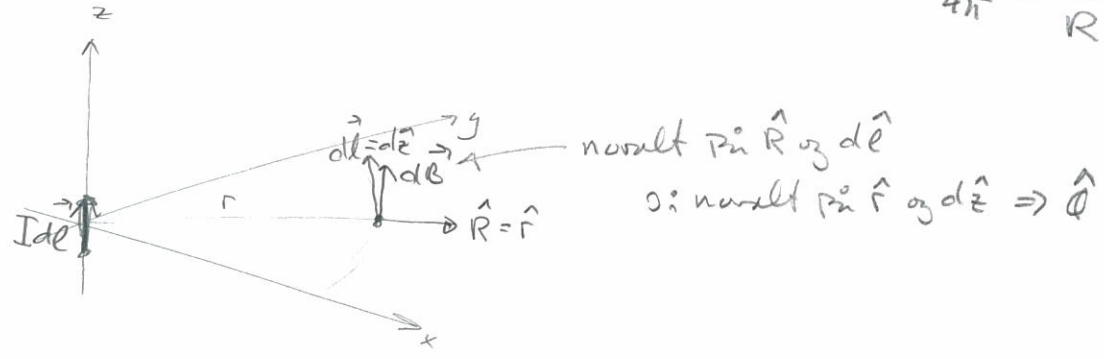
KRAFT PÅ ELEKTRISK LADNING, q, I BEVEGELSE:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.1) \quad [B] = T \quad (\text{Tesla})$$

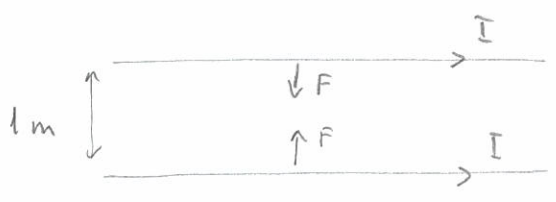
$$[B] = \frac{N}{C \frac{m}{s}} = \frac{N}{As \frac{m}{s}} = \frac{N}{Am}$$



FØR ET INFINITESIMALT STRØMELEMENT  $\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^2}$



DEFINISJON AV AMPERE

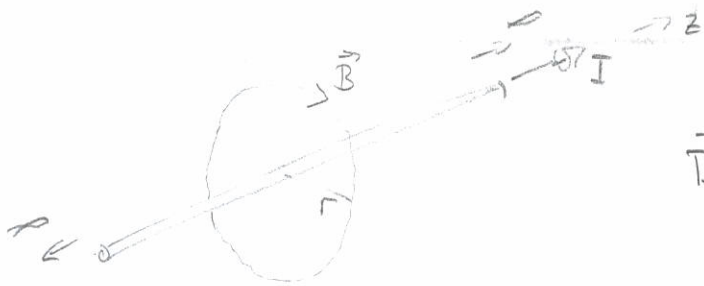


1A = Den strømmen som skal til for at tiltrekningen mellom to ledere i avstand 1m blir

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$$

(Pr lengdeenhet)

$\vec{B}$ -felt RUMDT VENDINGA LANG LEDNING



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

10 meter unna er  $\vec{B}$ -felt fra

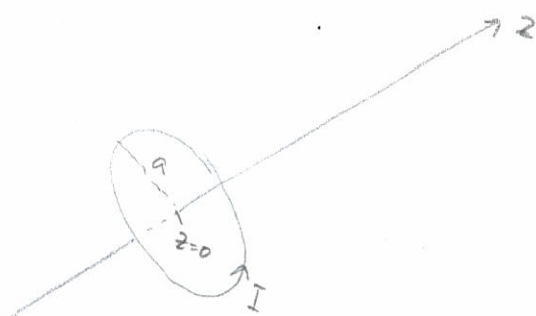
Hvassvann (1000A)

$$|B| \sim 2 \cdot 10^{-5} T \sim \frac{1}{2} B_{jord}$$

MAGNESIUMELEKTRO-  
LYSEFABRIKKABLEVR  
(200.000 A)

$$|B| \sim 4 mT \sim 100 B_{jord}$$

$\vec{B}$ -felt FRA EN SIRKULÆR STRØM SLEIFE (= MAGNETISK DIPOL)



På akseu:

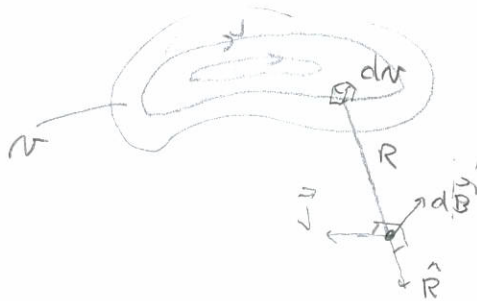
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$a = 1 \text{ cm}$$

$$I = 1 \text{ A}$$

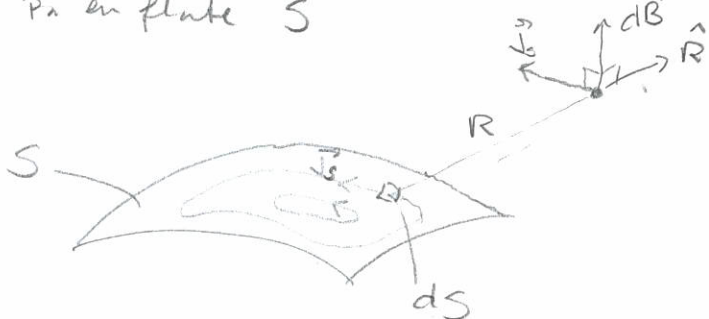
$$|B| \sim B_{jord} \text{ (midt i } \odot \text{)}$$

$\vec{B}$ -felt på grunn av en STRØMTETTHET inni et volum V:



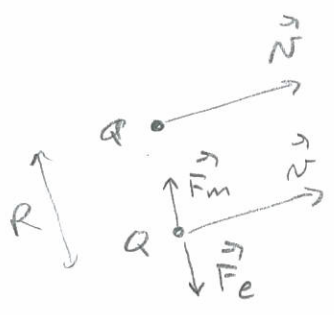
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dv \times \vec{R}}{R^3}$$

$\vec{B}$ -felt på grunn av FLATESTRØMTETTHET på en flate S



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s dS \times \vec{R}}{R^2}$$

KVALITATIV SAMMENLIGNING AV STR PÅ ELEKTRISKE, MAGNETISKE KREFTER



$$F_m = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{4\pi R^2}$$

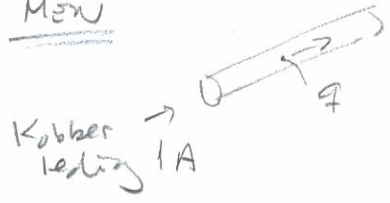
$$F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = \frac{1}{c^2}$   
 Lyshastighet i vakuum

For to enkeltpartikler or  $F_m \ll F_e$  med mindre de beveger seg opp mot relativistisk hastighet

Men

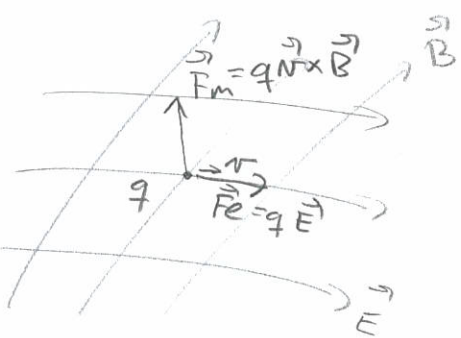


$$v = 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$N = 8.45 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3$$

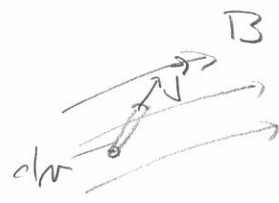
Selv om  $\frac{F_m}{F_e} \sim 10^{-21}$  får vi signifikante magnetiske krefter selv for ladninger med små hastigheter.

