Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

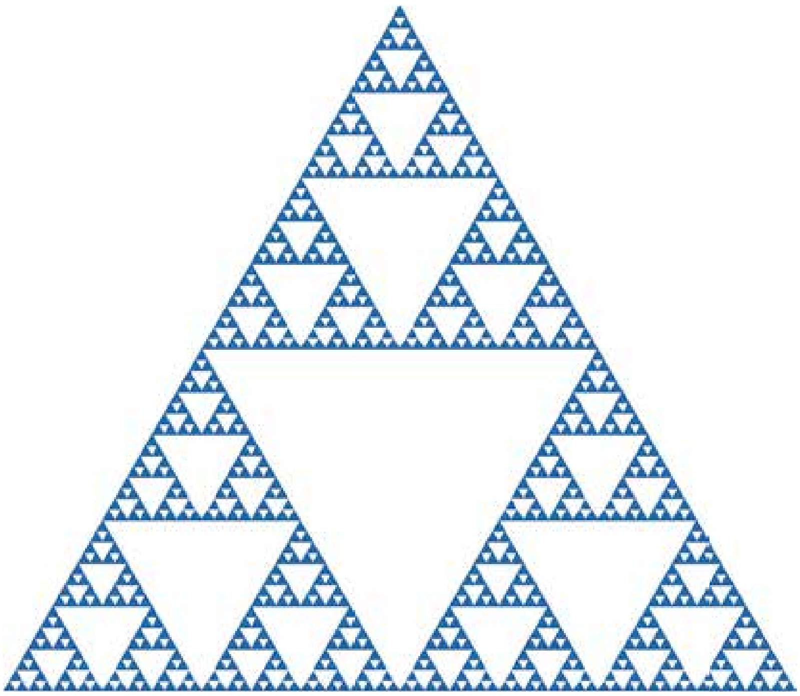
UNDERSØKENDE MATEMATIKKUNDERVISNING I VIDEREGÅENDE SKOLE II

KOMMUNIKASJON - MOTIVASJON - FORSTÅELSE

TOVE KALVØ, SUSANNE STENGRUNDET, ANNE-MARI JENSEN

UNDERSØKENDE MATEMATIKKUNDERVISNING I VIDEREGÅENDE SKOLE II

KOMMUNIKASJON - MOTIVASJON - FORSTÅELSE



SUSANNE STENGRUNDET
TOVE KALVØ
ANNE-MARI JENSEN

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

1.utgave/1.opplag 2015

ISBN: 978-82-997448-7-4
(PDF) ISBN 978-82-997448-8-1

Grafisk utforming: NTNU Grafisk senter
Trykk: Skipnes

Alle henvendelser om boka kan rettes til:
Matematikksenteret, NTNU, 7491 Trondheim
E-post: ms@matematikksenteret.no

www.matematikksenteret.no

Innhold

Forord

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen – Matematikksenteret – er et nasjonalt ressurssenter for matematikkdidaktisk kompetanse. Senteret utvikler læringsressurser som bidrar til å gjøre matematikkopplæringen variert, spennende og levende for barn og unge.

Matematikksenteret presenterer med dette heftet ideer til god matematikkundervisning i videregående skole. Ved å bruke varierte undervisningsmetoder og undersøkende oppgaver legger vi til rette for forståelse og god læring i matematikk. La elevene utfordres av utforskningsoppgaver, la dem se systemer og sammenhenger og utvikle forståelse for faget, la dem utvikle alle de grunnleggende ferdighetene også innenfor matematikken.

Heftet inneholder ti ulike undervisningsopplegg fra ulike deler av læreplanene i matematikk for Vg1, Vg2 og Vg3 på videregående skole. Først i heftet er oppleggene forklart med mange didaktiske betraktninger og kommentarer til læreren. Bak i heftet finnes kopieringsoriginaler til de oppleggene hvor egne ark til elevene skal brukes. På Matematikksenterets hjemmeside, www.matematikksenteret.no, vil det til enhver tid finnes en oppdatert veiledning til hvordan GeoGebra er brukt i oppleggene. Der finner du også en oversikt over forhandlere av konkretiseringsmateriell.

Undervisningsoppleggene er utviklet av Tove Kalvø, Susanne Stengrundet og Anne-Mari Jensen. Vi ønsker å takke Anne Karin Wallace for ideen til ett av oppleggene. I tillegg vil vi takke alle gode kollegaer på Matematikksenteret for ideer og innspill underveis i prosessen.

Vårt ønske er at heftet vil inspirere matematikklærere i videregående skole til å ta i bruk noen av undervisningsoppleggene og aktivitetene i egen klasse. Vi utfordrer lærere til å ta i bruk oppgaver som fremmer resonnering, kommunikasjon og forståelse i matematikk. Målet vårt er at elevene skal ha glede av, forstå og se nytten av faget, og kunne bruke det i videre skolegang, hverdagsliv og yrkesliv.

Vennlig hilsen

Tove Kalvø | Susanne Stengrundet | Anne-Mari Jensen

Innledning

I dette heftet presenterer vi flere ideer og opplegg som kan bidra til god matematikkundervisning i videregående skole. I rapporten Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk gir Nosrati og Wæge (2015) en oversikt over hva forskningen sier om læring og undervisning i matematikk. De trekker frem fem temaer som har stått sentralt i matematikkdidaktisk forskning over lengre tid: Undersøkende matematikkundervisning, forståelse, selvinnsikt og bevissthet, tilpasset opplæring og motivasjon.

UNDERSØKENDE MATEMATIKKUNDERVISNING

Undersøkende matematikkundervisning legger vekt på elevenes tenking og resonnering. Elevene oppfordres selv til å finne løsningsstrategier og metoder. En undersøkende matematikktime følger ofte en tredelt struktur. Den starter med at læreren presenterer en ny og kognitivt krevende aktivitet eller oppgave for elevene. Deretter får elevene god tid til å jobbe med aktiviteten. Læreren observerer arbeidet og oppmuntrer elevene til å finne løsninger og beskrive hva de tenker. Timen avsluttes med en felles diskusjon av de forskjellige løsningsmetodene. Læreren leder diskusjonen slik at elevene blir oppmerksomme på hvordan ulike løsninger henger sammen og hvordan løsningene er relatert til læringsmålene for timen. (Nosrati & Wæge, 2015).

FORSTÅELSE

I matematikk skiller man ofte mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Instrumentell forståelse innebærer å lære et økende antall regler og formler som hjelper elevene med å finne løsningen på oppgavene. Eleven vet hvordan han skal løse oppgaven. Relasjonell forståelse innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og kunne se sammenhenger mellom begrepene. Eleven vet både hvordan en oppgave skal løses og hvorfor det blir sånn (Skemp, 1976). Relasjonell forståelse kan fremmes ved at lærer og elever fokuserer på sammenhenger mellom matematiske ideer, fakta og prosedyrer. I tillegg må elevene selv gjøre en innsats for å forstå matematikken og de strukturer som ligger bak (Nosrati & Wæge, 2015).

Undervisningsoppleggene i dette heftet legger opp til at elevene skal utvikle relasjonell forståelse og finne sammenhenger i matematikk. Når læreren skal gjennomføre oppleggene i heftet, er det viktig at hun eller han forteller elevene at de vil bli utfordret på å utvikle egne løsningsmetoder og at de skal kunne forklare hvordan de tenker. I helklassediskusjoner i slutten av timen vil lærerens rolle være å hjelpe elevene til å se sammenhenger mellom ulike løsningsstrategier og de matematiske læringsmålene. Elevene får øve seg i å se hvilke strategier og metoder som er mest hensiktsmessige å ta i bruk i gitte kontekster.

Det er viktig at elevene i tillegg til å jobbe med undervisningsopplegg fra dette heftet, også arbeider med mange og varierte oppgaver fra læreboken.

SELVINNSIKT OG BEVISSTHET

Undervisningsoppleggene er bygget opp på en slik måte at elevene blir utfordret til å reflektere over egen tankegang i matematiske sammenhenger. Ved en slik refleksjon kan de bedre forstå og takle faglige utfordringer de blir stilt overfor. Ved å bli bevisst sine egne tankesett og valg av løsningsmetoder vil elevene kunne utvikle og forbedre sine matematiske prestasjoner. (Nosrati & Wæge, 2015).

TILPASSET OPPLÆRING

Tilpasset opplæring er et viktig prinsipp i norsk skole, og mange lærere opplever at det er krevende å gjennomføre dette i praksis. Det er viktig å finne gode metoder og aktiviteter som ivaretar alle elevene. Undervisningsoppleggene kan fungere godt i klasser der det er store variasjoner i elevenes faglige mestringsnivå. Rike oppgaver kjennetegnes ved at inngangsterskelen til problemet er så lav at det er mulig for alle elevene å arbeide med det matematiske problemet, og det er i tillegg mulig for elevene å arbeide på ulike nivåer. Aktivitetene er matematisk utfordrende, og det er mulig å løse dem på flere måter, det vil si ved hjelp av forskjellige løsningsstrategier. Læreren får en aktivt deltakende rolle, der han med hjelp av tips og hint hjelper elevene videre i oppgaven. På denne måten kan en klasse arbeide med samme aktivitet, men elevene kan arbeide på ulike nivåer. Rike oppgaver gir også høyt-presterende elever mulighet til å lære på det nivået som passer dem. Den matematiske forståelsen blir beriket gjennom utforsking av andre og kanskje mer detaljerte aspekter ved det samme temaet.

MOTIVASJON

Det er avgjørende for elevenes motivasjon at aktivitetene er passe utfordrende, og lærerens undervisningspraksis har stor betydning. Undervisningsoppleggene i dette heftet er preget av rike aktiviteter, der elevene oppmuntres til å utvikle egne løsningsstrategier. Ved å la elevene arbeide med rike oppgaver, kan alle elevene få utfordringer på sitt nivå. I mange tilfeller er det ønskelig at elevene samarbeider med hverandre i læringsprosessen for å utvikle god forståelse i matematikk. Det er avgjørende at læreren gir rom for at elevene kan kommunisere sine tanker og at han eller hun verdsetter elevenes faglige bidrag. I tillegg kan læreren etablere en kultur hvor typiske misforståelser eller feil danner utgangspunktet for læring av viktige begreper og hvor det å gjøre feil betraktes som en viktig del av læringsprosessen. Da kan elevene erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfull.

REFERANSER
Nosrati, M & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. Hentet 30.10.15, fra http://www.matematikksenteret.no/content/4879/Sentrale-kjennetegn-pa-god-laring-og-undervisning-i-matematikk

Skemp,R.R (1976). Relational and Instumental Understanding. Mathematics teaching, Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics, 77,20-26.

