

# Algoritmer

**Teoribok: "Algorithms"**  
**Kap 5 fra Brookshear & Brylow:**  
***Computer Science: An Overview***

TDT 4110 IT Grunnkurs  
Professor Guttorm Sindre

# Læringsmål og pensum



- Mål
  - Lære om
    - Algoritme som konsept
    - Representasjon av algoritmer
    - Analyse av tidskompleksitet
    - Iterative og rekursive strukturer
- Pensum
  - Kapittel 5 i *Computer Science, an Overview: Algorithms*

# Hvorfor vite noe om dette?

- Innsikt i algoritmer gjør det mulig å lage
  - Programmer som virker
  - Programmer som er bedre enn å bare virke
- Noen kvalitetskriterier for programmer
  - Korrekthet (programmet virker)
  - Enkelhet, koden lett å forstå
  - Brukervennlighet
  - Sikkerhet
  - Ytelse (f.eks rask responstid)
- For noen programmer er ytelse viktig
  - Da er det ikke nok å finne en mulig algoritme
  - Man må finne en rask algoritme





# Intro:

Hva er en algoritme?

Representasjon av algoritmer

Hvordan komme på algoritmer?

Kapittel 5.1-5.3

# Definisjon på algoritme



En algoritme er et **ordnet** sett av **entydige**, **utførbare** skritt som definerer en **terminerende** prosess.

## algorithm

*noun*

Word used by programmers when they do not want to explain what they did.

# Representasjon av algoritmer

- Vanlig brukt: *Pseudokode*
  - "Naturlig språk" med visse primitiver
  - Uavhengig av spesifikke programmeringsspråk
- Gjerne likevel inspirert av prog.språk
  - Boka bruker en pseudokode som ligner på Python
- Primitiver:

## *Variabeltilordning*

```
name = expression
```

## *Valg*

```
if (condition)  
    action  
else  
    action
```

## *Løkker*

```
while (condition)  
    activity
```

## *Funksjoner*

```
def name(parameters)  
    actions
```

# Polyas problemløsningsfaser (t.v.)

## i programmeringskontekst (t.h.)

1. Forstå problemet
2. Pønsk ut en plan for å løse problemet
3. Utfør planen
4. Evaluer løsning mhp. nøyaktighet potensial for å løse andre problemer

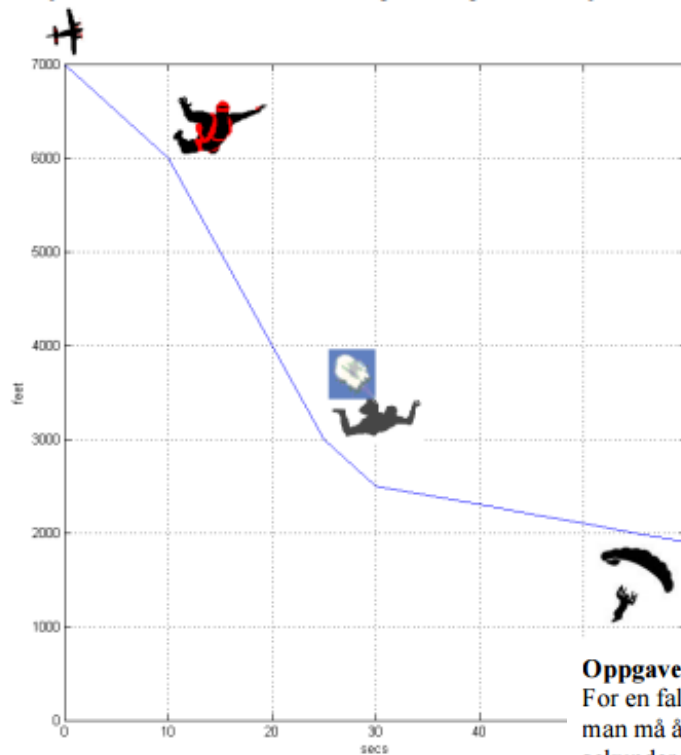
1. Forstå problemet
2. Få en ide om hvordan en algoritme kan løse problemet
3. Formuler algoritmen og representer den som et program
4. Evaluer programmet mhp nøyaktighet og potensial for å løse andre problemer



# Forstå problemet – Eksempel

Eksamen desember 2014, oppgave 2e

Vi benytter en litt forenklet versjon av jordens fysiske lover:



Figur 1. Hopp fra 7000 fot.

En fallskjermhopper faller (med konstant/gjennomsnittlig hastighet) 100 fot pr. sekund, de 10 første sekundene, og deretter med konstant topphastighet på 200 fot pr. sekund til skjermen må åpnes i 3000 fots høyde (se figur 1). Hvis man mot normalt hopper ut under 3000 fot må skjermen utløses umiddelbart (etter 0 sekunder).

## Oppgave 2e (5%)

For en fallskjermhopper er det veldig viktig å være klar over hvor mange sekunder man kan vente før man må åpne fallskjermen (Se figur 1). Lag en funksjon `feet2seconds` som regner ut hvor mange sekunder det tar å falle fra et oppgitt antall fot ned til 3000 fot (inn-parameter `feet`, og retur-verdi `seconds`). Bruk informasjon gitt i starten av oppgave 2 (forklaringen til figur 1) til å beregne riktig tid. Hvis antall fot er under 3000 skal funksjonen returnere 0.