LORENTZ - KRAFTEN



$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.18)$$

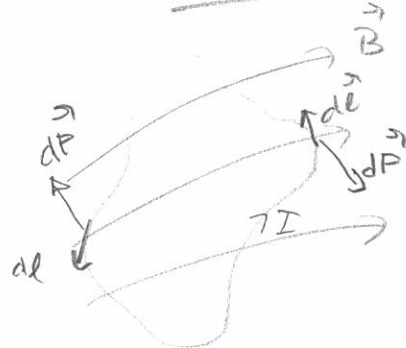
MAGN KRAFT PÅ STRØMELEMENT



$$d\vec{F} = \vec{J} d\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.19)$$

$$= I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.20)$$

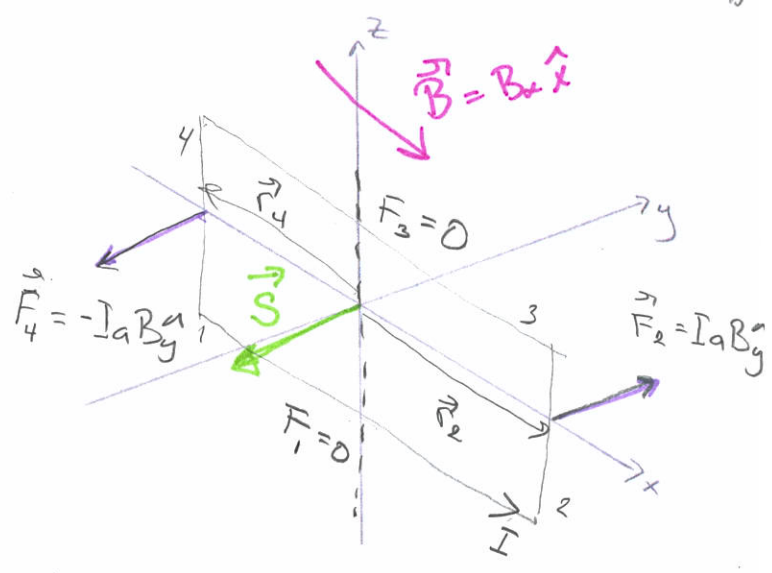
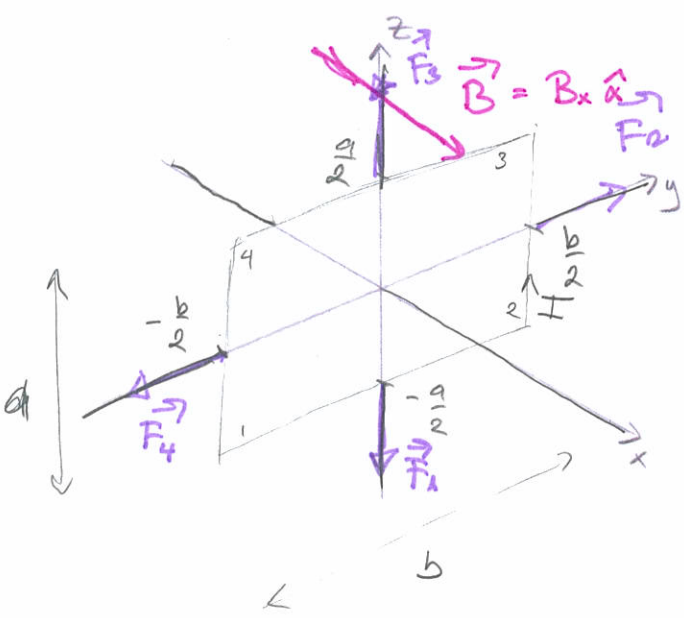
MAGN. KRAFT PÅ STRØMSLØYFE



$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (3.21)$$

Kan ha netto kraft?  
Kan ha moment!

$\vec{B}$ -FELT!



$$\vec{F}_1 = Ib \hat{y} \times B_x \hat{x} = -Ib B_x \hat{z} = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_2 = Ia \hat{z} \times B_x \hat{x} = Ia B_x \hat{y} = -\vec{F}_4$$

Netto kraft = 0  
Dreiemoment = 0

Netto kraft = 0  
Dreiemoment  $\neq 0$

$$\vec{T} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

$$= \frac{b}{2} \hat{x} \times Ia B_x \hat{y} + (-\frac{b}{2} \hat{x}) \times (-Ia B_x \hat{y})$$

$$= ab I B \hat{z}$$

Definerer magnetisk moment (dipolmoment) til sløjfen:

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

↳ længde: arealet til sløjfen

retningen: "højrehandsregel"

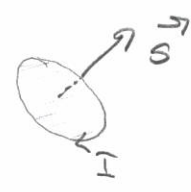
$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

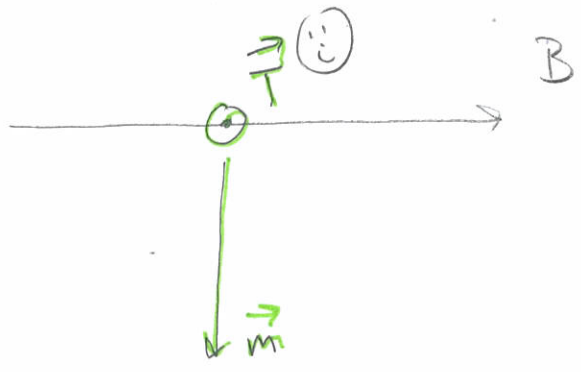
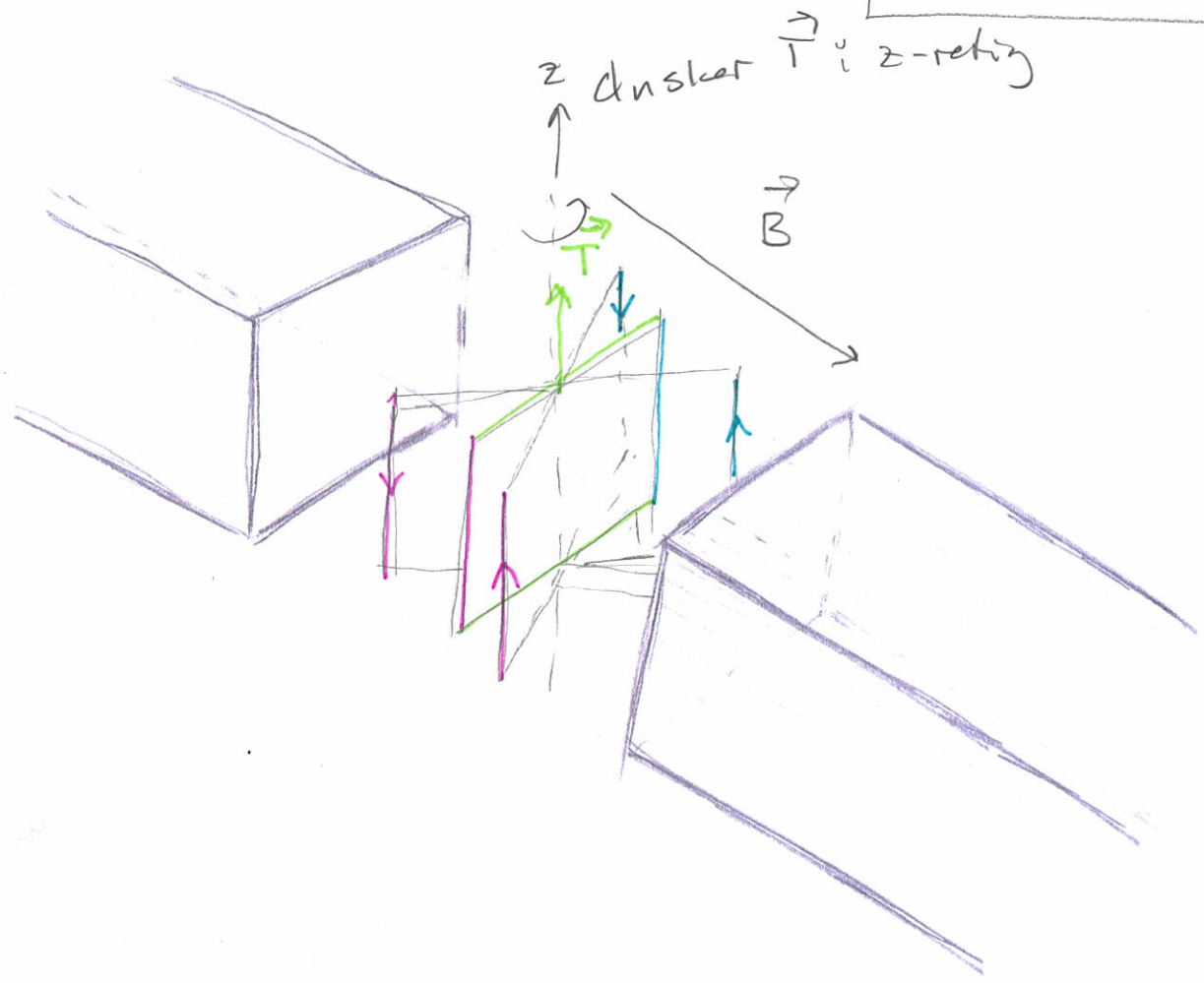
$$= I \vec{S} \times \vec{B}$$

eksemplet vort:

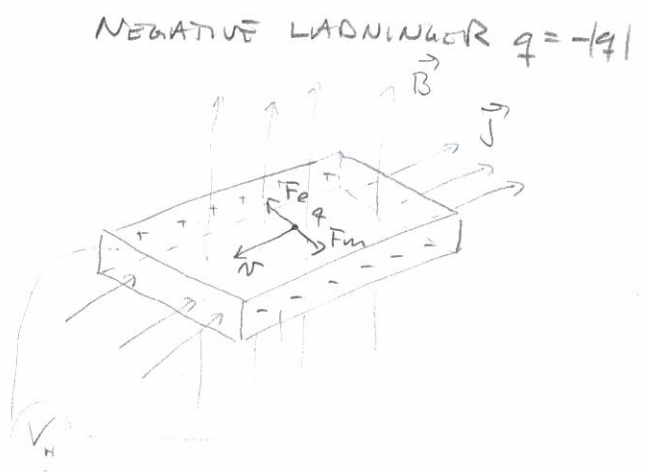
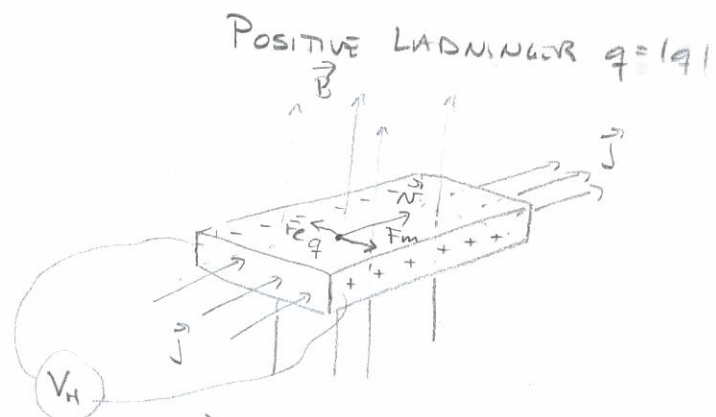
$$\vec{T} = I(-ab \hat{y}) \times B_x \hat{x}$$

$$= Iab B_x \hat{z}$$





HALL-EFFEKT



$\vec{F}_m = q\vec{n} \times \vec{B}$      $\vec{F}_e = q\vec{E}$

$\vec{E} = n\vec{B}$  // Likevekt

$V_H = \vec{E}a = naB$

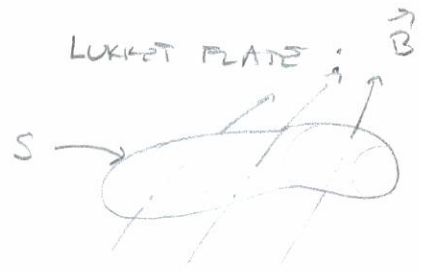
$V_H = -naB$

↳ motsatt fortegn på spenning

MAGNETISK FLUKS



$\Phi_s = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$  (3.36)



$\Phi_s = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  (3.37)

For  $\vec{B}$  som oppfyller Biot-Savarts lov

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$  (3.39)

Maxwell # 4  
 ⇒ MAGNETISKE MONOPOLER  
 FINNS IKKE (☹)

VEKTORPOTENSIAL ( $\vec{A}$ )

Siden  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  Overalt

⇒  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

For vektorpotensialet gjelder da:

$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} dV}{r}$  (3.42)

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dV}{r}$

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{e}}{r}$

5/3  
2018

AMPÈRE'S LOV FOR KONSTANTE STRØMMER (3.4)

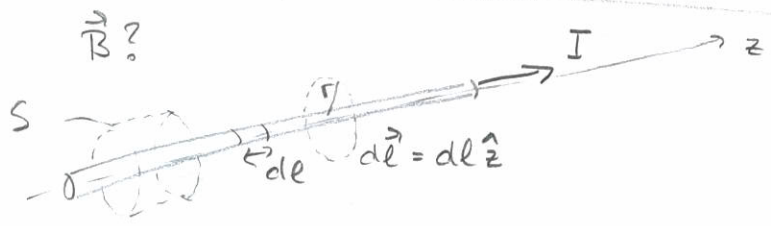


Sirkulasjon av magnetisk flukstetthet rundt en lukket sløyte

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

Total strøm gjennom S

$\vec{B}$ -FELT RUNDT LANG, RETT STRØMFØRANDE LEDER



Symmetribetraktninger:

1) Biot-Savart's lov  $d\vec{B} \propto d\vec{\ell} \times \hat{r}$   
 $\Rightarrow d\vec{B} \perp \hat{z} \Rightarrow B_z = 0$

2) Sylinderflate S; hvis  $B_r \neq 0$

$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \neq 0 \Rightarrow B_r = 0$   
 Lilleok

3)  $B_\phi$ ? : må være symmetrisk & uavhengig av  $\phi$  &  $z$   
 $\vec{B} = B_\phi(r) \hat{\phi}$

BRUK Ampère's lov på sløyte C

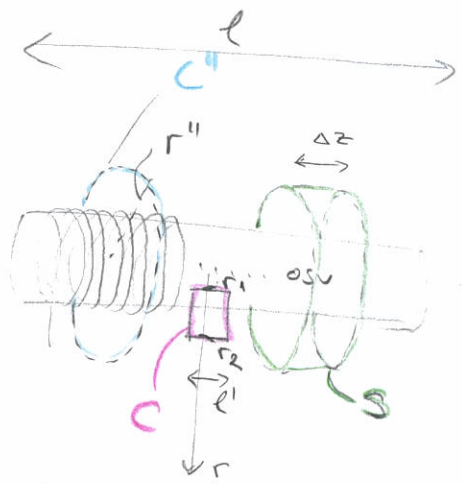
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$\Rightarrow B_\phi(r = \text{konst}) \int_C dl = B_\phi 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$



B-FELT RUMDT SOLENOIDENE

Antar: Solenoiden er  $\infty$  lang  
 Ellers vi er langt fra endepunktene



# viklinger: N  
 Avstand mellom viklinger: Δ = l/N

Symmetri betraktninger:

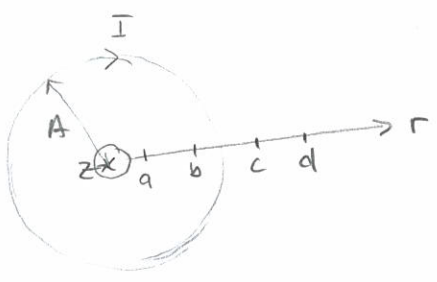
1) Antar  $B_\phi \neq 0$ , må ha  $B_\phi$  uavhengig av  $\phi$   
 Bruk Ampère's lov på sløyte  $C''$  → parallell med strøm i høyre => gir ingen strøm gjennom  $C''$   

$$\oint_{C''} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int B_\phi r'' d\phi = 2\pi B_\phi r'' = \mu_0 I = 0 \Rightarrow B_\phi = 0$$

2) Antar  $B_r \neq 0$ , må være uavh. av  $\phi$   
 Bruk:  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_r \int dS + \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  (må være)  
 Sylindervegger = 0 hvis  $\Delta z \rightarrow 0$   

$$\Rightarrow B_r = 0$$

1) + 2)  $\Rightarrow \vec{B} = B(r) \hat{z}$



Bruk Ampère's lov på integrasjons sløyte  $C$ :

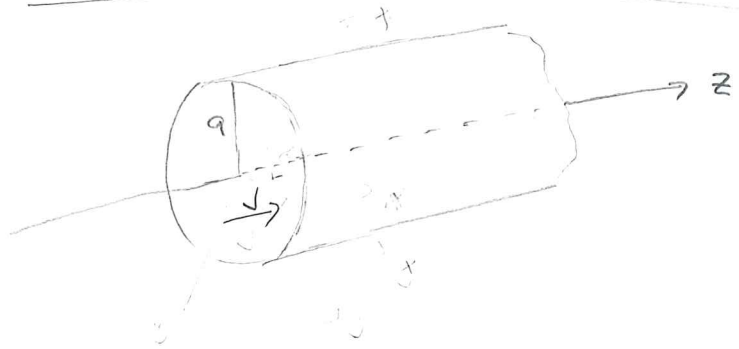
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$r_1 = a, r_2 = b$ : hele  $C$  er inni solenoiden  $\Rightarrow$  ingen strøm gjennom  $C$   
 $B_z(a)l - B_z(b)l = 0 \Rightarrow B_z(r) = \text{konstant} = B_z$  for  $r < A$

$r_1 = b, r_2 = c$ :  
 $B_z l - B_z(c)l = \mu_0 \frac{l}{\Delta} I \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{\Delta} = \frac{\mu_0 I}{l} N$  for  $r < A$

$r_1 = c, r_2 = d$ :  
 $B_z(c) - B_z(d) = 0 \Rightarrow B_z(r) = \text{konstant} = 0$  for  $r > A$   
 $\Rightarrow B = 0$  når  $r \rightarrow \infty$

$\vec{B}$ -felt INNEN EN STRØMFØRANDE LEDER



Strømteitet inni ledere:  

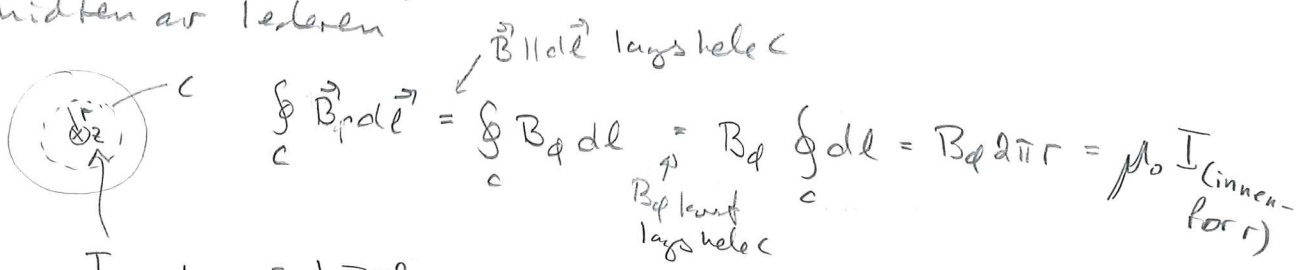
$$\vec{J} = \begin{cases} J_0 \hat{z}, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$
 Konstant (1)