Figurtall, følger og rekker

KOMPETANSEMÅL

Kompetansemålene er hentet fra 1P, 1T, 2P, 2P-Y ,2T, S1, R2, S2.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere greie for omgrepet lineær vekst, vise gangen i slik vekst og bruke dette i praktiske døme, også digitalt (1P, 2P-Y)
- omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar (1P, 2P-Y)
- undersøkje funksjonar som beskriv praktiske situasjonar, ved å fastsetje nullpunkt, ekstremalpunkt og skjeringspunkt og tolke den praktiske verdien av resultata (1P, 2P-Y)

- rekne med rotuttrykk, potensar med rasjonal eksponent og tal på standardform, bokstavuttrykk, formlar, parentesuttrykk og rasjonale og kvadratiske uttrykk med tal og bokstavar, faktorisere kvadratiske uttrykk, bruke kvadratsetningane og lage fullstendige kvadrat (1T)
- omforme ei praktisk problemstilling til ei likning, ein ulikskap eller eit likningssystem, løyse det matematiske problemet både med og utan digitale verktøy, presentere og grunngje løysinga og vurdere gyldigheitsområde og avgrensingar (1T)
- gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar (1T)

- analysere teoretiske og praktiske problemstillingar, finne mønster og struktur i ulike situasjonar og beskrive samanhengar ved hjelp av matematiske modellar (2T)
- bruke digitale verktøy i utforsking, modellbygging og presentasjon (2T)

- gjere målingar i praktiske forsøk og formulere matematiske modellar på grunnlag av observerte data (2P, 2P-Y)
- analysere praktiske problemstillingar knytte til daglegliv, økonomi, statistikk og geometri, finne mønster og struktur i ulike situasjonar og beskrive samanhengar mellom storleikar ved hjelp av matematiske modellar (2P, 2P-Y)
- bruke funksjonar til å modellere, drøfte og analysere praktiske samanhengar (2P, 2P-Y)

- omforme en praktisk problemstilling til en likning, en ulikhet eller et likningssystem, løse det og vurdere løsningens gyldighet (S1)

- finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene (R2)
- summere endelige rekker med og uten digitale hjelpemidler, utlede og bruke formlene for summen av de n første leddene i aritmetiske og geometriske rekker, og bruke dette til å løse praktiske problemer (R2)
- regne med uendelige geometriske rekker med konstante og variable kvotienter, bestemme konvergensområdet for disse rekkene og presentere resultatene (R2)

- omforme en praktisk problemstilling til en likning, en ulikhet eller et likningssystem, løse det og vurdere løsningens gyldighet (S2)
- avgjøre om en uendelig geometrisk rekke er konvergent, og beregne summen av rekka (S2)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal gjennom praktisk arbeid finne mønster og sammenhenger.
- Eleven skal finne både rekursiv og implisitt formel for mønster.
- Eleven skal finne sammenhenger mellom forskjellige representasjoner.
- Eleven skal vise at algebraiske uttrykk er like.
- Eleven skal anvende algebra i praktiske sammenhenger.
- Eleven skal bruke digitale hjelpemidler til å finne og/eller bekrefte svaret.
- Eleven skal finne kjennetegn for aritmetiske og geometriske rekker.
- Eleven skal beregne summen og grenseverdier av aritmetiske og geometriske rekker.

OVERSIKT

Dette kapittelet er delt inn i fire ulike opplegg: Tårn, Ramme, Perlebrett og Treet. Disse oppleggene kan gjennomføres uavhengig av hverandre. I starten av hvert opplegg står det hvilket klassetrinn opplegget er spesielt egnet for. I tillegg til å finne et matematisk uttrykk, krever noen av oppleggene også avansert matematisk kunnskap. Disse oppleggene er betegnet med R2 eller S2. Se ellers tabellen med oversikt over anbefalte klassetrinn i slutten av denne innledningen.

ARBEIDSFORM

I alle oppleggene arbeider elevene i par eller i små grupper. Til noen av dem finnes det oppgaveark som kopieringsoriginaler bakerst i heftet, noe som gjør at elevene kan jobbe i eget tempo. Andre oppgaver gis muntlig. Disse er egnet til faglig samtale og diskusjon, siden alle elevene jobber med samme problemstilling samtidig.

Felles for alle oppleggene er at elevene skal finne frem til et matematisk uttrykk. De fleste starter med at elevene bygger figurer. Elevene vil besvare oppgavene på forskjellige måter. Av den grunn er det viktig at man fører en klassesamtale i etterkant der de ulike strategiene og løsningene blir sammenlignet.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

Hvert opplegg tar omtrent 2-3 skoletimer.

UTSTYR

Avhengig av opplegget

Runde og/eller firkantete tellebrikker, centikuber eller terninger og oppgaveark.

DIDAKTISKE REFLEKSJONER

Alle aktivitetene i disse undervisningsoppleggene skal hjelpe elevene med å se mønster. Mønster kan representeres på forskjellige måter, slik som muntlig beskrivelse, tegning, tallmønster eller algebraisk form. Her er vi spesielt interesserte i den algebraiske formen.

Det er viktig å tenke på at jobbing med figurtall og det å finne mønster kan være vanskelig selv for høyt presterende elever. Mange elever som er flinke til å løse oppstilte oppgaver, sliter når de skal finne ut sammenhenger på egen hånd.

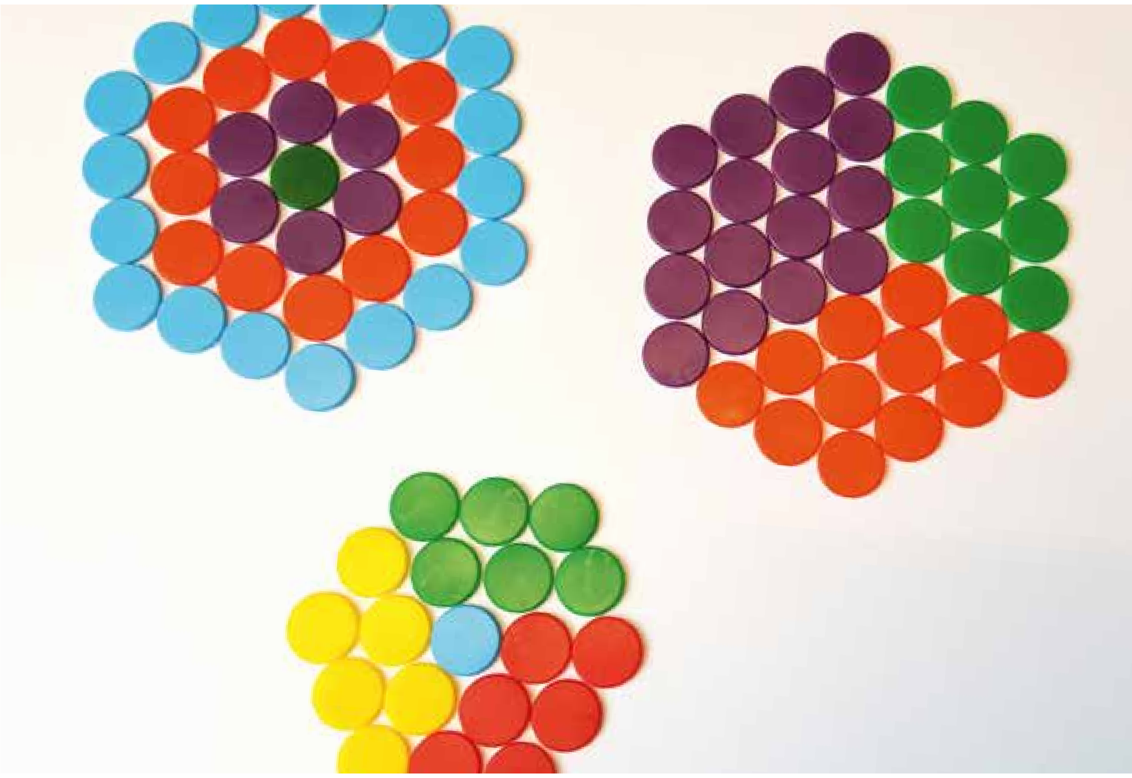
Oppgavetypene er valgt ut slik at det er lett å finne mange ulike løsninger. Mange elever tror at det bare finnes en løsning eller at det finnes en beste løsning. Oppgaver der vi tar utgangspunkt i figurtall vil imidlertid åpne for mange mulige svar. Det er et viktig poeng at elevene ser at forskjellige løsningsmuligheter kan være riktige. Bak de ulike løsningene er forskjellige tankemønster som må gjøres kjent for alle elevene i en oppsummerende klassesamtale. De ulike løsningene kan så sammenlignes med hverandre, og ved hjelp av algebra kan man se at det dreier seg om ulike former av samme uttrykk.

Det viser seg at mange elever jobber bedre ved bruk av kopieringsoriginaler med tabeller. Spesielt lavt presterende elever vil gjerne ha tall eller ord i alle ruter. Erfaringen viser at de jobber mer systematisk og heller ikke gir opp så lett med denne hjelpen.

En oversikt over undervisningsopplegg med anbefalte klassetrinn:

Opplegg1	Tårn	1P		2P	2P-Y					Oppgaveark
Opplegg 2	Ramme	1P	1T	2P	2P-Y	2T	S1		S2	
Opplegg 3	Perlebrett	1P*	1T*	2P*	2P-Y*	2T*	S1*	R2	S2	Oppgaveark til deler av opplegget
Opplegg 4	Treet							R2	S2	Oppgaveark

* deler av opplegget er egnet



1 Figurtall, følger og rekker – Tårn

Dette opplegget passer best for 1P, 2P og 2P-Y.
En beskrivelse av aktuelle kompetansemål finnes på side 1 - 3.

UTSTYR
Centikuber eller terninger og oppgaveark.

AKTIVITET
Elevene arbeider parvis. De jobber seg gjennom oppgavearket, målet er å finne frem til algebraiske uttrykk ved hjelp av konkreter.

Oppgave 1

- Bygg et tårn med terninger, det vil si at du setter terningene opp på hverandre. Tell antall synlige sider og noter svaret i tabellen.
- Prøv å finne en sammenheng mellom antall terninger og antall synlige sider. Noter sammenhengen med ord.
- Bruk denne sammenhengen for å finne antall synlige sider i flere tårn.
- Klarte du å finne løsningen med regelen du har skrevet i boksen over, eller måtte du endre noe for å finne antall sider i høye tårn? Noter den nye regelen.

Oppgave 2

- I denne oppgaven gjør du det samme som i oppgave 1, men nå teller du sidene som *ikke* synes.
- Prøv å finne en sammenheng mellom antall terninger og antall ikke-synlige sider. Noter sammenhengen med ord.
- Bruk denne sammenhengen for å finne antall ikke-synlige sider i flere tårn.
- Klarte du å finne løsningen med regelen som du har skrevet i boksen over, eller måtte du endre noe for å finne antall ikke-synlige sider i høye tårn? Noter den nye regelen.

Kommentar til læreren

I starten vil mange elever bare finne ut økningen fra figur til figur, dvs. den rekursive formelen. Elevene er gjerne fornøyde med å ha funnet et svar eller, som de gjerne tror, svaret. Derfor blir de utfordret til å finne svar for store tall i den neste tabellen. Hvis de skal finne antall sider ved et stort antall terninger, må de revurdere strategien, og de fleste vil etter hvert komme frem til én eksplisitt formel.

Når elevene har kommet frem til en løsning, er det viktig at alle løsningene, også uriktige, noteres på tavlen. Elevene som presenterer sin løsning skal redegjøre for tenkemåten muntlig. Spør gjerne de andre elevene om de har forstått hvordan denne gruppen tenkte.

Eksempler på elevsvar

- Antall synlige sider

$4x + 1$	Jeg ser fire sider på alle terningene pluss en side på toppen.
$5 + 4 \cdot (x - 1)$	Jeg ser 5 sider på den øverste terningen og fire sider på alle de andre terningene.
$6x - 2(x - 1) - 1$	Alle terninger har 6 sider. Siden vi ikke ser sidene i mellomrommet, må jeg trekke fra 2 per mellomrom. Det er ett mellomrom mindre enn antall terninger. I tillegg ser jeg ikke siden som ligger på bordplaten.