Eksempler på bruk:

```
>> feet2seconds( 12500 )
ans = 52.5000
>> feet2seconds( 7000 )
ans = 25
>> feet2seconds( 2000 )
ans = 0
>>
```



# Eksempel (forts.)

- Naiv løsning
  - "Oversette" hendelsesforløpet direkte til kode
    - Bruk av løkke per tidsenhet
  - Mange ga bare svar i hele sek.

```
def feet2seconds(feet):
```

```
    sec = 0
```

```
    while feet > 3000:
```

```
        sec = sec + 1
```

```
        if sec < 10:
```

```
            feet = feet - 100
```

```
        else:
```

```
            feet = feet - 200
```

```
    return sec
```

- Naiv løsning ikke best
  - Jfr. graf, funksjon m. et par knekkpunkter, ellers lineær
  - Trenger ikke simulere fallet for å regne ut tiden

```
def feet2seconds(feet):
```

```
    if feet > 4000:
```

```
        return 10 + (feet-4000)/200
```

```
    elif feet > 3000:
```

```
        return (feet-3000)/100
```

```
    else:
```

```
        return 0
```

# Annet eksempel



- Vil lage et program for å spille bondesjakk
- Etter hvert trekk: sjekke om noen har vunnet spillet
- Kriterium for seier:
  - En spiller (X eller O) må ha 5 på rad
  - De 5 på rad kan være vannrett, loddrett eller diagonalt

				X					
				O	O		X		
				O	O	X			
				O	X	O			
			O	X			X		
			X						

				X					
				O	O		X		
				O	O	X	X		
			X	O	X	O	X		
			O	O			X		
			X	O					

				X					
				O	O		O		
				O	O	X	X		
			X	O	X	O	X		
			O	O			X		
			X	X					

# Forsøk på naiv algoritme

```
count_X = 0
```

```
count_O = 0
```

```
for all rows in board
```

```
    for all cells in row
```

```
        if cell is X then
```

```
            count_O = 0
```

```
            count_X = count_X + 1
```

```
            if count_X >= 5 then winner = X
```

```
        elif cell is O then
```

```
            count_X = 0
```

```
            count_O = count_O + 1
```

```
            if count_O >= 5 then winner = O
```

```
        else
```

```
            count_X = count_O = 0
```

```
for all columns in board
```

```
    % similar inner loop and if-tests
```

```
for all diagonals in board
```

```
    % similar inner loop and if-tests
```

Dette er en dårlig algoritme, koden er **unødig lang** og **ineffektiv**.

På hvilken måte er den ineffektiv, og hvordan kan vi gjøre den bedre?

# Mer effektiv variant

- Probleminnsikt: En seier er alltid resultat av siste trekk
  - Kun sjekke spilleren som trakk, og...
  - ...kun en liten del av brettet, utover fra ruta for siste trekk

```
def count_equals(x, y, dx, dy, symbol):
```

```
    % counts subsequent occurrences of a given symbol (X or O)
```

```
    % from pos. x, y, in direction dx, dy, until finding a cell without this symbol
```

```
    c = 0
```

```
    while cell in pos. x, y contains the symbol :
```

```
        c = c + 1
```

```
        x = x + dx
```

```
        y = y + dy
```

```
def victory(x, y, symbol):
```

```
    % true if player w symbol (X / O) has won the game after the move x,y – otherwise false
```

```
    v = (count_equals(x-1, y, -1, 0, symbol) + count_equals(x+1, y, 1, 0, symbol) >= 4 or
```

```
        count_equals(x, y-1, 0, -1, symbol) + count_equals(x, y+1, 0, 1, symbol) >= 4 or
```

```
        count_equals(x-1, y-1, -1, -1, symbol) + count_equals(x+1, y+1, 1, 1, symbol) >= 4 or
```

```
        count_equals(x-1, y+1, -1, 1, symbol) + count_equals(x+1, y-1, 1, -1, symbol) >= 4 )
```

```
end
```

# Forskjell på algoritmene



- **Den naive bondesjakkalgoritmen**
  - Sjekker (nesten) alle rutene i brettet 4 ganger
  - Brett med bredde og høyde  $n$ 
    - kjøretiden utvikler seg kvadratisk (som funksjon av  $n^2$ )
  - Seierssjekken vil bli tregere jo større brett vi bruker
- **Den smartere algoritmen:**
  - Sjekker maksimalt 20 ruter
  - Seierssjekken går like fort uansett hvor stort brettet er
- **Store  $\Theta$ -notasjon (Big-theta):**
  - Den naive algoritmen er  $\Theta(n^2)$  - tidsbruk proporsjonalt med  $n^2$
  - Den smartere algoritmen er  $\Theta(1)$  – tidsbruk uavhengig av brettstørrelse
- **Tilsvarende for fallskjermeksemplet:**
  - Den beste algoritmen er  $\Theta(1)$  – tidsbruk uavhengig av fallhøyde
  - Den naive algoritmen er  $\Theta(n)$  der  $n$  er høyden i fot / 200
  - Spiller ikke så stor rolle, siden det er temmelig begrenset hvor stor  $n$  kan bli

# Hva betyr $\Theta$ ?

- Anta at ei algoritme sitt tidsforbruk er gitt som  $f(n)$ 
  - Der  $n$  uttrykker størrelsen på dataene / datamengden
- Tre ulike notasjoner:
  - $O$  (Big O), betyr at
    - $f(n) = O(g(n))$  hvis  $|f(n)| \leq k \cdot |g(n)|$
    - $g(n)$  angir en øvre grense for  $f(n)$  for tilstrekkelig store  $n$
  - $\Omega$  (Big Omega)
    - $f(n) = \Omega(g(n))$  hvis  $|f(n)| \geq k \cdot |g(n)|$
    - $g(n)$  angir en nedre grense for  $f(n)$  for tilstrekkelig store  $n$
  - $\Theta$  (Big Theta)
    - $f(n) = \Theta(g(n))$  hvis  $k_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq k_2 \cdot |g(n)|$
    - $G(n)$  angir både en øvre og nedre grense for  $f(n)$  for tilstrekkelig store  $n$
    - $f(n)$  tilhører både mengden av funksjoner som er  $O(g(n))$  og som er  $\Omega(g(n))$ , dvs. befinner seg i snittet av disse to mengdene