ANALYSE AV SYMMETRIER I  $\vec{B}$ -felt

- 1) Må være uavhengig av  $\phi$  (symmetri)
- 2) Kan ikke ha z-komponent ( $d\vec{B} \propto \vec{J} \times \hat{r} \Rightarrow d\vec{B} \perp \vec{J} = J_0 \hat{z}$ )
- 3) Kan ikke ha  $r$ -komponent ( $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_r \int ds \neq 0$  ikke ok)

$\Rightarrow \vec{B} = B(r) \hat{\phi}$

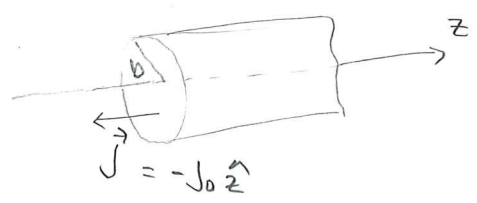
Bruk Ampère's lov på en sirkel med radius  $r$  sentrert i midten av ledere



$B_{\phi} 2\pi r = \mu_0 J_0 \pi r^2$

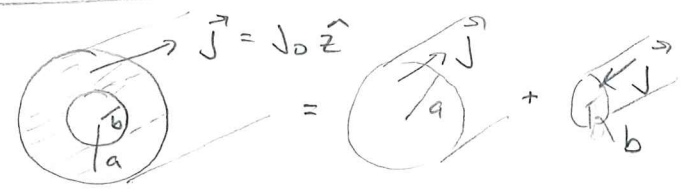
$B_{\phi} = \frac{\mu_0}{2} J_0 r$

NY LEDER MED STRØM I ANDRE RETNINGEN MEN SAMME STRØMTETTHET (1)



$\Rightarrow B_{\phi, b} = -\frac{\mu_0}{2} J_0 r$

LEDER MED HULL I MIDTEN

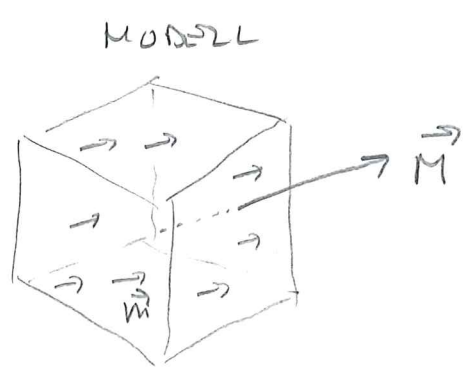
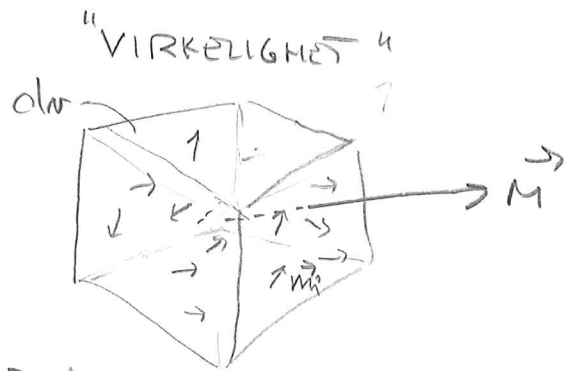


$\Rightarrow \vec{B}$  inni hullet  
 $= B_{\phi, a} + B_{\phi, b} = \underline{\underline{0}}$  (1)

# MAGNETISKE FELT I MATERIALER

Materialer kan bestå av molekyler / atomer som har dipolmoment. Hva skjer ved Amperes lov i slike materialer?

Trenger en modell for å kunne regne på dette



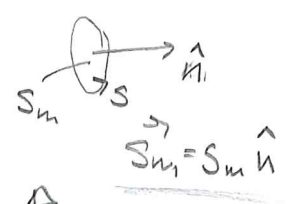
Definerer MAGNETISERING:

$$\vec{M} = \frac{\sum_{dV} \vec{m}_i}{dV} \quad (3.76)$$

$$\vec{M} = N \vec{m} \quad (3.77)$$

Lantall magn. dipoler pr volum enhet.

$$V \vec{m} = I \vec{S}_m$$



SE PÅ MATERIALE m / "PRI" / "MAKROSKOPISK" STRØMTETTHET  $\vec{J}$  + MAGNETISERING  $\vec{M}$  BESKREVET AV MODELLEN  $\vec{M}$

⇒ Amperes lov:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 [I_{fri} + I_{magn. dipoler}]$$

$$= \mu_0 [ \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_C \vec{M} \cdot d\vec{e} ]$$

DEF  $\vec{H}$ -FELT:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (3.85)$$

Amperes lov for materialer

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{e} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad 3.84$$

Maxwell #2  
← integral form

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad 3.89$$

← differential form

For mange materialer gjelder

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Materialer hvor dette er tilfelle er LINEARE

↳ magnetisk susceptibilitet

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$\mu_r$ :  
relativ  
permeabilitet

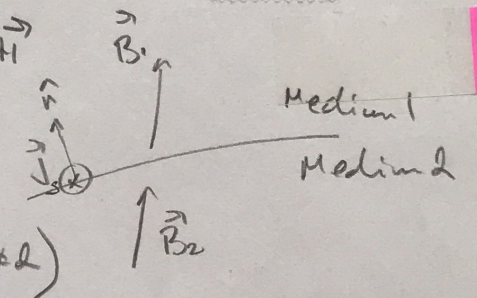
absolutt  
permeabilitet

Materiale	Rel. permeabilitet	Materiale	Rel. permeabilitet
gull	0.99996	luft	1.0000004
sølv	0.99997	aluminium	1.00002
kobber	0.999991	jern + 4% silisium	7000
vann	0.999991	rent jern (0.04% forurensn.)	$2 \cdot 10^5$
tre	0.999995	supermalloy	$\sim 10^6$
vakuum	1		

GRENSEBETINGELSER FOR  $\vec{B}$  og  $\vec{H}$

$B_{1n} = B_{2n}$  (Vises fra Maxwell #4)

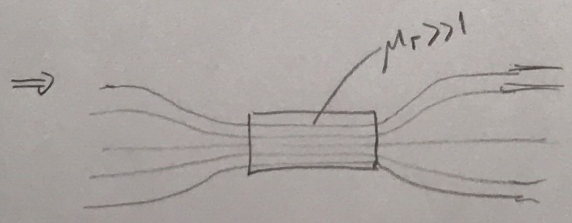
$\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{J}_s \times \hat{n}$  (Vises fra Maxwell #2)



12/3  
2018

$$\Rightarrow \frac{|\vec{B}_{1t}|^2}{|\vec{B}_{2t}|^2} = \frac{B_{2n}^2 + \mu_0^2 H_{2t}^2}{B_{2n}^2 + \mu_0^2 \mu_r^2 H_{2t}^2}$$

For  
- små normalkomp.  $\Rightarrow \frac{|B_{1t}|}{|B_{2t}|} \sim \frac{1}{\mu_r} \ll 1$   
-  $\mu_r \gg 1$

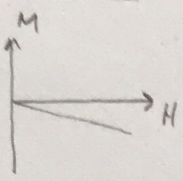


Et materiale med  $\mu_r \gg 1$  vil "fange"  $\vec{B}$ -feltlinjene

# MAGNETISKE MATERIALER (3.7)

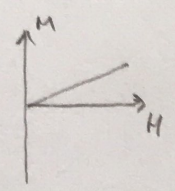
## DIAMAGNETISK MAT.

$\mu_r < 1$   
 eg: sølv  
 vann  
 $\chi_m < 0$



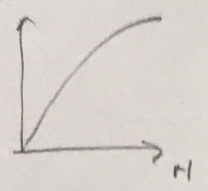
## PARAMAGNETISK MAT.