- Antall ikke-synlige sider

$2(x - 1) + 1$	Det er et mellomrom mindre enn antall terninger. Hvert mellomrom har 2 ikke-synlige sider. I tillegg må jeg addere siden som ligger mot bordplaten.
$6x - (4x + 1)$	De ikke-synlige sidene er det motsatte av antall synlige sider. Hver terning har 6 sider. Jeg regner ut alle sidene og trekker fra antall synlige sider.
$6x - (5 + (4 \cdot (x - 1)))$	Samme begrunnelse som i alternativ to.

- Sum

Hvis jeg summerer de synlige og de ikke-synlige sidene i terningen, får jeg 6 ganger antall terninger. Det er logisk, for da får jeg alle sidene. En side må være enten synlig eller ikke-synlig. Det finnes ingen flere muligheter.

Noen svar kan være feil, men det er god læring i å diskutere hvorfor de er feil. Når man har rettet opp eventuelle feilsvar, er det viktig å presisere at alle de ulike uttrykkene er riktige, og at alle viser en god måte å tenke på. For å bekrefte at alle svarene er riktige, må man ta seg tid til å omforme de ulike uttrykkene og vise at de har den samme verdien. Det er heller ikke slik at den ene tenkemåten er bedre enn den andre, men vi kan si noe om hvor viktig det er å kunne forenkle algebraiske uttrykk.

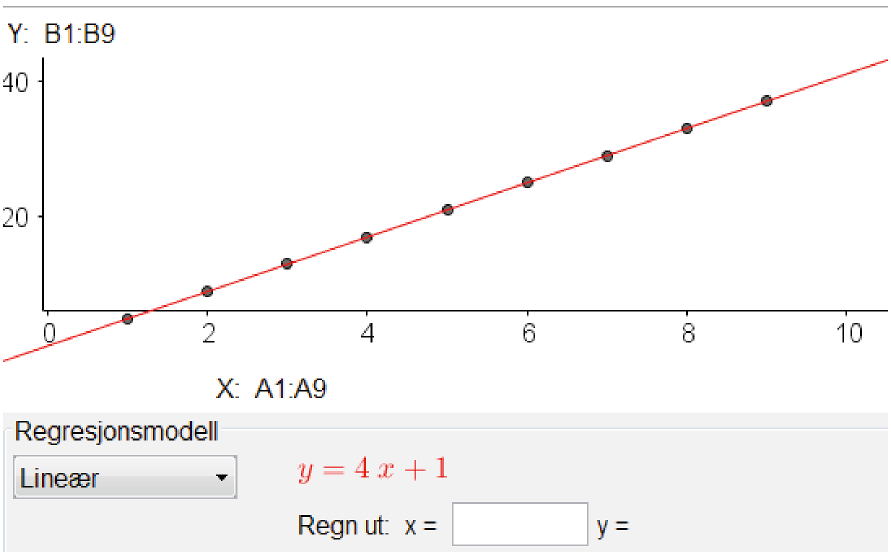
UTVIDELSE AV OPPGAVEN

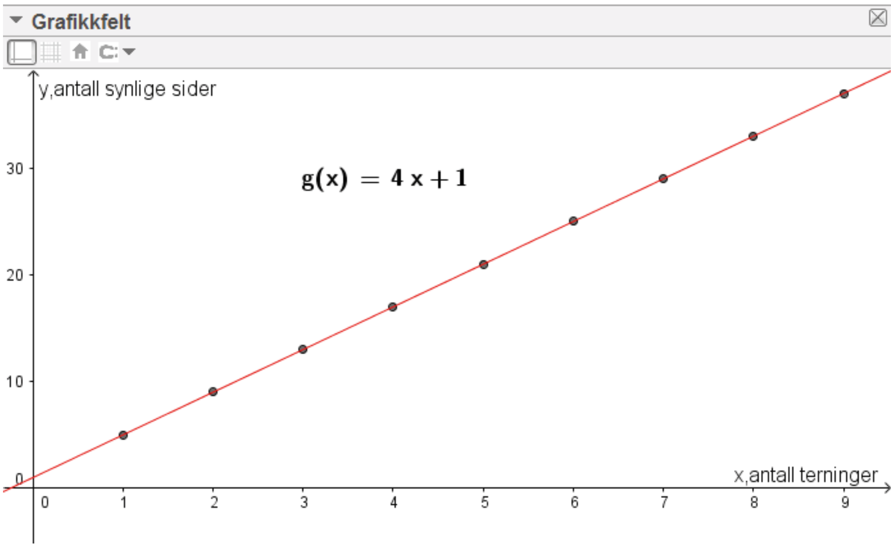
Det finnes mange elever som har vanskeligheter med å finne eksplisitte formler. I og med at modellering er viktig, spesielt i 2 P, må elevene ha mye trening i dette. Det hjelper å jobbe med forskjellige representasjoner. Vi har brukt representasjonene konkreter, tabell og formel. For å vise det på enda flere måter, kan vi utvide med grafisk representasjon. Regresjon med digitalt hjelpemiddel er en god vei til bedre forståelse, spesielt for elever som ikke klarer å finne den eksplisitte formelen.

I GeoGebra skriver man verdiene fra tabellen på arket inn i regnearket og velger regresjonsanalyse. NB: Vi anbefaler at innholdet i regresjonsvinduet kopieres over i grafikkfeltet på grunn av den uvanlige stillingen av koordinatsystemet i regresjonsvinduet.

I funksjonsuttrykket vi får, finner vi igjen 4-tallet fra «det øker med 4» som stigningstall i funksjonsuttrykket. Dette gir økt forståelse av begrepet «stigningstall», samtidig som det viser at ulike emner i matematikk henger sammen.

Konstantleddet blir derimot en mer teoretisk diskusjon for interesserte elever. Hvor mange sider ser vi hvis vi ikke har noen terning? Funksjonens gyldighetsområde er $x \geq 1$.





Regneark

	A	B
1	1	5
2	2	9
3	3	13
4	4	17
5	5	21
6	6	25
7	7	29
8	8	33
9	9	37
10		
11		
12		
13		

FLERE UTVIDELSER

Elevene oppfordres til å bygge egne figurer, f.eks. tårn med 2 terninger ved siden av hverandre, rekker av terninger eller rammer av terninger.

2 Figurtall, følger og rekker – Ramme

Dette opplegget passer best for 1 P, 1T, 2P, 2P-Y, S1.
En beskrivelse av aktuelle kompetansemål finnes på side 1 - 3.

UTSTYR
Firkantete tellebrikker

Opplegget har tre aktiviteter, hver av dem med utgangspunkt i oppgaver som læreren gir elevene muntlig.

AKTIVITET 1

- Tenk deg et kvadrat laget av 81 kvadratiske brikker. De ytterste brikkene i kvadratet kaller vi rammen. Hvor mange brikker er det i rammen?

Kommentar til læreren
Svaret 32 noteres på tavlen. Selve svaret er uinteressant, for i dette opplegget er det viktigere å fokusere på de ulike strategiene elevene bruker. Læreren skal notere alle de ulike fremgangsmåtene elevene har brukt for å komme frem til 32.

Eksempler på elevsvar

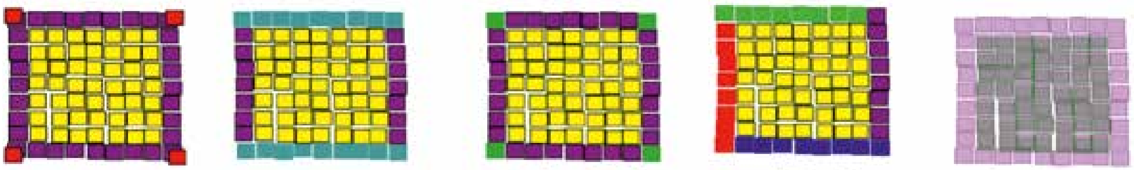
$9 \cdot 4 - 4 = 36 - 4 = 32$	Hver side har 9 brikker. Jeg har telt hjørnene dobbelt, og derfor må jeg trekke fra 4.
$2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 = 18 + 14 = 32$	2 sider har 9 brikker, de andre 2 sidene har 2 brikker mindre, dvs. 7.
$4 \cdot 7 + 4 = 32$	Jeg tar bort brikken i hjørnet. Da får jeg 4 ganger 7 brikker. Jeg legger til de 4 hjørnene igjen.
$4 \cdot 8 = 32$	Jeg kan dele rammen inn i 4 ganger 8 brikker. Jeg begynner å telle på nytt ved hvert hjørne.
$9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32$	Jeg ser to kvadrater. I den store har alle sidene 9 brikker, og i den lille har alle sidene 7 brikker. Forskjellen mellom de to kvadratene er rammen.

AKTIVITET 2

- Tegn eller legg en figur som viser hvordan du har tenkt.
- Tegn eller legg figurer som viser andres tenkemåter.

Kommentar til læreren
Elevene blir først utfordret til å visualisere sin egen løsning ved å tegne den eller legge den med brikker. Etterpå skal de sette seg inn i løsninger som andre elever har presentert og tegne disse løsningene.

Mulige løsninger



$4 \cdot 9 - 4 = 32$ $\quad$ $2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 = 32$ $\quad$ $4 \cdot 7 + 4 = 32$ $\quad$ $4 \cdot 8 = 32$ $\quad$ $9^2 - 7^2 = 32$

AKTIVITET 3

- Alle figurene som er laget hittil, kaller vi for figur 9, da sidene er 9 brikker lange.
- Hvis det var n brikker langs siden, hvor mange brikker trenger man da til rammen? Start med å lage eller tegne figur 4, 5 og 6.

Kommentar til læreren

Før utvidelsen til *n* bør elevene begynne med mindre kvadrater. Det går raskere og det er lettere å beholde oversikten dersom man legger få brikker. Derfor oppfordres elevene til å starte med et kvadrat med sidelengde 4, så et med sidelengde 5, for så å fortsette med sidelengde 6 osv. Det er en fordel at elevene samler resultatene i en tabell der de ikke bare noterer svaret, men også regnestykket som ligger bak. Da er det lettere å se hva som endrer seg og hva som forblir likt.

Overgangen fra tall til variabel er vanskelig for mange elever, og det er viktig at disse elevene får nok tid. Andre elever vil derimot finne formelen for *n* direkte ut fra samtalen i den første oppgaven. Hvis forklaringene er tydelige og tegningene er gode, er det bare å erstatte 9 med *n*. Disse elevene trenger selvsagt ikke å lage mange kvadrater, men trenger nye utfordringer. Se utvidelsen av oppgaven.

Mulige løsninger: (tilsvarer tegningene)

$4n - 4$	$2n + 2(n - 2)$	$4(n -2) + 4$	$4(n - 1)$	$n^2 - (n - 2)^2$

Læreren må ta seg tid til å vise at alle tenkemåtene er riktige, og at alle formlene gir det samme svaret. Det er viktig å vise at alle svarene er riktige ved å omforme dem algebraisk.

UTVIDELSE AV OPPGAVEN

Elevene oppfordres til å legge et rektangel og finne formler for rammen rundt figuren. Siden forholdet mellom sidene er valgfritt, vil denne oppgaven ha individuelle svar.

3 Figurtall, følger og rekker – Perlebrett

Dette opplegget passer for 1P – R2.
En beskrivelse av aktuelle kompetansemål finnes på side 1 - 3.