# Illustrasjon

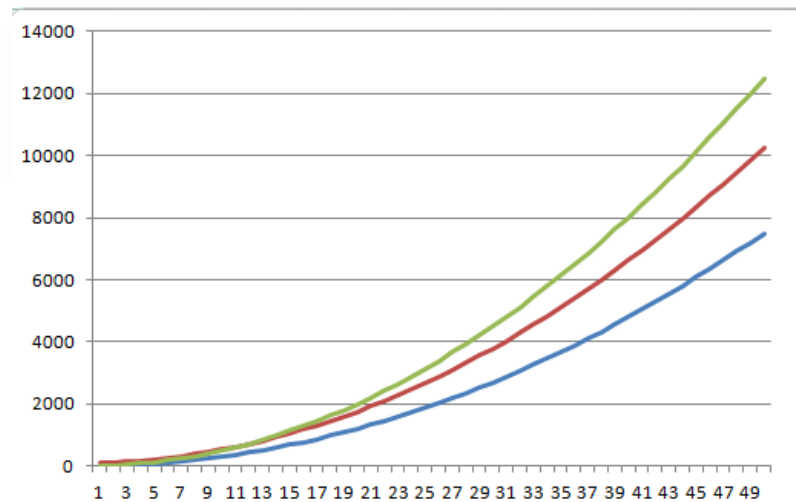
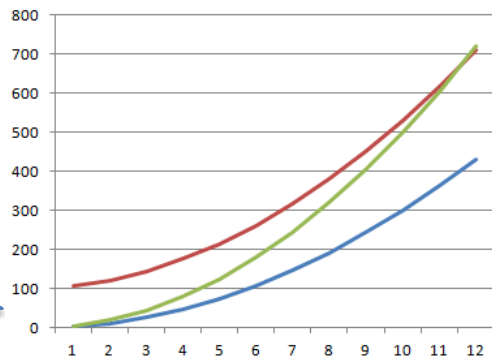
- Program P har tidsforbruk gitt ved  $f(n) = 4n^2 + 3n + 100$
- Kan vi finne  $g(n)$  som kun ett ledd uten konstanter
- Og som er slik at  $k_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq k_2 \cdot g(n)$  ?
  - NB: trenger kun være korrekt for store n
- JA! Funker f.eks. med

- $g(n) = n^2$

- $k_1 = 3$

- $k_2 = 5$

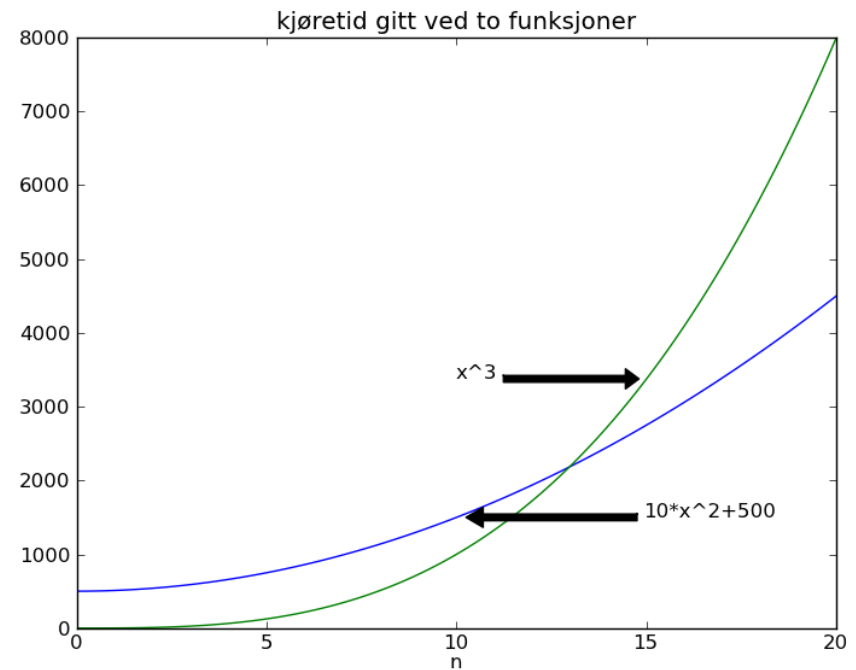
Trenger ikke stemme for små n



- Kan dermed konkludere med at P er  $\Theta(n^2)$

# O, $\Omega$ og $\Theta$

- Gir omtrentlige uttrykk for tidsforbruk
  - Eksakt uttrykk vanskelig
    - Avhengig av detaljert implementasjon og maskin man kjører på
  - Omtrentlige uttrykk er ofte tilstrekkelig
    - Skille mellom bedre og dårligere algoritmer
    - NB: hvis  $n$  blir stor nok
  - Som figuren viser, en algoritme m. tidsbruk  $n^3$  er raskere for små  $n$ , men for store  $n$  blir  $10n^2+500$  fort bedre