$\mu_r > 1$   
 eg: aluminium  
 luft  
 $\chi_m > 0$



## FERROMAGNETISK MAT.

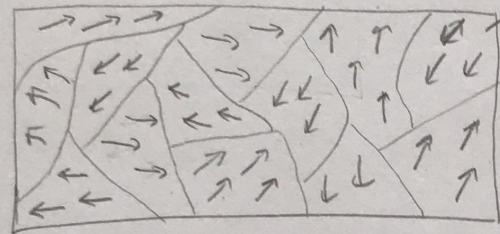
$\mu_r \gg 1$   
 ulinear



Lineære materialer  
 $\mu_r \approx 1$

$\mu_{eff}$  også avh. av "historie"  
 $\Rightarrow$  MAGN HYSERESE

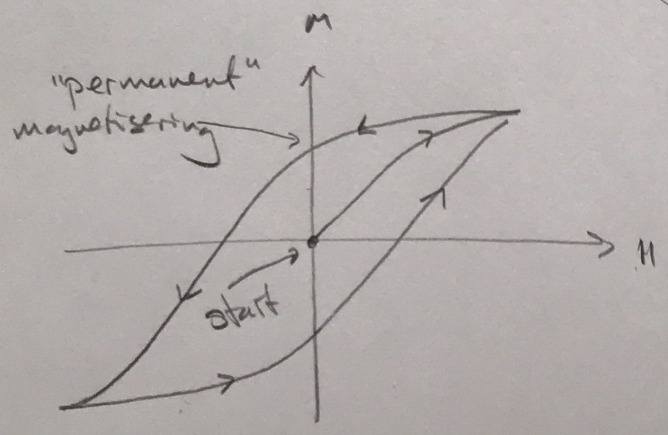
## Ferromagnetiske materialer



### Weiss domener

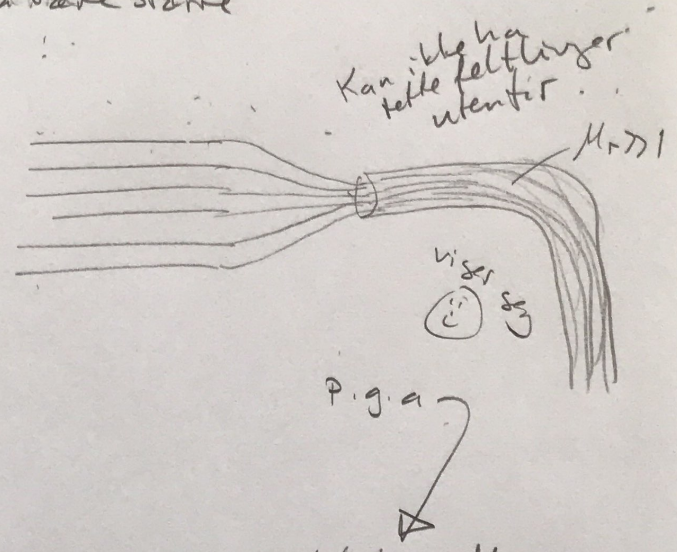
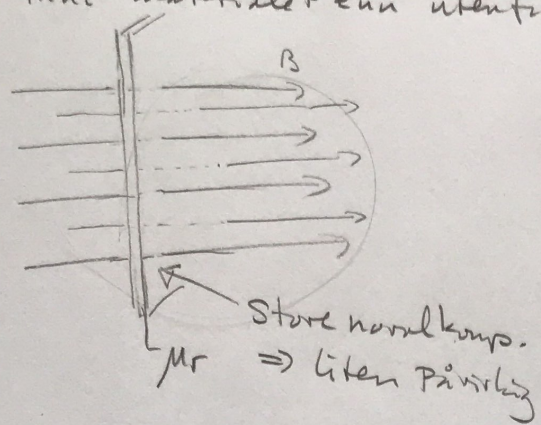
- $\rightarrow$  Lokal magnetisering i små domener på grunn av kvantemekaniske effekter.
- $\rightarrow$  Nabo domener tenderer til å ha motsatt rettet magnetisering
- $\rightarrow$  Påtrykt felt vil øke størrelsen på domener magnetisert parallelt med feltet
- $\rightarrow$  Når feltet skrues av tar det litt tid før magnetiseringen er tilbake til utgangspunktet

### Hysteresekurve



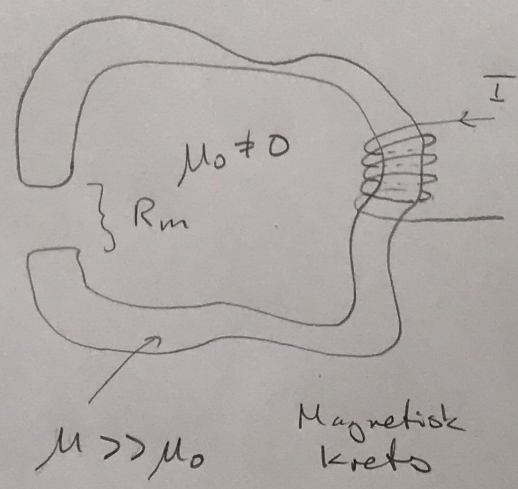
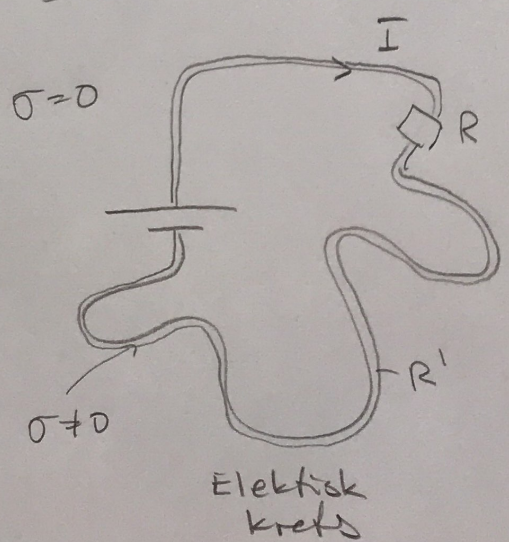
MAGNETISKE KRETSLØR

Grensebetingelsene for  $B \approx \mu H$  note:  
 små normal komp  $\rightarrow B$  må være større  
 inn i materialet enn utenfor:



SAMMENLIGNING AV SAMMENHENGER FOR ELEKTISKE OG MAGN. STRØMRETTET:

	ELEKTRIK		MAGNETISK	
Strømtetthet	$\vec{J}$	I	$\vec{B}$	Magn. flukstetthet
Strøm	$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$	II	$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	Magn. fluks
For konstante strømmer:	$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$	III	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	Alltid!!
	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	IV	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	
	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{emf}$	V	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$	
Resistans:	R	VI	$R_m$	Reluktans



Emf = elektromotorisk spenning

Summen av alle elektriske krefter som virker på ladningene i kretsen

$$e = \oint_{\text{krets}} \vec{f} \cdot d\vec{l} \quad (4.1) \quad \text{elektrostatisk!}$$

Hvor:  $\vec{f}$  = (ekstern) kraft pr ladning

→ emf:

"alt som vil bidra som kilder i kretsen og få elektroner (ladningsbærere) til å bevege seg rundt i kretsen ⇒ strøm 😊"

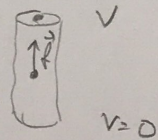
I elektrodynamikk kan  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$

⇒ må ta med bidrag fra  $\vec{E}$  til elektromotorisk spenning:

$$e = \oint_{\text{krets}} (\vec{f} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} \quad (4.3)$$

Eks

I et batteri virker det en elektrokjemisk kraft på ladningene i batteriet som gir en potensialforskjell mellom batteripolene:  $V$

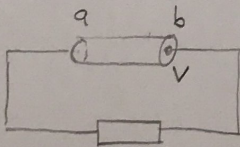


Denne må være (pr ladning)

$$\vec{f} = -\vec{E}$$

Hvor  $\vec{E}$  = feltet inne i batteriet p.g.a ladningsseparasjon:

Hvis batteriet står i en krets, hva blir da emf i denne kretsen?

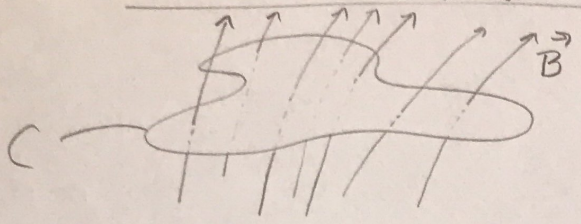


$$\begin{aligned} e &= \oint_{\text{krets}} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{batter}} \vec{f} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{resten av kretsen}} \vec{f} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^b \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_a^b (-\vec{E}) \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{et ingen elektriske krefter der}) \\ &= \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = V \end{aligned}$$

↑ definisjonen av potensialforskjell

⇒ emf:  $e = V$  😊

FARADAY'S INDUKSJONSLOV

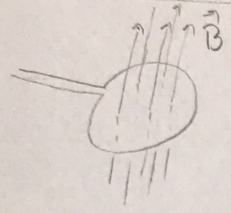


Integral form:

$$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{v} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.8)$$

Differential form:  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (4.14) Maxwell #3

FARADAY'S LOV FOR EN SPØLE MED N VIKLINGER



Fluks i vikling nr i:  $\Phi_i \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}$

N-viklinger:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \sum_N \Phi_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.11)$$

$\Phi$ : total fluks  
 $= \sum_{i=1}^N \Phi_i$

Hvis lik fluks i alle vinkl:

$\Phi = N \Phi_i$

↑  
 fluks i en av vinkl.