Opplegget *Perlebrett* består av forskjellige aktiviteter.
Aktivitetene kan løses uavhengig av hverandre og på mange forskjellige måter med ulik vanskelighetsgrad. Læreren må velge hvor mange hint og hjelpemidler elevene skal få. Jo færre hint elevene får, jo flere ulike strategier vil bli brukt for å løse oppgaven. Samtidig er det en fare for at noen elever gir opp før de har begynt. Uansett må vi oppfordre elevene til å bygge mange figurer.

Telling er veldig ofte den første strategien som blir valgt. Geometriske løsninger er mer sjeldne, spesielt blant elever på høyere trinn, og av den grunn må strategiene bli tvunget frem. Kopieringsoriginalene er ment å inspirere elevene til varierte tenkemåter. Etter å ha løst mange slike problemløsningsoppgaver, vil mange elever se hvor lett det er å finne en formel ved hjelp av digitale verktøy.

UTSTYR

Sekskantet perlebrett med perler, runde tellebrikker eller eventuelt non stop brukes til alle aktivitetene i dette opplegget.

Alle aktivitetene baserer seg på disse figurene. Her vises figur 3, 4 og 5 i ulike mønster. Figuren øker med én perlerad ved hvert nytt figurnummer. Figur 3 består av 3 perlerader, figur 4 av 4 osv. Perlen i midten er rad 1.

AKTIVITET 1

Systematisering med tabeller

UTSTYR

Perlebrett med perler eller runde tellebrikker og oppgaveark.
Elevene jobber i små grupper på 2-3 elever.

Oppgaveark: Perlebrett 1

- Bildet viser et perlebrett i størrelse 4, det vil si figur 4.
- Lag perlebrett i flere størrelser, og noter antall perler du trenger i tabellen.
- Finn en sammenheng mellom størrelsen av perlebrettet og det antall perler som du trenger for å lage det.
- De tre siste kolonnene kan du bruke til beregninger.

Kommentar til læreren

Det er viktig at elevene får god tid til å jobbe med konkreter. De skal bli oppfordret til å lage mange figurer, for ofte blir mønster først synlige når man har mange tall å forholde seg til. Etter hvert som elevene kommer frem til matematiske uttrykk, samles svarene på tavlen.
Det er ikke selve svaret som er det viktigste, men strategiene som fører til resultatet. Elevene skal forklare strategiene sine til hverandre. Når strategiene er godt forklart, må man bruke tid på å undersøke om alle svarene er riktige. Til dette bruker man elevenes algebrakunnskaper.
Beregningene gjøres først og fremst på papir, men kan, som trening, etterprøves med digitale hjelpemidler. Det er alltid lettest å forenkle et komplisert uttrykk.

Forslag til løsninger

Strategi 1

Størrelse/Figur	Antall	Økning	Økning		
1	1			1	1
2	7	6	1 · 6	6 + 1	6 · 1
3	19	12	2 · 6	18 + 1	6 · 3
4	37	18	3 · 6	36 + 1	6 · 6
5	61	24	4 · 6	60 + 1	6 · 10
6	91	30	5 · 6	90 + 1	6 · 15
n	$\mathbf{6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 1}$		$(n - 1)6$		$\mathbf{6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}}$

Systematisering av tankene:

- Alle tallene øker med ett tall i 6-gangen. (kolonne 3 og 4)
- Det øker alltid med 6·(figurnummer -1). (kolonne 4)
- Antall perler er ikke i 6-gangen, men 1 større enn tall i 6-gangen. (kolonne 2)
- 6 er multiplisert med et trekanttall. (kolonne 6)
- Utfra kolonne 6 kan man finne en formel for antall perler. (kolonne 2)

Strategi 2

Størrelse/Figur	Antall	Antall -1	6 er felles faktor	3 er felles faktor
1	1	0	0·6	
2	7	6	1·6	3·2·1
3	19	18	3·6	3·3·2
4	37	36	6·6	3·4·3
5	61	60	10·6	3·5·4
6	91	90	15·6	3·6·5
n	$\mathbf{3 \cdot n \cdot (n - 1) + 1}$		$6 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$	$\mathbf{3 \cdot n \cdot (n - 1)}$

Systematisering av tankene:

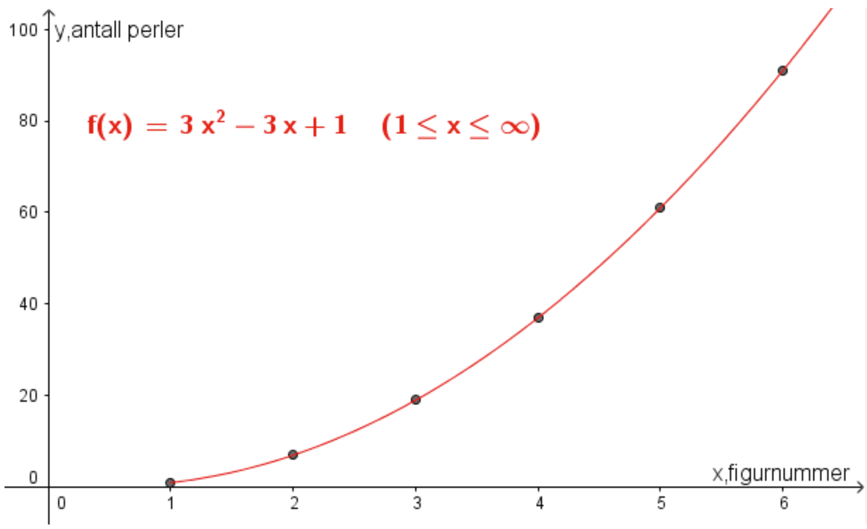
- Antall brikker er 1 større enn et tall i 6-gangen. (kolonne 2)
- Elevene prøver seg frem ved å faktorisere. Alle tallene inneholder en faktor 6. Hvis elevene kjenner til trekanttall, er de i mål, men ellers må de prøve videre. (kolonne 3 og 4)
- Ved å faktorisere mer vil elevene oppdage at faktor 3 er felles for alle, den andre faktoren er figurnummeret, og den tredje er 1 mindre enn figurnummeret. (kolonne 5)

Strategi 3

Tallene fra tabellen skrives inn i et regneark. Ved hjelp av regresjon kan elevene finne en formel som passer til alle tall. Denne måten å løse oppgaven på vil ikke fremme forståelsen, med mindre man jobber aktivt med løsningen. Vi anbefaler at regresjon helst brukes til å verifisere løsningene som elevene har funnet. For lavt presterende elever kan derimot regresjon være den eneste måten å løse slike oppgaver på. I slike tilfeller må man bruke klassesamtalen til å resonnere og forklare funksjonsuttrykket. Det viktig at elevene trener på å skrive navn på aksene slik at det blir en rutine.

Systematisering av tankene:

- » Ved regresjon får vi et funksjonsuttrykk, men antall perler kan bare være hele tall.
- » Man kan prøve seg fram med flere funksjonsverdier, f(1),f(2),f(3) osv. og kontrollere at man hver gang får riktig antall perler.



	A	B
1	1	1
2	2	7
3	3	19
4	4	37
5	5	61
6	6	91
7		
8		
9		
10		
11		
12		

På de høyeste nivåene er det relevant å drøfte gyldighetsområde/definisjonsområde. Dette er jo en funksjon som gjelder bare for hele tall som er større enn eller lik 1. Funksjonsuttrykket hjelper oss å finne et algebrauttrykk som gir alle verdiene i gyldighetsområdet.

AKTIVITET 2

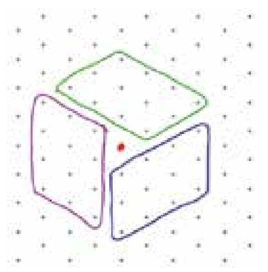
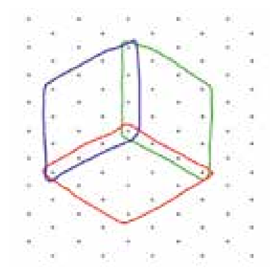
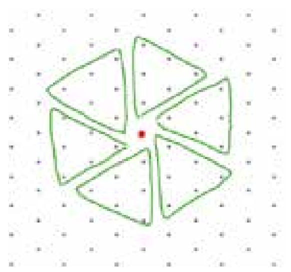
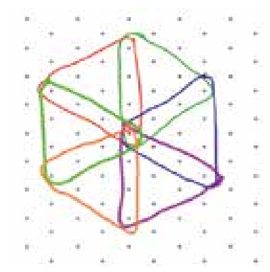
Geometriske tolkninger

UTSTYR
Perlebrett med perler eller runde tellebrikker, oppgaveark.

Elevene jobber i par eller i små grupper på 2-3 elever. Alle har hvert sitt oppgaveark.

Oppgaveark: Perlebrett 2.
- Nedenfor er det 4 tegninger. Disse viser ulike geometriske tenkemåter for å finne en formel for antall perler som trengs for å lage et perlebrett. Alle eksemplene viser figur 4.
- Lag en tilsvarende tegning for figur 3 og 5. Sett opp regnestykker som viser hvordan du finner antall perler i figurene.
- Forklar med ord hvilke tanker som ligger bak hver figur og hvordan du finner antall perler.
- Finn en formel som viser tenkemåten bak figuren.

Kommentar til læreren
Denne oppgaven handler om det samme som aktivitet 1, men her er oppgaven vist med en geometrisk tenkemåte. Å tenke med geometriske formler vil være en uvant strategi for mange elever, og derfor får de se noen ulike løsningsforslag. Den første oppgaven blir dermed å lese og forstå disse. Alle eksemplene bygger på $n = 4$, det vil si figur 4 (se oppgaveark 2). Løsningene med trekanter bygger på trekanttallene. Selv om man ofte bruker trekanttall i modellering, er de gjerne ukjente for elevene, og derfor vil mange oppleve oppgaven som vanskelig.