# Algoritmekompleksitet, div. eks.

- $\Theta(\log n)$  Binærsøk i sorterte data, f.eks. vektor, (cell)array
- $\Theta(n)$  Sekvensielt søk i f.eks. vektor, (cell)array
- $\Theta(n \log n)$  Sortering med mergesort, quicksort
  - » Nb: worst case hvis spesielt uheldig kan være  $n^2$  for quicksort
- $\Theta(n^2)$  Sortering med insertion sort, bubblesort
- $\Theta(n^3)$  Naiv multiplikasjon av to  $n \times n$  matriser
- $\Theta(2^n)$  Prøve alle mulige kombinasjoner av bits for et passord på binær form
- $\Theta(n!)$  "Brute force" løsning av det såkalte "travelling salesman" problemet

# Passordknekking, mer eks.



- Kun små bokstaver (26 stk)
  - Lengde 4, alle mulige komb.:  $26^4 = 456.976$ 
    - Vs. Angrep med ordliste (~500.000 ord): 500.000
  - Lengde 8,  $26^8 = 208.827.064.576$ 
    - Angrep med ordliste: fortsatt 500.000
    - UNNGÅ BRUK AV VANLIGE ORD I PASSORD
- Hva lønner seg mest?
  - Øke lengden ytterligere?
  - Eller forlange bruk av store og små bokst., tall, spesialtegn?
  - $29^{16} = 250246473680347348787521$
  - $100^8 = 10000000000000000$
- Konklusjon: Lengde er viktigere enn rare tegn

# Flere måter å spare tid på

- Implementere ”samme” algoritme på en bedre måte
  - Bl.a. flytte ut av løkker det som kan gjøres utenfor
  - For eksempel redusere tidsbruk fra  $4 * n$  til  $n$
  - Men har i begge tilfeller en algoritme som er  $\Theta(n)$
- Parallellisering, gjøre flere ting på en gang
  - Forutsetter maskin med flere prosessorer, de fleste har dette
  - F.eks. vektorisering og preallokering i Matlab
  - Reduserer tidsbruk, endrer vanligvis ikke kompleksitet
- Finne en lurere algoritme for å gjøre samme ting
  - F.eks. oppnå  $\Theta(1)$  eller  $\Theta(\log n)$  i stedet for  $\Theta(n)$
  - Hvis  $n$  blir skikkelig stor, sparer dette mer enn de over
- Dele opp programmet lurt, skille fra hverandre...
  - Tidkrevende operasjoner som kan gjøres sjelden
  - Hyppige operasjoner som må gjøres raskt

# Finne kompleksitet for egen kode?

- Rent sekvensielt program uten noen repeterte handlinger:  $\Theta(1)$
- Enkel løkke som går gjennom alle elementer i f.eks. vektor:  $\Theta(n)$ 
  - Der  $n$  er lengden til vektoren
    - NB: om løkka f.eks. bare ser på halvparten av elementene, også  $\Theta(n)$
    - Men om bare et konstant antall, f.eks. første 10 elementer:  $\Theta(1)$
- Dobbel løkke, ytre løkke går  $\sim n$  ganger og indre  $\sim n$  ganger:  $\Theta(n^2)$
- **NB:** mye ser ut som enkle operasjoner, men **skjuler løkker**
  - F.eks. sum, max av liste, `max(L)`, `sum(L)` -  $\Theta(n)$ 
    - Om ikke sum, max er forhåndslagret
  - Sortering `L.sort()`  $\Theta(n \log n)$
  - Sjekk av tilstedeværelse av element  $m$ . for eksempel `in`
  - Jfr. f.eks. <https://wiki.python.org/moin/TimeComplexity>
- Hvis det er vanskelig å "se" kompleksiteten direkte
  - prøvekjør programmet og mål tidsbruk
  - Hva skjer hvis datamengden (f.eks lengde av liste) dobles, tidobles etc.?



# Iterasjon vs. Rekursjon

## Søking og sortering

Kapittel 5.4-5.5

# Iterasjon vs. Rekursjon



- Boka presenterer
  - Iterative algoritmer: Sekvensielt søk, sortering ved innsetting
  - Rekursiv algoritme: Binærsøk
- NB: **alle tre** *kan* programmeres iterativt – eller rekursivt
- Generelt:
  - **Iterasjon** – algoritmen benytter **løkke(r)** for stegvis løsning av problemet
  - **Rekursjon** – stegvis repetisjon oppnås ved at en **funksjon kaller seg selv**

# Algoritme for sekvensielt søk (i sortert liste, s. 143 i Teoribok)



```
def Search(List, TargetValue)
```

```
  if (List is empty):
```

```
    Declare search a failure
```

```
  else:
```

```
    Select the first entry in List to be TestEntry
```

```
    while (TargetValue > TestEntry and more entries to be considered):
```

```
      Select the next entry in List as TestEntry
```

```
    if (TargetValue == TestEntry):
```

```
      Declare search a success
```

```
    else:
```

```
      Declare search a failure
```

Hvordan måtte vi endre algoritma hvis lista ikke var sortert?

Hva sparte vi ved at lista var sortert med denne algoritma?