FOR EN KRETZ MED

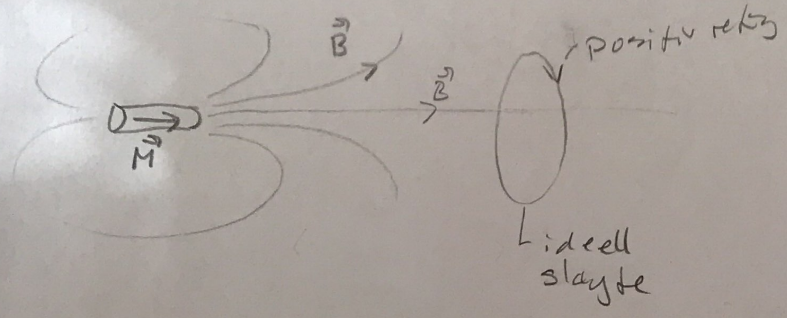
- ideell spenningskilde / batteri w/ total potensial  $V_b$
- Komponenter w/ potensial fall,  $V_{comp i}$

$$\Rightarrow V_b - \sum_i V_{comp i} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.20)$$

19/3  
2018

LENTZ' LOV

"LEDENDE SLØYFER ER KONSERVATIVE OG LIKER IKKE ENDRING"



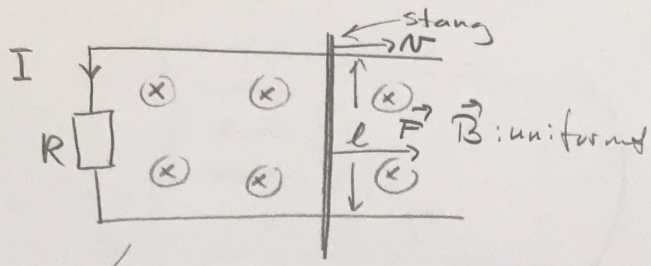
Når disse to nærer seg hverandre øker fluksen gjennom sløyta

$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow \mathcal{E} < 0$

$\Rightarrow$  Det induseres en strøm i negativ retning som vil forsøke å motvirke fluksestøt



EKS: Kraft på bevegelig stang i  $\vec{B}$ -felt



- 1) Strøm i sløyten?
- 2) Effekten: motstanden R?

Krets:  $\sum \text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = RI$

1) Vi finne fluxendring for å finne strømmen I:

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = -BS$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{ds}{dt} = Blv$$

$$I = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}$$

2) Effekt: motstanden:

$$P = RI^2 = \frac{(Blv)^2}{R}$$

How kommer denne fra?

Kraft på stanga p.g.a strømmen I og  $\vec{B}$ -feltet:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

virker normalt på hverandre mot venstre

For at stanga skal bevege seg med konstant hastighet, må kraften  $F$  som trekker på den være lik

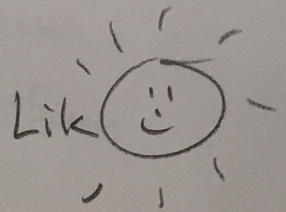
$$|\vec{F}_m| = \left| \int_e d\vec{F}_m \right| = I l B$$

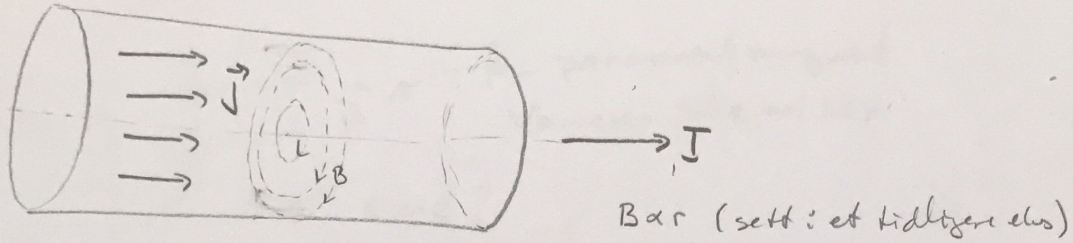
$\Rightarrow$  Arbeidet som utføres av  $\vec{F}$  i løpet av tiden  $dt$ :

$$W = \int_{v_i} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = I l B v dt$$

$\Rightarrow$  Effekten:

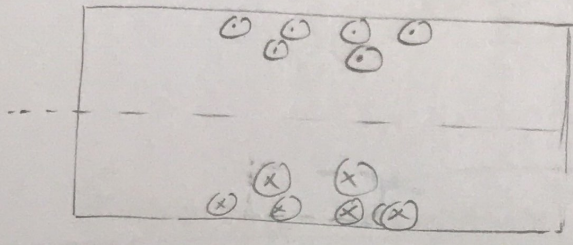
$$P = \frac{W}{dt} = I l B v = \frac{(Blv)^2}{R}$$





Anta uniform strømfordeling  
 $\Rightarrow \vec{B}$  som sirkulerer

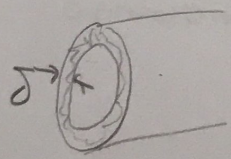
Hvis  $\vec{J}$  er vekselstrøm  $\Rightarrow$  Fluksendring gjennom flater parallelt med tverrsnittet av lederen



P.g.a Lenz' lov vil det settes opp et  $\vec{B}$ -felt som vil motvirke fluksendringen

Genereres en strøm motsatt rettet  $\vec{I}$   
 Vil søke å oppri  $\vec{B} = 0$  inne i lederen, for da vil ikke tidsvariasjonen i  $\vec{I}$  gi noen fluksendring midt i lederen  
 Strømmen vil konsentreres rundt kanten av lederen.

Heter: SKINNEEFFEKT



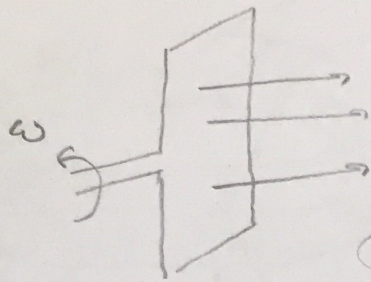
Kan regne på at tykkelsen på det strømferende sjiktet er gitt av:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0}}$$

↑  
frelansen

For Cu:

- nett-frelans  $\rightarrow f = 50 \text{ Hz} \Rightarrow \delta = 1 \text{ cm}$
- radio-frelans  $\rightarrow f = 100 \text{ MHz} \Rightarrow \delta = 5 \mu\text{m}$

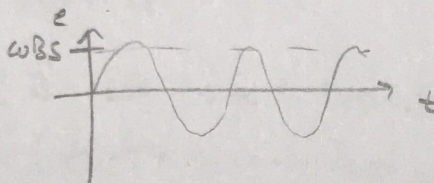


for permanent magnet  
Varierer ikke med tid

emf?

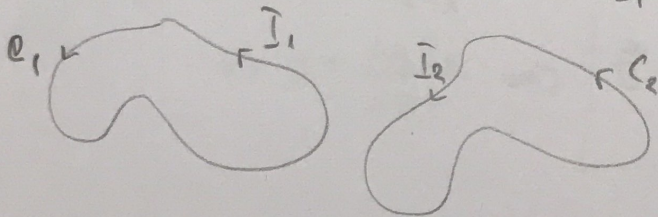
$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \vec{B} \cdot \int_s d\vec{s} = \vec{B} \cdot \vec{s} = BS \cos \omega t$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin \omega t$$



GLÆDSIDIG INDUKTANS

↳ Siemne om: "Hvor nært koblet er to spoler, magnetisk sett"



DEFINERER:

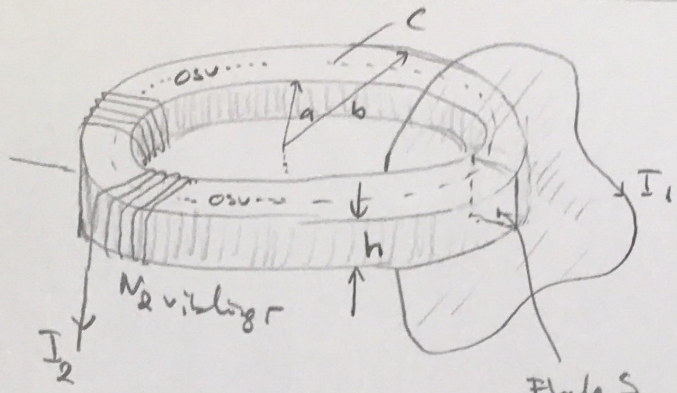
$$\Phi_{12} = \text{Total flux i sløjfe 2 p.g. a } I_1$$

GLÆDSIDIG INDUKTANS:  $L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$

Blir uafhængig af  $I_1$ . Kun afhængig af geometri og materialparametre (analogt til kapacitans)

DET VISER SEG:  $L_{12} = L_{21}$  (vises i en øving)

EKS: TOROIDE M/ REKTANGULÆRT TVERSNITT



Finne gjensidig induktans  $L_{12}$

$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$  → Total fluks:  $2 \pi \cdot a \cdot$   
 "vanstelt" strømslagte  $I_1 \Rightarrow \mu N_1 I_1$

MEN

Flate S som defineres av en flate omsluttet av strømslagten  $I_1$

$L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$  ← lettere å regne ut

$I_2$  vil generere et  $\vec{B}$ -felt inne i toroiden  $\Rightarrow$  fluks gjennom flaten S  $\therefore \Phi_{21}$  (fluks gjennom  $I_1$  på grunn av  $I_2$ )

Må finne  $\vec{B}$ -feltet

- 1) Ampère's lov på integrasjons slagte C :  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{e} = I_{fri} = N_2 I_2$
- 2) Symmetri  $\Rightarrow \vec{H}(r) = H(r) \hat{\phi}$

3)  $H \cdot 2\pi r = N_2 I_2$   
 $\Rightarrow H = \frac{N_2 I_2}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu N_2 I_2}{2\pi r} \hat{\phi}$

4) Finne fluksen gjennom  $I_1 =$  fluksen gjennom S (felt utenfor toroiden = 0)  
 $\Phi_{21} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = h \int_a^b \frac{\mu N_2 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu h N_2 I_2}{2\pi} \ln b/a$

5) GJENSIDIG INDUKTANS :  $L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu h N_2}{2\pi} \ln b/a$

GENERERT FØRMLER VI

$L_{21} = \mu \cdot \text{"geometri"} \cdot N_1 \cdot N_2$

## Gjensidig induktans:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$



$$e_{12} = - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = - \frac{d}{dt} (L_{12} I_1) = - L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

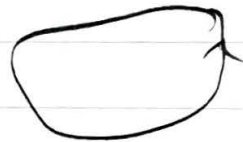
↑ induert emf i sløyfe 2 pga. feltet fra strømmen  $I_1$  (Faradays lov)

## Selvinduktans:

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

← tot fluks i sløyfa/spolen

pga strømmen i den samme sløyfa.