			
Eks 1	Eks2	Eks 3	Eks 4

Eksempler på elevsvar

Eks 1	Bygger på firkanter	Figuren er delt inn i tre like store firkanter. Den ene siden er like lang som figurnummeret, den andre er én kortere. Til slutt må man addere midtperlen.	$n \cdot (n-1) \cdot 3 + 1$
Eks 2	Bygger på firkanter	Figuren er delt inn i tre like store kvadrater med sidelengde lik figurnummeret. Jeg må trekke fra det som jeg har telt dobbelt, dvs. 3 ganger ett tall mindre enn figurnummeret. Til slutt må jeg trekke fra 2, siden jeg har telt midtperlen tre ganger.	$3n^2 - 3(n-1) - 2$
Eks 3	Bygger på trekanter	Figuren er delt opp i 6 like store trekanter. Sidene i trekanten er én mindre enn figurnummeret. Midtperlen er ikke tatt med. Jeg kan bruke formelen for trekanttall.	$6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 1$
Eks 4	Bygger på trekanter	**1. tenkemåte:** Figuren er delt inn i 6 trekanter med samme sidelengde som figurnummeret. Man må trekke fra det som er dobbelt. Midtperlen er beregnet 6 ganger, derfor må man trekke fra 5. **2. tenkemåte:** Figuren ser ut som en stjerne med 6 stråler. Lengden av strålen er én mindre enn figurnummeret. Rommet mellom strålene er trekanter med sider 2 mindre enn figurnummeret. Til slutt må jeg addere midtperlen.	$6 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - 6 \cdot (n-1) - 5$ $6 \cdot (n-1) + 6 \cdot \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} + 1$

AKTIVITET 3

Eksamensoppgave

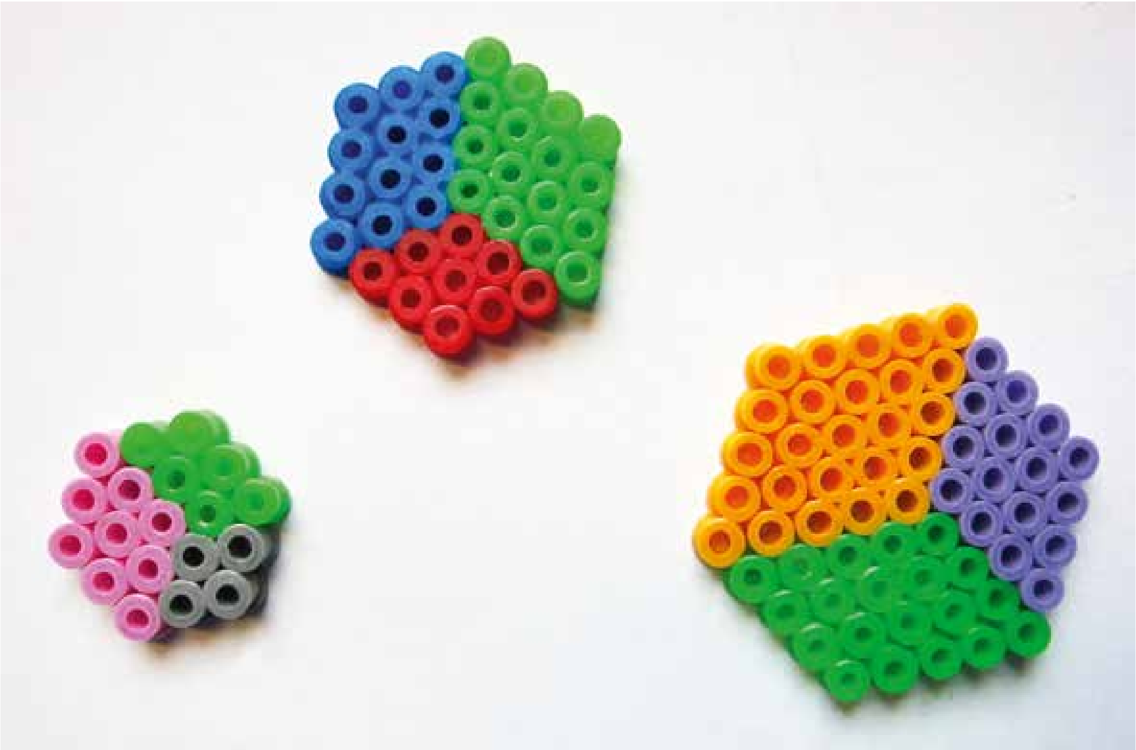
UTSTYR
Perlebrett med perler eller runde tellebrikker, oppgaveark.

Denne oppgaven bygger på en oppgave som ble gitt til eksamen i 2P våren 2014. Der ble det brukt små sjokolader for å lage mønsteret.

Elevene jobber i par med hvert sitt oppgaveark.

Oppgaveark: Perlebrett 3

- Bruk perler eller tellebrikker og lag en figur med størrelse 4. Velg fargene slik at figuren blir delt inn i tre firkanter.
- Tegn figuren inn i prikkarket, og fargelegg firkantene med forskjellige farger.
- Lag og tegn figur 3 og figur 5 på samme måte.
- Bruk firkantene til å beregne antall brikker du trenger for å lage figur *n*.



Kommentar til læreren

Utgangspunktet er konkret. Eleven skal dele inn figuren i 3 firkanter. Siden summen av brikkene ikke er delelig med 3, er det lett å se at firkantene må ha ulike størrelser. Videre gjør figurens form at det bare er mulig å lage parallellogrammer.

Elevene må se at man kan finne antall brikker ved hjelp av multiplikasjon.

Størrelse/Figur	Firkant 1	Firkant 2	Firkant 3	Sum
Figur 3	$3 \cdot 3 = 9$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 2 = 4$	19
Figur 4	$4 \cdot 4 = 16$	$3 \cdot 4 = 12$	$3 \cdot 3 = 9$	37
Figur 5	$5 \cdot 5 = 25$	$5 \cdot 4 = 20$	$4 \cdot 4 = 16$	61
Figur 6	$6 \cdot 6 = 36$	$6 \cdot 5 = 30$	$5 \cdot 5 = 25$	91
Figur 10	$10 \cdot 10 = 100$	$10 \cdot 9 = 90$	$9 \cdot 9 = 81$	271
Figur n	$n \cdot n = n^2$	$n \cdot (n - 1)$	$(n - 1)\,(n - 1)$	$3n^2 - 3n + 1$

Oppfølgingsspørsmål

I perleboksen har du 8000 perler. Hvor stort er det største perlebrettet du kan lage?

Her er oppgaven løst med GeoGebra CAS. Selv om det kanskje virker unødvendig komplisert, er det lurt alltid å be om eksakt svar først. Det hender at vi ikke får alle svarene hvis vi bare krever en numerisk løsning.

CAS

1 3n^2-3n+1=8000

Løs: $\left\{ n = \frac{-\sqrt{95997}+3}{6}, n = \frac{\sqrt{95997}+3}{6} \right\}$

2 {n = (-sqrt(95997) + 3) / 6, n = (sqrt(95997) + 3) / 6}

≈ $\{n = -51.14, n = 52.14\}$

Med 8000 perler kan man lage figur 52.

AKTIVITET 4

Aritmetisk rekke

Denne aktiviteten krever en tenkemåte som passer for elever på R2.

UTSTYR
Perlebrett med perler eller runde tellebrikker og oppgaveark.

Oppgaveark: Perlebrett 4
Bildet viser et perlebrett med størrelse 4 (Figur4)

- Bruk perler eller tellebrikker og lag figurer med størrelse 3, 4 og 5 slik som på bildet.
- Tegn figurene inn i prikkarket. Fargelegg slik at ringene får forskjellig farge.
- Bruk ringene og det du har lært om rekker til å beregne antall brikker som du trenger til å lage figur *n*.
- Hvor stort perlebrett kan vi lage med 8000 perler?

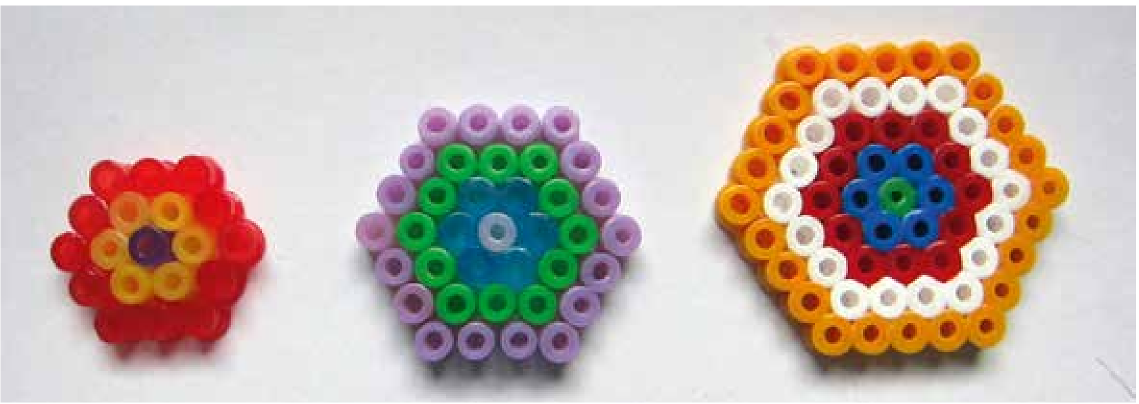
Kommentar til læreren
Selv på R2 er det viktig at elevene får anledning til å jobbe med konkreter. Matematikkunnskapen blir mer holdbar hvis de kjenner til forskjellige representasjoner og dermed forskjellige tilnærmingsmåter. Vi anbefaler derfor at elevene har jobbet med en av de andre aktivitetene før de starter med denne, gjerne aktivitet 2 eller 3.

Opplegget egner seg godt som repetisjonsopplegg.

Når elevene blir presentert for oppgaven, vil de gjerne starte som beskrevet i aktivitet 1. De lager en tabell, og de prøver å finne en matematisk formel ut fra opplysningene i tabellen. Hvis vi tipser elevene om å se på økningen, leder vi dem til å tenke på følger og rekker.

Nedenfor er det vist en mulig fremgangsmåte.

Aritmetisk følge:



Det trengs 6 flere perler fra figur til figur, sett vekk fra figur 1. Derfor velger vi å endre nummereringen.

Størrelse/Figur	Antall i den ytterste ringen	Økning fra forrige ledd	Vi velger ny nummering
1	1		
2	6	5	$a_1 = 6$
3	12	6	$a_2 = 12$
4	18	6	$a_3 = 18$
5	24	6	$a_4 = 24$
6	30	6	$a_5 = 30$

Den konstante økningen viser at antall perler per ring, tilsvarer en aritmetisk følge.
Vi kan bruke formelen for aritmetisk rekke. Til slutt må man addere 1, dvs. midtperlen som man har tatt bort under beregningen.

$$a_1 = 6$$
$$d = 6$$
$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$a_n = 6 + 6(n-1) = 6n$$

Aritmetisk rekke for antall perler til et brett med størrelsen *n*:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$s_n = \frac{n}{2}(6 + 6n) = n(3 + 3n) = 3n + 3n^2$$

Svaret med midtperlen: $3n^2 + 3n + 1$

- Hvor stort perlebrett kan vi lage med 8000 perler?

CAS

1 3n^2-3n+1=8000

Løs: $\left\{ n = \frac{-\sqrt{95997} + 3}{6}, n = \frac{\sqrt{95997} + 3}{6} \right\}$

2 n=(sqrt(95997)-3)/6

≈ $n = 51.14$

NB! Her må vi huske at vi nummererte tallene på ny. Vi må altså addere 1 for å finne nummeret til perlebrettet. Se svaret under aktivitet 3.

Med 8000 perler kan man lage figur 52.

4 Figurtall, følger og rekker – Treet

Dette opplegget passer best for R2 og S2.
En beskrivelse av aktuelle kompetansemål finnes på side 1 - 3.

UTSTYR
PC med GeoGebra eller annen tilsvarende programvare og oppgaveark.

AKTIVITET
Etter en kort forklaring om oppbygging av figuren, skal elevene fylle ut tabellen. Alle elever arbeider med hvert sitt oppgaveark. Etter en stund sammenligner de resultatene med hverandre, slik at det videre arbeidet ikke hindres av tilfeldige regnefeil.

- Fyll ut tabellen.

Se på n-raden:

- Sjekk med andre elevgrupper. Har alle gruppene samme svar? Har alle tenkt på samme måte? Forklar for hverandre hvordan dere har tenkt.

Se på den siste kolonnen:

- Uttrykket i *n*-raden er en generell formel for lengden målt fra roten til den ytterste grenen.
- Tegn denne formelen som en funksjon i GeoGebra.
- Hva skjer med funksjonen når n blir uendelig stor?
- Vis det på flere måter.