# Tidskompleksitet for sekvensielt søk?



- Noen ganger er vi heldige, søkt element er tidlig i lista
- Andre ganger uheldige, sent i lista
  - Dvs. det vi leter etter kommer sent i alfabetet
- Gjennomsnittlig se på  $N/2$  elementer, hvor  $N$  er lengde av lista
- Sekvensielt søk:  $\Theta(n)$ 
  - Dvs. tidsforbruk proporsjonal med  $n$
  - Hvis lista blir 5 ganger så lang, vil søkene også ta 5 ganger så lang tid



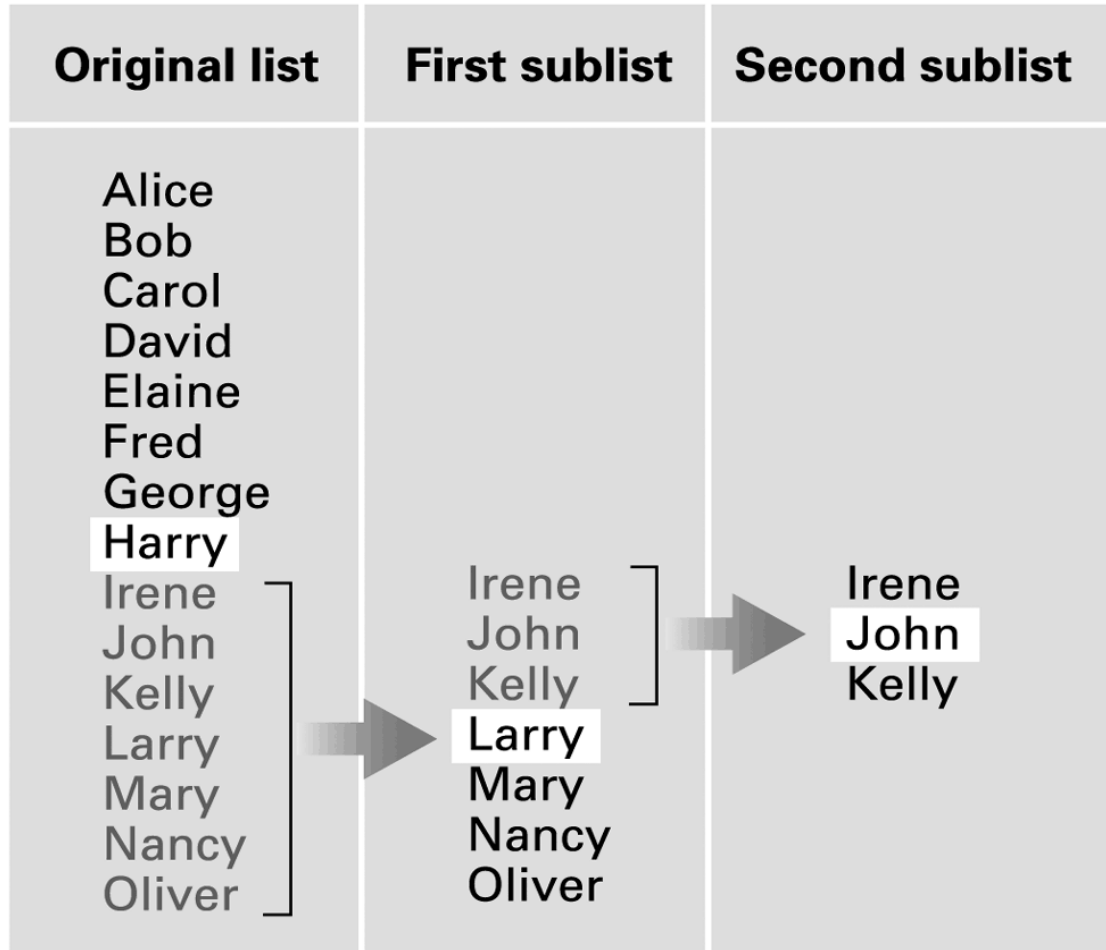
# Binærsøk:

## En smartere måte å søke på



- Forutsetter sortert liste
- Sekvensielt søk: se på første element, så på neste, så på neste, osv. – inntil funnet eller ikke
- Binærsøk:
  - Hvis lista er tom
    - **FERDIG! (Elementet fins ikke i lista)**
  - Ellers:
    - Se på midterste element
    - Hvis midterste element == søkt element:
      - **FERDIG! (Suksess: Element funnet)**
    - Ellers, hvis midterste element > søkt element:
      - Gjenta binærsøk i første halvdel av lista (foran elementet vi så på)
    - Ellers
      - Gjenta binærsøk i siste halvdel av lista (bak elementet vi så på)