For spole med  $N$  vindinger: " $L = \mu \cdot \text{geometri} \cdot N^2$ "

## Lagret energi i en spole:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

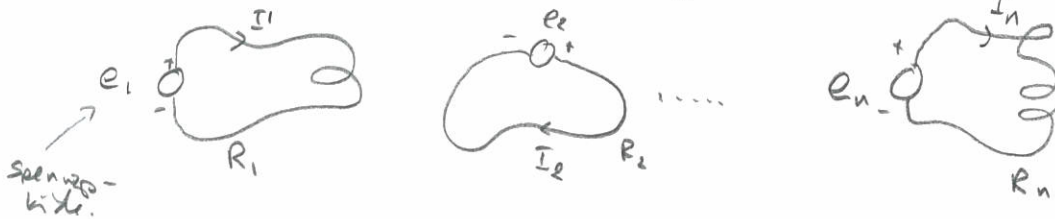
## Energitetthet i magnetiske felt:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (\text{energi/volum})$$

ENERGI I MAGNETISKE FELT

9/4  
2018

System av spoler / strømslagter



Total indusert elektromotorisk spenning i slagte #j:

$$\sum \text{emf} = e_j + \left(-\frac{d\Phi_j}{dt}\right) = R_j I_j$$

Effekt levert av spenningskilde j:  $e_j I_j$

⇒ Arbeid utført av spenningskilde j i løpet av tiden dt:

$$dA_j = e_j I_j dt = \underbrace{R_j I_j^2 dt}_{\text{JOULESK TAP I MOTSTANDEN}} + \underbrace{I_j d\Phi_j}_{\text{ARBEID UTFØRT FOR Å ENDRE FLUKSEN MED } d\Phi_j}$$

Arbeid som trengs for å endre fluksen: ALLE kretser

$$dA_m = \sum_{j=1}^n I_j d\Phi_j \quad \text{Gjelder generelt}$$

For lineære medier:  $d\Phi_j = \sum_{k=1}^n L_{kj} I_k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dA_m &= \sum_{j=1}^n I_j \sum_{k=1}^n L_{kj} dI_k \\ &\stackrel{\text{(regler)}}{=} \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n L_{kj} I_j \right] dI_k \\ &= \frac{\partial W_m}{\partial I_k} \quad \text{hvis} \end{aligned}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j$$

Viser seg at dette er energien som skal til for å etablere alle strømmene  $I_j$  i alle strømslagtere

= LAGRET MAGNETISK ENERGI I SYSTEMET!

VED Å REGNE PÅ MAGNETISK ENERGI TIL EN TOROIDE KAN EN FINNE

Energitettheten til et magnetisk felt :

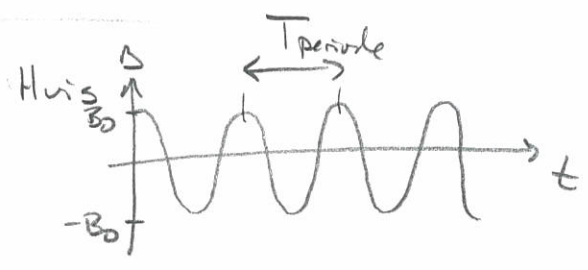
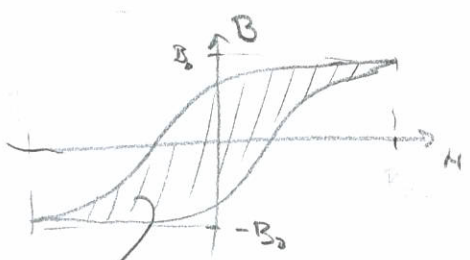
$$w_m = \frac{W_{m, \text{toroide}}}{V_{\text{toroide}}} = \frac{\frac{1}{2} L_{\text{torr}} I^2}{V_{\text{torr}}} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Dette gjelder generelt for  $\vec{B}$ -felt!

MED IKKE-LINEÆRT MATERIALE I TOROIDEN

Kan ikke bruke  $w_m = \frac{1}{2} LI^2$  & gjelder bare for lineære materialer

$$\frac{\text{Tilført magnetisk energi}}{\text{volum}} = H dB$$



A (Arealen innover)

$$\Rightarrow \frac{\text{energitap}}{\text{volum}} = \oint H dB = A$$

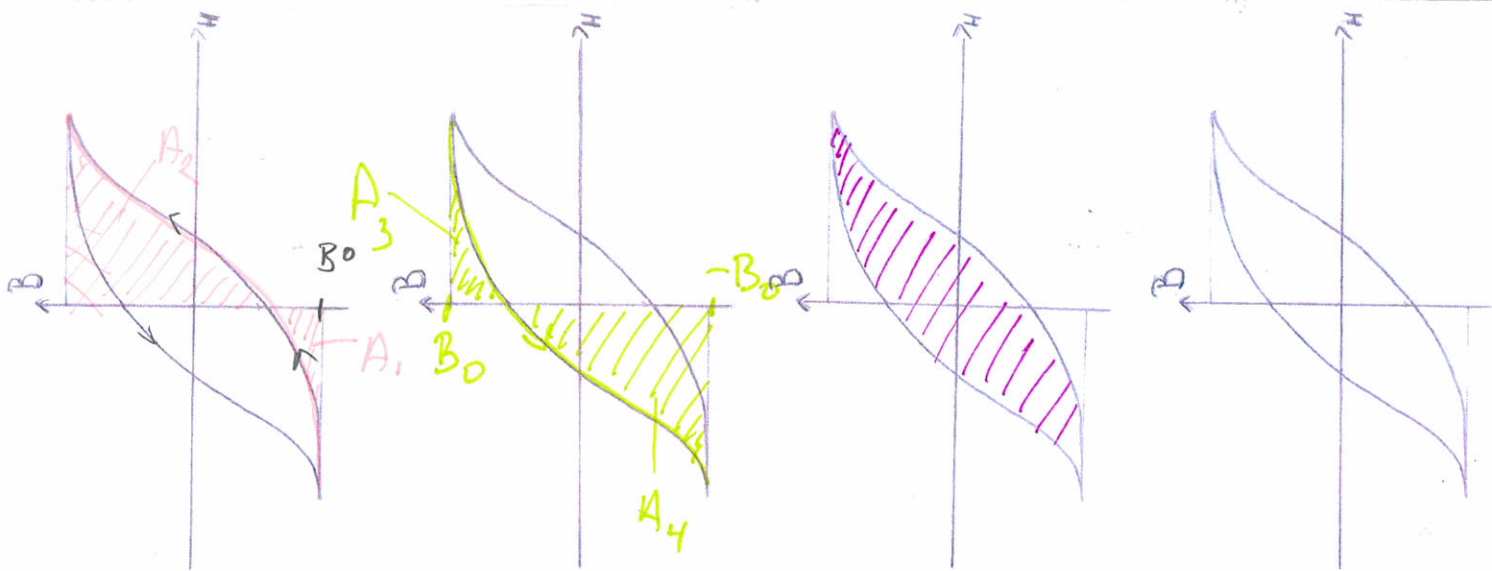
hysteresis-  
kurven

$$\frac{\text{effekttap}}{\text{volum}} = \frac{\text{energitap/volum}}{\text{tid}} = \frac{A}{T_{\text{periode}}} = A \cdot f$$

↑ felnes

Høy felnes = høyt effekttap

[Kort å vite hvis en skal lage en induktans topp....]



Tilført energi  
 Volum =  $HdB$

Variere  $B$  fra  $-B_0$  til  $B_0$

$$\int_{-B_0}^{B_0} HdB = -A_1 + A_2$$

Variere  $H$  fra  $B_0$  til  $-B_0$

$$\int_{B_0}^{-B_0} HdB = -A_3 + A_4$$

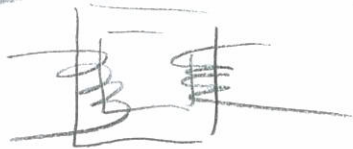
Tilført (= tappet)  
 magnetiske  
 energi er  
 en "pude"

Volumet =  $\oint HdB$

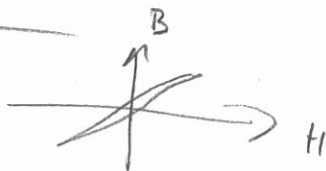
$A_2 + A_4 + A_1 - A_3$

= arealet innenfor  
 hystereseløp.