Kommentar til læreren
Elever på R2 og S2 vil ikke ha vanskeligheter med å finne svar for kolonne 1,2, 3. Den siste kolonnen byr derimot på utfordringer. Ved summering av brøkene finner man at summen alltid er en brøkdel mindre enn 2. Med dette som utgangspunkt er det mulig å finne en formel for hele lengden.

Begrunnelsen for formelen drøftes gjennom klassesamtale. Her er det viktig at alle elevene ser at flere ulike fremgangsmåter fører til mål. Fremgangsmåtene er hentet fra ulike deler av matematikken, noe som gir elevene mulighet til å finne sammenhenger mellom ulike kompetansemål.

Mulige fremgangsmåter

- Finn summen for hel lengde ved å finne mønster i tallfølger.

Her er det vanlig med to ulike former for svar:

Tankegang 1:

» Lengden av den nye grenen er $\frac{1}{2^n}$. Vi kan se at lengden er en brøkdel mindre enn 2.

Steg	Antall nye grener	Lengden av den nye grenen	Total lengde av alle grener tilsammen	Lengden fra roten til den ytterste grenen
0	1	1	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$	2	$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2^1}$
2	4	$\frac{1}{4}$	3	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{4}=2-\frac{1}{2^2}$
3				$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8}=2-\frac{1}{2^3}$
4				
n				$2-\frac{1}{2^n}$

Tankegang 2:

» Elevene som løser oppgaven med denne tankegangen, legger sammen brøkene og betrakter mønsteret i teller og nevner hver for seg.

Steg	Antall **nye** grener	Lengden av den nye grenen	Total lengde av alle grener tilsammen	Lengden fra roten til den ytterste grenen
0	1	1	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$	2	$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{2^2-1}{2^1}$
2	4	$\frac{1}{4}$	3	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=\frac{8-1}{4}=\frac{2^3-1}{2^2}$
3				$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=\frac{16-1}{8}=\frac{2^4-1}{2^3}$
4				
n				$\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

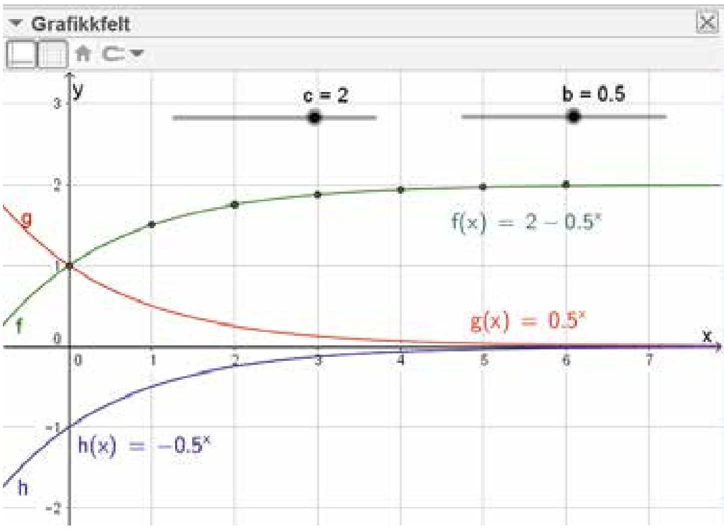
Her er det viktig at elevene blir klare over at begge formlene er riktige. Ved bruk av potensregler skal de klare å regne fra den ene formelen til den andre.

- Finn summen for hel lengde ved regresjon.

Lag liste med punkter og merk dem av i grafikkfeltet. Elevene skal prøve å finne en funksjon med graf som går gjennom disse punktene.

Vi kan ikke bruke en forhåndsdefinert funksjon. Dette åpner for resonnering. Elevene må teste mange funksjoner, men ser ganske fort at x må være eksponent. $g(x) = b^x$ ligger feil, derfor kan man prøve med $h(x) = -b^x$. Det at vi kan snu en graf ved hjelp av minustegn, er ikke en kunnskap alle elever sitter inne med. Grafen har riktig form, men ligger for lavt. Altså må grafen løftes opp. Her er det repetisjon av konstantleddet.

Fremgangsmåte:
Bruk GeoGebra og skriv inn funksjonen: $f(x) = c - b^x$. Flytt på glidere og finn den grafen som passer til punktene i grafikkfeltet.

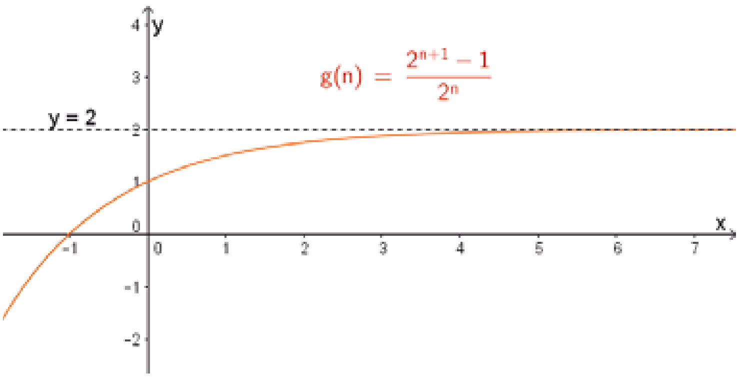


	A	B
1	0	1
2	1	1.5
3	2	1.75
4	3	1.88
5	4	1.94
6	5	1.97
7	6	2
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Funksjonen *f(x)* = *2 - 0,5*^{x} ligner på skrivemåten fra Tankegang 1 ovenfor. Ved hjelp av potensregler kan dette uttrykket skrives på samme form som uttrykkene ovenfor.

- Hva skjer med funksjonen når n blir uendelig stor? Hvor stor blir summen av grenene? Vis det på flere måter.

Grafisk
Man kan tegne en graf og se at summen nærmer seg 2 hvis *n* blir uendelig stor.



I de nyere versjonene av GeoGebra er det ikke lenger nødvendig å omskrive til *g(x)*.

Grenseverdien ved regning:
Dette er en god repetisjon av algebra. Dersom man skal finne grenseverdien ved regning, ligger vanskeligheten i å omforme 2^{n+1} slik at brøken kan forkortes.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=2$$

Grenseverdien som sum av en uendelig geometrisk rekke

Den samlede lengden øker med: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots\ldots$

Den totale lengden er en geometrisk rekke med

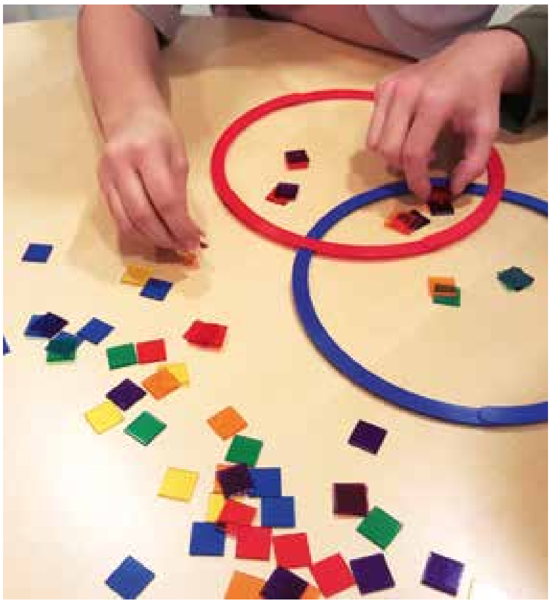
$k=\frac{1}{2}$ og $a_1=1$

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

Ved grenseberegning med CAS finner man samme svar.

CAS	
1	k:=1/2
	$k := \frac{1}{2}$
2	a:=1
	$a := 1$
3	Grenseverdi[a*(k^n-1)/(k-1), n, ∞]
	2

Denne oppgaven er velegnet som repetisjonsopplegg i R2. Oppgaven viser at man kan få samme svar på mange ulike måter. Det er viktig at elevene får anledning til å diskutere de ulike løsningsmåtene. Gjennom klassesamtaler vil elevene se at de ulike delene av læreplanen henger sammen, og for mange elever er dette en aha-opplevelse. Når de får anledning til å reflektere over svarene, vil mange elever oppleve at lærestoffet henger sammen.



5 Sannsynlighet – Oppvaskproblemet

KOMPETANSEMÅL

Kompetansemålene er hentet fra 1T, 1P, R1 og S1.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglege utfall, systematisere oppteljingar ved hjelp av krysstabellar, venndiagram og val-tre og bruke addisjonssetninga og produktsetninga. (1T)

- berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglege utfall, systematisere oppteljingar ved hjelp av krysstabellar, venndiagram og val-tre og bruke addisjonssetninga og produktsetninga i praktiske samanhengar. (1P)

- drøfte kombinatoriske problemer knyttet til ordnede utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging, og bruke dette til å utlede regler for beregning av sannsynlighet. (R1)

- berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglige utfall, systematisere oppteljingar ved hjelp av krysstabellar, venndiagram og val-tre og bruke addisjonssetninga og produktsetninga. (S1)
- gjøre rede for ordnede utvalg med og uten tilbakelegging og uordnede utvalg uten tilbakelegging, og gjøre enkle sannsynlighetsberegninger knyttet til slike utvalg. (S1)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal bli kjent med ulike begreper innenfor sannsynlighet gjennom en praktisk tilnærming med konkretiseringsmateriell.
- Eleven skal få en forståelse for å kunne bruke ulike representasjoner og strategier på samme oppgave.
- Eleven skal kunne vurdere hvilken representasjon og strategi som er mest hensiktsmessig til å løse ulike oppgaver.
- Eleven skal løse et problem ved systematisering.

ARBEIDSFORM

Denne oppgaven baserer seg på en veksling mellom løpende dialog mellom to og to elever og helklassesamtaler. Det er viktig at læreren stimulerer til samtale og diskusjon om faglig arbeid når elevene skal samarbeide. Elevene skal også skrive ned det de oppdager, både med ord og med matematiske symboler.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

Opplegget gir en fin innfallsvinkel til en samtale om flere sentrale begreper. Det egner seg derfor godt i starten av temaet sannsynlighet. Undervisningsopplegget tar 1-2 skoletimer.

UTSTYR:

Tellebrikker, skrivesaker og fargeblyanter.

INTRODUKSJON

Undervisningsopplegget bygger på en situasjon vi har kalt «Oppvaskproblemet». Læreren starter med å presentere det muntlig:

To jenter, Siri og Anna, deler hybel. De er stadig uenige om hvem sin tur det er til å ta oppvasken. De blir enige om å løse problemet ved trekking. De legger fire brikker i en skål, to røde og to blå, og bestemmer seg for å trekke to brikker. Jentene er enige om at Siri skal vaske opp hvis de trekker to brikker med ulike farger, og hvis de trekker to brikker med lik farge, skal Anna vaske opp.

DIDAKTISKE REFLEKSJONER

Dette opplegget skal være en veksling mellom utforsking, diskusjon mellom elever og diskusjon i hele klassen.

Når elevene diskuterer med sin samarbeidspartner, bør læreren innta en delaktig og lyttende rolle. Det er viktig at læreren ikke bryter inn med svar, men lytter til diskusjonen og stiller spørsmål som leder diskusjonen videre, dersom det er behov for det. Spørsmålene kan være av typen: «Hva tenker du om resultatet?», «Hva kan du endre?».

Dette opplegget har en lav inngangsterskel, men det kan utfordre elever på mange nivåer. Noen elever klarer kanskje ikke å få med seg de vanskeligste trinnene, men det er mye å lære for alle.