# Bruke strategien til å søke etter John i en liste



# Binærsøk – rekursiv versjon



Adm.dir  
Main

Let etter 'Foo' i lista  
fra indeks 0 til 14

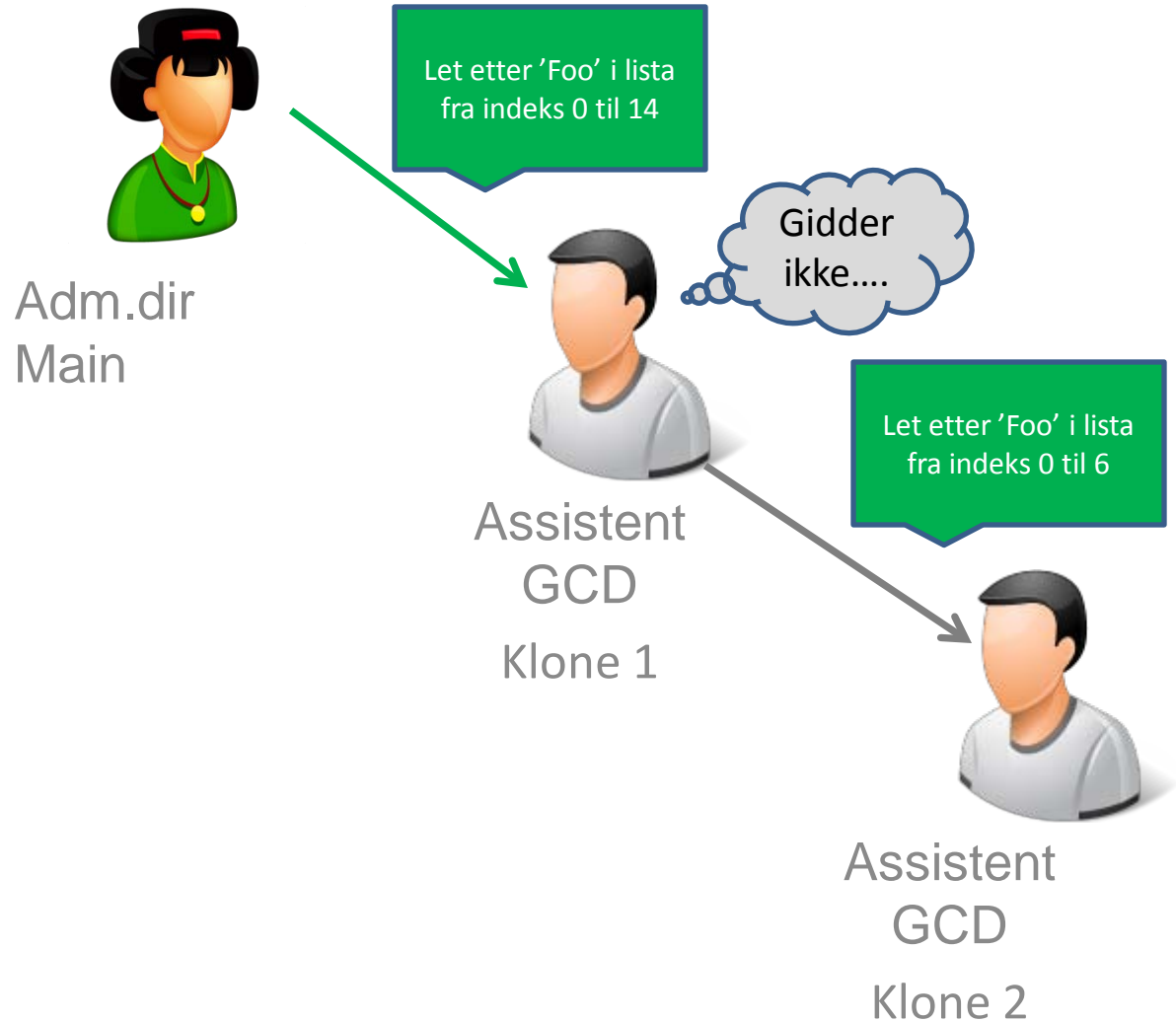


Assistent  
BS  
Klone 1

Er lista tom? (sluttindeks < startindeks). Nei! ... Ser på det midterste elementet [7]. Nei, ikke Foo men Gil! Gidder ikke mer, lar assistenten min lete. Men siden lista er sortert og 'Foo' er mindre enn 'Gil', trenger han bare lete til venstre for midten... altså fra indeks 0 til 6

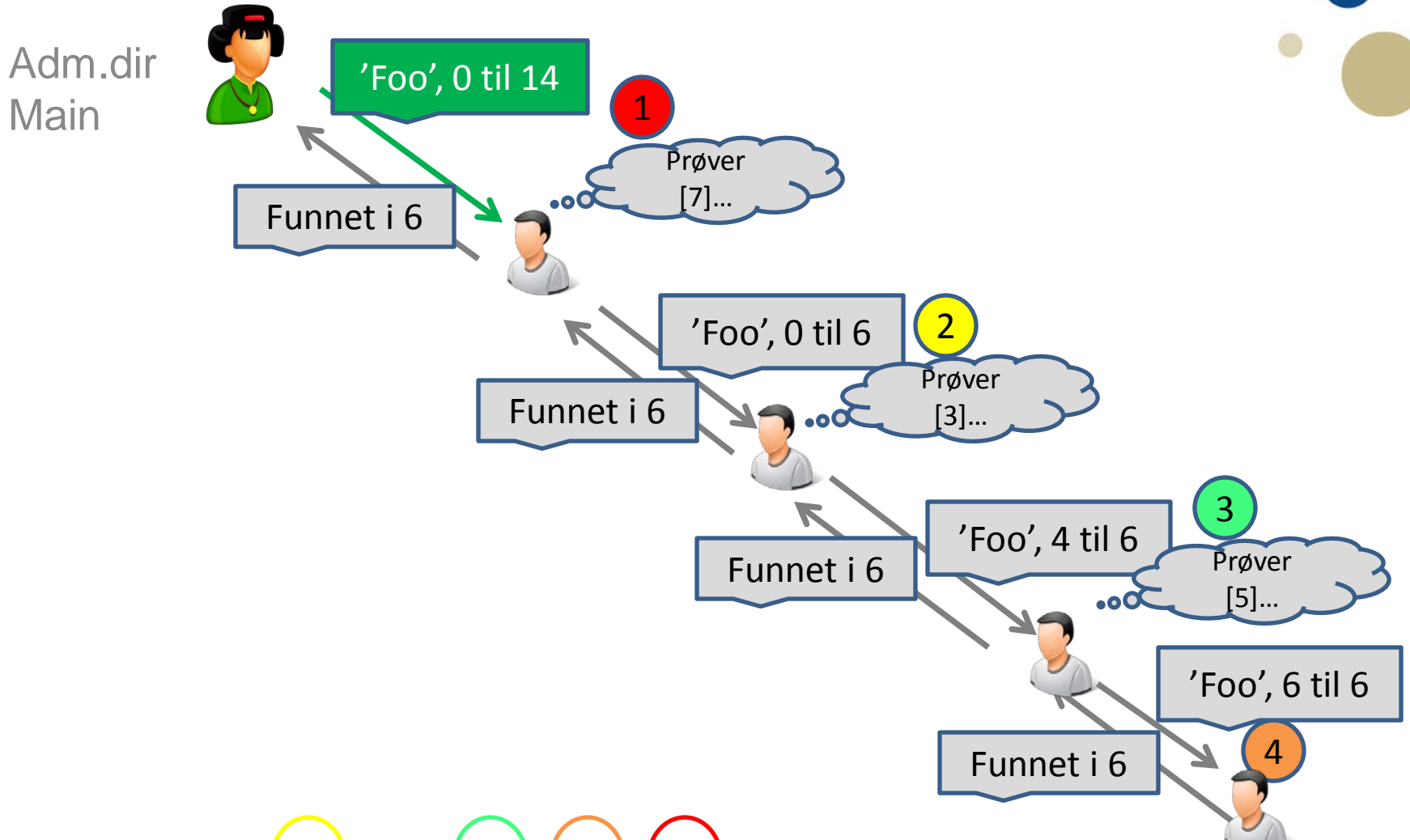
Ada	An	Bo	Cy	Di	Eli	Foo	Gil	Hal	Ine	Jo	Kim	Lea	Nik	Oda
-----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	----	-----	-----	-----	-----