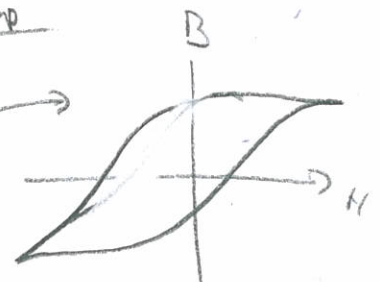
Transformator



$\Phi$  skifter løst  
 og gir  $\dot{\Phi}$



Koplet til  
 induktansstørrelse



ender hvert  
 energi tapp

$\Rightarrow$  mer varme (☹)



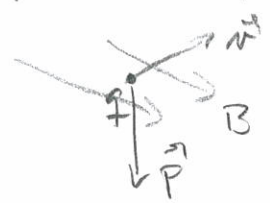
KREFTER I MAGNETISKE FELT

10/4  
2018

Har tidligere regnet på kraft som virker på bevegelig ladd partikkel i et magnetfelt:

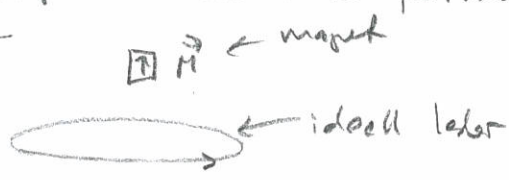
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$



Hva med krefter mellom to permanent magneter?

TAPSRITT SYSTEM:



Antar at systemet virker på magneten med en kraft  $\vec{F}$  som gir en forflytning  $z$ -retning

Arbeid utført av "systemet":

$$dA_m = \text{kraft} \cdot \text{vei}$$

$$= F_m \cdot dz \hat{z}$$

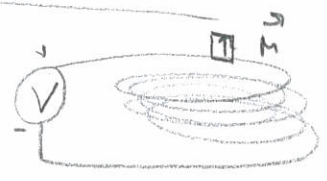
$$= F_{mz} \cdot dz$$

$$= -dW_m$$

utført arbeid når helde energi fra systemet

$$\Rightarrow \vec{F}_m = -\nabla W_m \quad (4.119)$$

SYSTEM M/ KILDER:



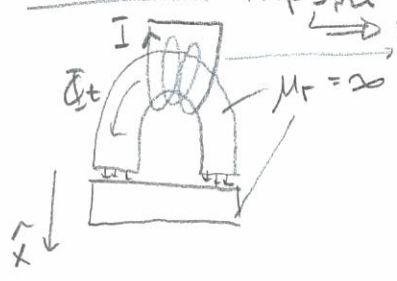
1) Mechanisk arbeid p.g.m forflytning:  $dA_{\text{mech}} = \vec{F} \cdot d\vec{x}$

2) Kilden utfører et arbeid  $dA_m = \sum_j I_j d\Phi_j$

1+2  $\Rightarrow$  Endring i energien til systemet

$$dW_m = dA_m - dA_{\text{mech}} \Rightarrow \vec{F} = \nabla W_m$$

Eks 4.17 Tapsløse elektromagnet



$$\text{Resultat: } \vec{F}_m = -\nabla W_m = -\frac{\Phi_t^2}{\mu_0 S} \hat{x}$$

For små x!

### 4.6: FØRSKYVNINGSSTRØM

I elektrodynamikken må Ampères lov erstattes med

Ampère-Maxwell's lov:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (4.137)

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$

for å oppfylle ladnings-

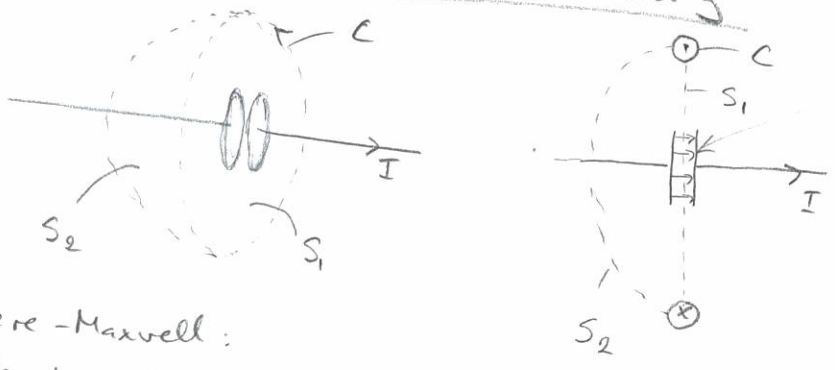
bevarelse:  $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ : Forskyvningsstrømteitet

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

uavhengig av materiale      endring / forskyvning av bunden ladning

Ampère-Maxwell's lov brukt på kondensator under opplutning



- Antar dimensjoner til II-plate kondensator  $\Rightarrow$  alt felt er inni kondens.

$E = \begin{cases} \frac{V}{d}, \text{ mellom plater} \\ 0, \text{ utenfor} \end{cases}$

Ampère-Maxwell:  
Venstre side:  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H \cdot 2\pi r$

$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{d} \frac{I}{C}$   
 $= \frac{I}{d \epsilon_0 S} = \frac{I}{\epsilon_0 S}$

Høyre side for to valg av S:

$\int_{S_2} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$   
 $\downarrow$   
felt = 0 for hele  $S_2$

$\int_{S_1} (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{I}{S} \int_{S_{kond}} dS = I$  (litt :))

16/4 2018

## 4.7 Maxwells ligninger – oppsummering

Vi kan nå summere opp de fire Maxwells ligningene på differensialform:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.145a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.145b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.145c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.145d)$$

og så på integralform:

Coulombs lov  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \hat{R}}{R^2} d\tau' \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$  Faraday's lov (4.146a)

Ampère-Maxwell's lov  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$  (4.146b)

Gauss lov  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv$  (4.146c)

Biot-Savarts lov  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^2} \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  "Magnetiske monopoler finnes" (4.146d)

I tillegg har vi Lorentz-kraften, som viser virkningen av feltene på en punktladning:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.147)$$

Faradays lov (4.146a) kan også skrives

$$e = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.148)$$

121

der  $C$  og dermed  $S$  godt kan være tidsavhengige. Her er  $\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  den magnetiske kraften per ladning pga. bevegelsen til  $C$ .

Til de fire Maxwells ligninger hører også relasjonene

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.149a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (4.149b)$$

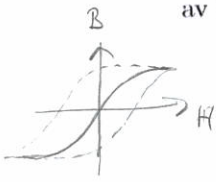
der polariseringen  $\mathbf{P}$  er en funksjon av det elektriske feltet  $\mathbf{E}$ , og magnetiseringen  $\mathbf{M}$  er en funksjon av  $\mathbf{B}$ . For lineære medier er disse funksjonene lineære, og da kan vi skrive

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.150a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (4.150b)$$

Selv om vi har argumentert for Maxwells ligninger ut fra Coulombs lov og Biot-Savarts lov, er den virkelige rettferdiggjørelsen at de stemmer med alle eksperimenter som har blitt utført fram til i dag<sup>5</sup> I videregående kurs og bøker postuleres vanligvis Maxwells ligninger direkte, og så utleder man det man trenger ut fra dem.

Gransebetingelsene for de fire feltene  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{H}$  som vi viste i elektro- og magnetostatikken gjelder fortsatt. Dette er fordi tilleggsleddene i elektrodynamikken, dvs.  $-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$  og  $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ , blir null for integrasjonssylinderen med neglisjerbar høyde, jfr. bevisene i kap. 2.5 og 3.6.



I elektrodynamikken kan  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  felt uttrykkes v.h.a. et skalarpotential  $V$  og et vektorpotential  $\vec{A}$  i hht :

$$\text{II } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{Maxw. \#4 oppfylt!})$$

$$\text{III } \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{Maxw \#1 oppfylt})$$

JUSTERINGSTRANSFORMASJONER (Gauge transf)

av  $\vec{A}$  og  $V$  er lov for å gjøre livet [ligningene] så lette som mulig 😊

⇒ Kan kreve tilleggshetizeler på  $\vec{A}$  og  $V$  så leste betingelsene kan skrives på formen

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla f \\ V' &= V - \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.156) \quad f(x,y,z,t): \text{vilkårlig funksjon}$$

( $\vec{A}', V'$ ) vil gi same  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  som ( $\vec{A}, V$ )

LIGNINGER FOR  $\vec{A}$  og  $V$  som oppfyller Maxwell #2 og #3 blir enkle og fine hvis vi bruker

LORENTZBETINGELSER:  $\nabla \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$  I som justeringstranf.

Anbr også lineært velim:  $\text{IV } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$  |  $\text{V } \vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} + \text{V} + \text{Maxwell \#2 og \#3}$$

⇒ BÆLGERNINGER FOR LORENTZPOTENSIALENE

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.161)$$

(RETRADERTE POT.)

L "forsinkelte"

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (4.162)$$

# LORENTZPOTENTIALSIELE - RETARDIERTE POTENTIALSIELE

+ Lorentz bed:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\textcircled{1} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \iff$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \textcircled{2} \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.145a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \textcircled{3} \nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{J} \quad (4.145b)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \textcircled{4} \nabla \cdot \nabla V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.145c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.145d)$$