AKTIVITET 1

Del ut tellebrikker og presenter problemet til Siri og Anna.

Oppgave:

- Legg to røde og to blå brikker i en skål og utfør trekkingen. Noter ned hva dere får og hvem som skal vaske opp. Gjenta flere ganger og noter ned hver gang.
- Samle klassens resultater på tavlen.
- Diskuter felles i klassen: Hvordan ble fordelingen av antall ganger Siri og Anna skal vaske opp? Hva tenker dere om denne fordelingen?

Elevene skal utføre trekkingen med plastbrikker, terninger eller liknende. Dette skal de gjøre mange ganger, og det er viktig at de noterer ned svarene underveis. Det handler om trekking uten tilbakelegging. De fleste elever opplever løsningen på problemet som både reell og rettferdig. Det er nettopp det som er essensen ved oppgaven, for ved tilstrekkelig mange forsøk ser elevene at trekkingen likevel ikke er rettferdig.

I en klasse vil man oppleve at noen får tilnærmet lik fordeling i trekkingen, mens andre får skjevfordeling. Med få trekkinger er dette naturlig, og derfor er det viktig at hele klassens resultater samles på tavlen. I de fleste tilfeller vil skjevfordelingen bli tydelig. Da er utgangspunktet satt for en videre utforsking av «oppvaskproblemet».

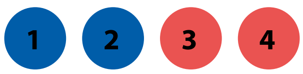
AKTIVITET 2

Be elevene diskutere hvorfor denne trekkingen ikke er rettferdig. La dem øve seg på å forklare strategiene sine for hverandre før de presenterer dem for klassen. La dem også prøve å skrive eller tegne resonnementene.

Under har vi listet opp noen strategier som elevene ofte kommer opp med. Løsningsforslagene nedenfor skal ikke presenteres for elevene i den formen de står i her. Det som skal vektlegges, er de spontane strategiene elevene kommer opp med. Bruk dette som grunnlag for diskusjonen i fellesskap. I løpet av timen må læreren planlegge i hvilken rekkefølge elevenes forslag skal presenteres.

Strategier som elevene ofte kommer opp med:

- Nummererer de fire brikkene som er i en skål, f. eks. 1, 2, 3 og 4 slik bildet viser. (Kombinatorikk). Skriver ned alle mulige kombinasjoner de kan trekke: 1-2, 1-3, 2-3 osv.

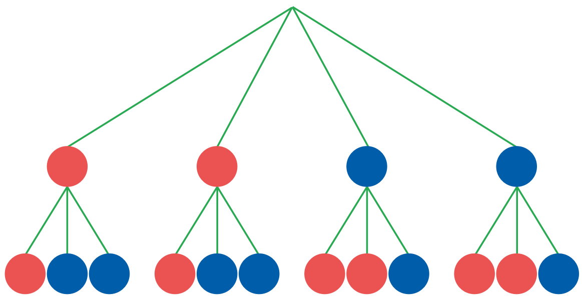
  

  Hvor mange ganger hver må da Siri og Anna vaske opp? Opptellingen gir 6 utfall, hvor bare to utfall består av brikker med samme farge.

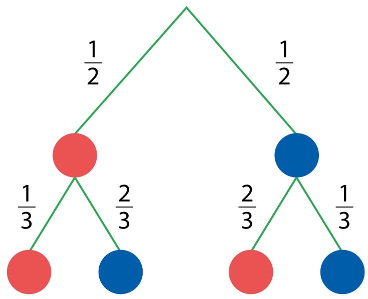
- Systematiserer trekkingen. Trekk f. eks ut en blå brikke først. Da er det igjen én blå og to røde i skåla. (Sannsynlighetsregning).

  Hvor stor sannsynlighet er det da for å trekke en rød?
  Hvor stor sannsynlighet er det da for å trekke en blå?
  Her ser vi at sannsynligheten for å få blå i andre trekking, er mindre enn å få rød.

- Setter opp et valg-tre som illustrerer alle de ulike utfallene.
  Når elevene arbeider med valgtre, legger de ofte opp de to ulike alternativene som er vist under:



Alternativ 1



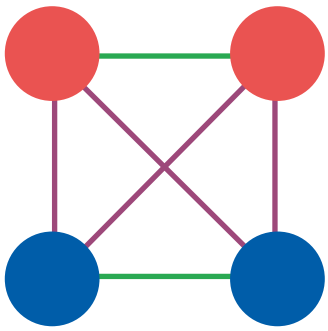
Alternativ 2

Alternativ 1: Kombinatorikk. Bildet viser de 12 mulige utfallene hvorav 4 utfall har brikker med samme farge.

Alternativ 2: Sannsynlighetsregning. Sannsynligheten for to brikker med samme farge er

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

- Elevene lager en tegning. (Kombinatorikk).
  Noen elever synliggjør sine tanker ved å tegne opp en skisse av situasjonen. Det kan se ut som dette, hvor hver strek viser et mulig utfall av trekkingen:



Her har elevene markert grønt på det å trekke to brikker med lik farge, og de har markert lilla på det som gir ulik farge.

Grønn farge gir $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ av utfallene og lilla gir $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

En slik skissering av situasjonen gir et meget godt utgangspunkt for en videre forståelse for de matematiske begrepene som er knyttet til sannsynlighet.

AKTIVITET 3

Oppgave

- Finn en mer rettferdig trekking for Siri og Anna.

Her må elevene ha flere enn fire brikker. La dem prøve å finne rettferdige løsninger en stund. Dersom noen prøver 1 rød og 3 blå eller omvendt, vil de trolig bli overrasket over at dette faktisk blir rettferdig. Be elevene forklare hvorfor dette blir rettferdig.

De kan velge en av strategiene fra aktivitet 2.

Det er vanskelig for elevene å finne flere løsninger på egen hånd, men læreren bør vite at hvis vi bruker to påfølgende trekanttall (1 – 3 – 6 – 10 – 15 – 21…), vil trekkingen alltid bli rettferdig. Regn et eksempel sammen med klassen. Anta at de har 10 røde brikker og 15 blå, i alt 25 brikker. Tydeliggjør resonnementene for elevene.

Forklaring ved hjelp av sannsynlighetsregning

Sannsynligheten for å trekke to røde er $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{90}{25 \cdot 24}$

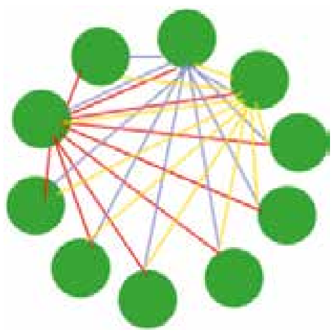
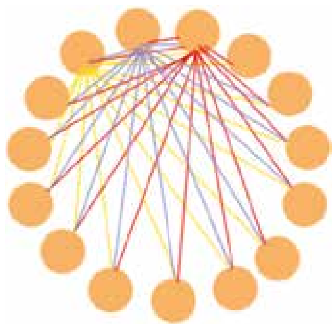
Sannsynligheten for å trekke to blå er $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{210}{25 \cdot 24}$

Sannsynligheten for to like er dermed $\frac{90}{25 \cdot 24} + \frac{210}{25 \cdot 24} = \frac{300}{25 \cdot 24} = \frac{1}{2}$

Sannsynligheten for en av hver farge, blå og rød eller rød og blå, er $\frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} + \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{300}{25 \cdot 24} = \frac{1}{2}$

Forklaring ved hjelp av kombinatorikk
For at sjansen for å trekke to like og to ulike brikker skal være lik, må antall muligheter for å trekke to like brikker være like stor som antall muligheter for to ulike brikker.

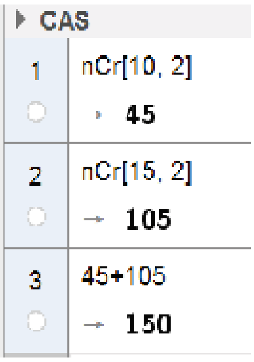
Antall muligheter for å trekke brikker med ulike farger: $10 \cdot 15 = 150$
Antall muligheter for å trekke brikker med lik farge:

	
Antall muligheter for å trekkke 2 brikker fra det første trekanttallet (10).	Antall muligheter for å trekke 2 brikker fra det andre trekanttallet (15).
Strekene viser noen av mulighetene. Fra hver brikke kan man tegne 9 linjer til alle de andre brikkene. Da har man telt hver forbindelse to ganger. Svaret må derfor deles med 2.	Strekene viser noen av mulighetene. Fra hver brikke kan man tegne 14 linjer til alle de andre brikkene. Da har man telt hver forbindelse to ganger. Svaret må derfor deles med 2.
$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$	$\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$
Antall kombinasjoner med 2 like brikker: $45 + 105 = 150$	

Utregning med CAS

Antall kombinasjoner for trekking av brikker med ulik farge er gitt ved $10 \cdot 15 = 150$

Antall kombinasjoner for trekking av brikker med lik farge er gitt med bruk av CAS.



- En generell løsning.

Generelle løsninger er spesielt viktig for elever på R1. Elevene trenger trolig hjelp av læreren her. Etter hvert som elevene utforsker større tall, som for eksempel 10 og 15 i aktivitet 3, blir det viktig å diskutere hva som er hensiktsmessig strategi. I matematikkfaget opplever man ofte at det er mange strategier som kan føre frem til en løsning. Imidlertid er det ikke alle strategier som er like hensiktsmessige og tidseffektive. Valg av strategi(er) vil også være avhengig av om man arbeider med begrepsforståelse eller med mer automatiserte oppgaver.

Når man i dette undervisningsopplegget har kommet så langt at elevene har en god begrepsforståelse for situasjonene, vil det være hensiktsmessig å bruke et digitalt hjelpemiddel for å regne ut antall kombinasjoner.

Bruk av digitale hjelpemidler er ikke ment som en teknisk tasting for å få svaret, men som et hjelpemiddel til raskere å finne svar på større utregninger som elevene har en bakgrunnsforståelse for. Under er det eksempler på bruk av CAS til å regne ut større trekanttall.

Den vanskeligste utfordringen vil nok være å bevise at det alltid blir rettferdig trekking med to påfølgende trekanttall.

Generell løsning som viser at «oppvaskproblemet» blir rettferdig hvis vi lar antallet røde og blå brikker være to påfølgende trekanttall:

Det vi gjør i CAS er følgende:
Vi definerer antall røde brikker som trekanttall nummer n:

$$a = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

Definer antall blå brikker som trekanttall nummer n+1:

$$b = 1 + 2 + 3 + \ldots. + n + (n+1) = a + n + 1$$

Totalt antall brikker er $a + b$

Sannsynligheten for å trekke to røde er $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$

Sannsynligheten for å trekke to blå er $\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1}$

Vi skriver summen av disse to uttrykkene inn i CAS, celle 3.

Sannsynligheten for å trekke en av hver farge, blå og rød eller rød og blå, er

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1}$$

Vi skriver denne summen inn i celle 4.

CAS

1	a:=(n+1)*n/2 $\rightarrow \; a := \frac{1}{2} n \, (n+1)$
2	b:=a+(n+1) $\rightarrow \; b := \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1$
3	a/(a+b)*(a-1)/(a+b-1)+b/(a+b)*(b-1)/(a+b-1) $\rightarrow \; \frac{1}{2}$
4	a/(a+b)*b/(a+b-1)+b/(a+b)*a/(a+b-1) $\rightarrow \; \frac{1}{2}$

Allerede etter rad 3 kan vi se at de to sannsynlighetene er like store. Rad 4 bekrefter dette.