# Binærsøk – rekursiv versjon



Ada	An	Bo	Cy	Di	Eli	Foo	Gil	Hal	Ine	Jo	Kim	Lea	Nik	Oda
-----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	----	-----	-----	-----	-----

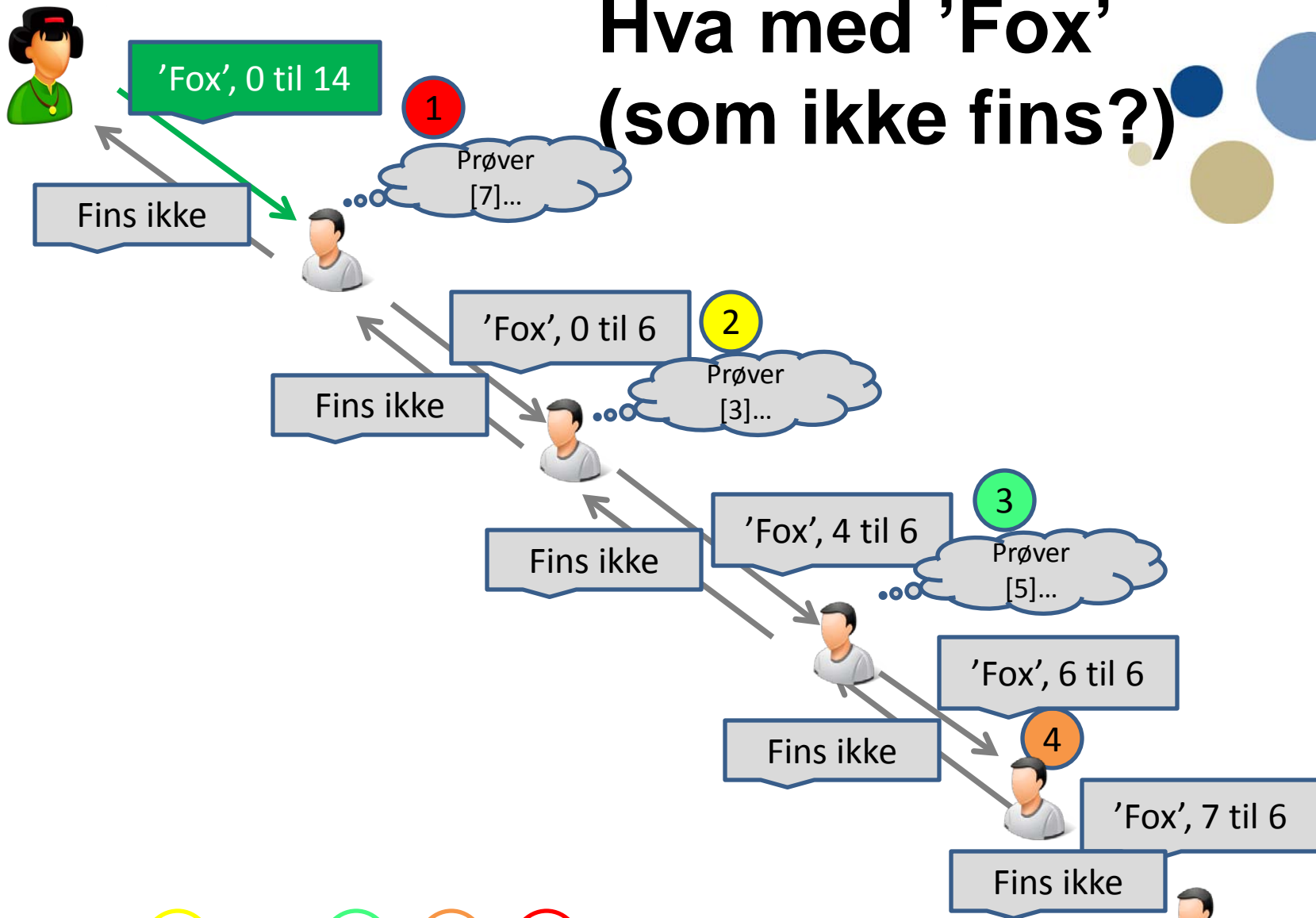
# Binærsøk – rekursiv versjon



Ada	An	Bo	Cy	Di	Eli	Foo	Gil	Hal	Ine	Jo	Kim	Lea	Nik	Oda
-----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	----	-----	-----	-----	-----

# Hva med 'Fox' (som ikke fins?)

Adm.dir  
Main



Ada	An	Bo	Cy	Di	Eli	Foo	Gil	Hal	Ine	Jo	Kim	Lea	Nik	Oda
-----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	----	-----	-----	-----	-----

# Tidsforbruk for binærsøk?



- For hvert oppslag vi gjør, halveres gjenværende liste
- Tidsforbruket blir da en logaritmisk funksjon
- Binærsøk:  $\Theta(\log_2 n)$
- Dvs. tidsforbruk proporsjonalt med toerlogaritmen til  $n$
- Hvis lista blir 4 ganger så lang, får vi bare to ekstra oppslag
- Binærsøk er dermed lurere enn sekvensielt søk som er  $\Theta(n)$ 
  - Men forutsetter sortert liste, sekvensielt søk også mulig på usortert

# Sortering: mange algoritmer



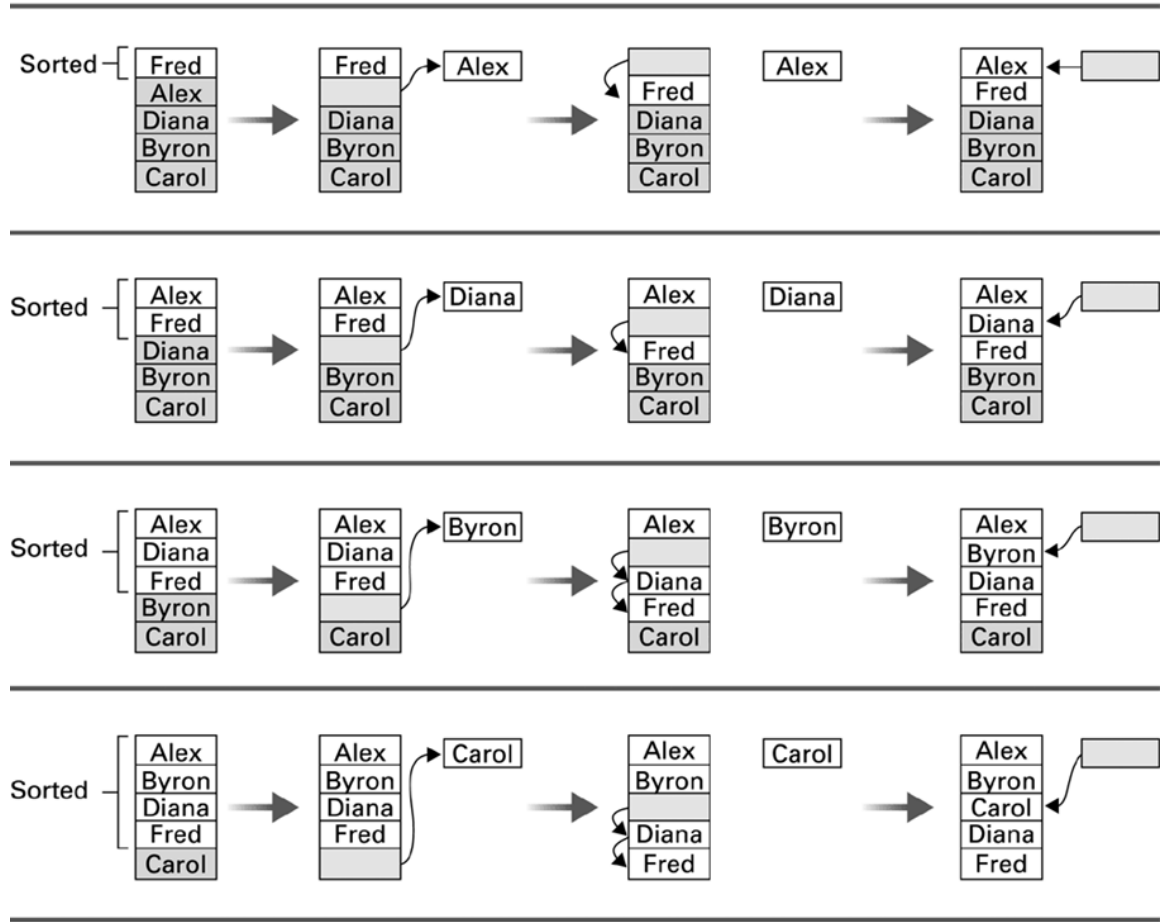
- **I pensum:**
  - Sortering ved innsetting (insertion sort)
- **Andre:**
  - Boblesortering (bubble sort)
  - Mergesort
  - Quicksort



# Insertion sort Illustrasjon

Initial list:

Fred
Alex
Diana
Byron
Carol



Sorted list:

Alex
Byron
Carol
Diana
Fred

# Tidsforbruk for insertion sort?



- Vi har to løkker inni hverandre
- Hver av løkkene kan måtte se på N elementer
- Insertion sort:  $\Theta(n^2)$
- Dvs. tidsforbruk proporsjonal med kvadratet av n
- Hvis lista blir 5 ganger så lang
  - vil sortering ta ca. 25 ganger så lang tid

# Oppsummering



- Algoritmer er ordnede sett av entydige, utførbare skritt som definerer en terminerende prosess
- Algoritmer kan representeres med pseudokode
- Algoritmer er problemløsning
- *Iterative* og *rekursive* algoritmer er alternative problemløsningsmåter
- Analyse av algoritmer kan hjelpe oss til å vurdere løsninger mhp. effektivitet og korrekthet