UTVIDELSE/VARIASJON AV OPPGAVEN

Erfaringsmessig vil elevene trekke brikkene samtidig når man ber dem om å trekke 2 brikker. Det kan imidlertid komme spørsmål fra elevene om de skal legge den første brikken de trekker tilbake i skålen før den andre trekkes. Hvis spørsmålet skulle dukke opp, kan dette problemet tas som en ekstra utfordring. Det gir muligheter for en god faglig diskusjon rundt de matematiske begrepene «med tilbakelegging» og «uten tilbakelegging».

6 Sannsynlighet – Venndiagram

KOMPETANSEMÅL

Kompetansemålene er hentet fra 1T og 1P.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglege utfall, systematisere oppteljingar ved hjelp av krysstabellar, venndiagram og val-tre og bruke addisjonssetninga og produktsetninga (1T)

- berekne sannsyn ved å telje opp gunstige og moglege utfall, systematisere oppteljingar ved hjelp av krysstabellar, venndiagram og val-tre og bruke addisjonssetninga og produktsetninga i praktiske samanhengar (1P)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal bli kjent med ulike begreper innenfor sannsynlighet gjennom en praktisk tilnærming.
- Eleven skal få en forståelse for og kunne bruke addisjonssetningen i sannsynlighetsberegning.
- Eleven skal kunne systematisere en oppgave ved hjelp av venndiagram.
- Eleven skal bruke ulike representasjoner, skriftlig og muntlig, og oversette mellom dem.

ARBEIDSFORM

Dette temaet er delt inn i to opplegg, Venndiagram og Addisjonssetningen. Innenfor hvert opplegg er det flere aktiviteter. Det første opplegget er en intuitiv innføring i sannsynlighet. Opplegget viser elevene at man kan løse veldig mange oppgaver uten kjennskap til mange faguttrykk. I det andre opplegget er målet å få forståelse for addisjonssetningen.

I løpet av arbeidet introduseres det matematiske symbolspråket for mengdelære og sannsynlighetsregning. Elevene må få erfaring i å oversette fra en representasjon til en annen, f. eks. fra «Sannsynligheten for at det regner i morgen» til $P(R)$. Legg vekt på at elevene må lese sannsynlighetene med fulle setninger, dvs. at $P(R)$ alltid skal leses «Sannsynligheten for at det regner i morgen». Det er viktig at man gir seg tid til å lese slike oppgaver høyt.

Mens det første opplegget gjennomføres som veksling mellom pararbeid og klasseromsamtale, er det andre opplegget tilrettelagt for selvstudium. Likevel er det ønskelig at elevene jobber sammen i par, slik at de kan diskutere seg imellom. Dette opplegget blir dermed tenkt som naturlig differensiering i klasserommet. Etter arbeidet må det oppsummeres i fellesskap.

Det er viktig at læreren stimulerer til faglige samtaler. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og med matematiske symboler.

Som lærer bør man i størst mulig grad stimulere elevene til å være aktive i bruken av konkreter. I dette opplegget er det en fordel at læreren kan jobbe med digital tavle eller overheadprojektor.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

Opplegget gir en fin innfallsvinkel til en samtale om flere sentrale begreper. Vi anbefaler at det settes av 2 - 3 skoletimer

UTSTYR

Firkantete tellebrikker (overheadbrikker/fargete gjennomskinnelige), mengderinger eller hyssing, klistrelapper og oppgaveark.

INTRODUKSJON

Før man gjennomfører opplegget, må læreren reflektere over spørsmål som kan stilles for å stimulere elevene i arbeidet. Ikke gi elevene svar på spørsmål, men still deg undrende til problemstillingene sammen med elevene.

DIDAKTISK BEGRUNNELSE

Gjennom utforsking og en induktiv tilnærming til lærestoffet vil mange elever oppleve en ny innfallsvinkel til dette temaet. De bygger selv opp forståelse for temaet, og i samarbeid og samtale med andre elever forsterker de begrepsdannelsen. For mange elever er det læringsstøttende å jobbe med konkreter og å visualisere oppgaven de skal løse. Det er også viktig å forberede spørsmål som underbygger forståelse for temaet, slik at elevene selv finner svar på oppgaven. Oppgaven gir rom for å trekke inn flere begreper fra sannsynlighet, og det gir læreren gode muligheter for å tilrettelegge for den enkelte elevs læring.

OPPLEGG 1: VENNDIAGRAM

AKTIVITET 1

Denne oppgaven gjøres i fellesskap. Målet er å vise oppbyggingen av venndiagram.
I starten av timen må læreren skrive følgende oppgave på tavlen:

I en klasse er det 29 elever. Når vi undersøker idrettsinteressen finner vi at 18 elever i klassen liker fotball, og 13 elever liker ski. 5 av elevene liker ingen av disse to idrettene.

Mange elever vil si at læreren har gjort en feil, da 18 + 13 + 5 er mer enn 29. Dermed er klassesamtalen i gang, og man kan utfordre elevene til å systematisere opplysningene.

Eleven får firkantbrikker og jobber parvis med systematiseringen.

- Velg først ut 29 blå brikker som illustrerer antall elever i klassen. Deretter tar du 18 grønne brikker som illustrerer det «å like fotball», og 13 røde brikker som illustrerer det «å like ski»
- Legg ut de 29 blå elev-brikkene på bordet.
- Skyv 5 blå elev-brikker litt for seg selv. Dette illustrerer de elevene som ikke liker noen av de to idrettene vi jobber med.
- Plasser brikkene med egenskapene «å like fotball» og «å like ski» oppå de blå elevbrikkene.
- Alle egenskapene må få plass.

Med brikkene foran seg og på elektronisk tavle eller overhead, kan læreren stille følgende spørsmål til klassen. Læreren noterer svarene på tavlen.

Hvor mange av de 29 elevene

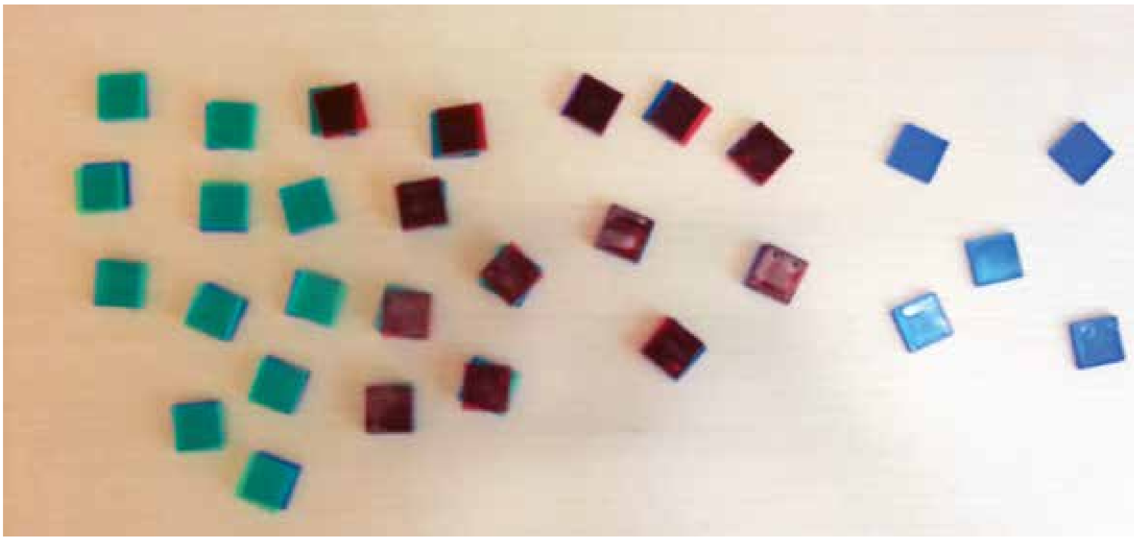
- Liker ikke noen av idrettene.
- Liker kun fotball.
- Liker kun ski.
- Liker både fotball og ski.
- Summer de fire svarene. Kan dere gi en begrunnelse for summen?

Kommentar til læreren

Elevene har nå funnet frem 29 brikker som illustrerer elevene i klassen. Av disse er det 5 elev-brikker som ikke skal ha noen egenskap, og de legges litt for seg selv. Det er da igjen 24 elev-brikker som skal gis egenskap. Av egenskaper har vi 18 som liker fotball og 13 som liker ski, altså har vi 31 egenskaper som skal plasseres totalt. Det betyr at det må være noen elever som liker både fotball og ski, og som derfor skal tillegges to egenskaper. Legg også merke til ordbruken i oppgaven. Det står at 18 elever liker fotball, det står ikke at 18 elever liker kun fotball. Dette er det fint om læreren påpeker overfor elevene, for da stimulerer læreren elevene til å diskutere hvordan de kan ha 31 egenskap-brikker, når det kun er 24 elev-brikker som skal ha egenskap.

I store klasser vil det ikke være mulig at alle elever velger de samme fargene som blir anbefalt i teksten. Da er det viktig at elevgruppene noterer hva den enkelte fargen står for.

Figuren nedenfor illustrerer hvordan elevene kan ha lagt brikkene. Her er røde og grønne brikker lagt oppå de blå, og det er 7 blå brikker med både en rød og en blå oppå.



AKTIVITET 2

Elevene jobber videre med brikkene. Oppgavene gis muntlig. Gi elevene nok tid til å utføre oppgaven.

Oppgave:

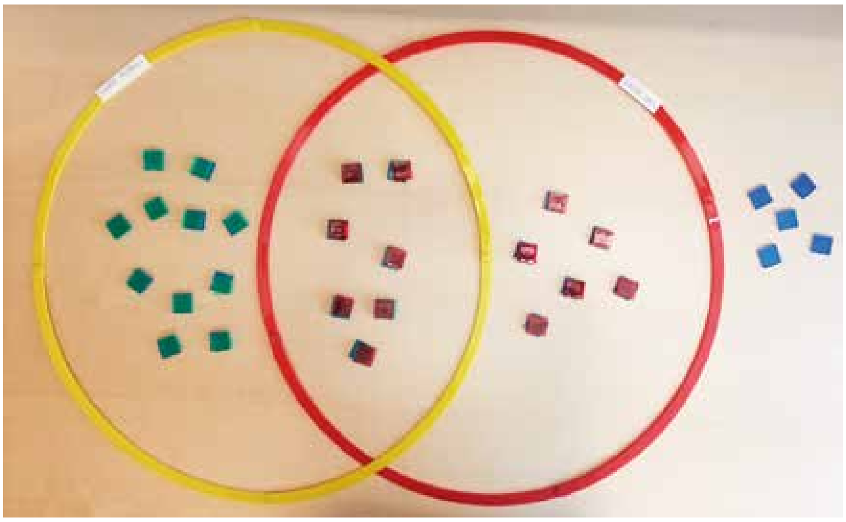
- Ta to mengderinger, ev. løkker av hyssing. På den ene ringen settes en klistrelapp med «liker fotball» og på den andre en klistrelapp med «liker ski».
- Plasser brikkene fra den forrige oppgaven slik at alle elevbrikkene får sin plass.
- Tenk over hvordan dere må legge ringene slik at dere kan plassere alle brikkene. Kravet er at det bare skal være brikker med én egenskap i hver mengde, dvs. i hvert «rom».
- Hvor mange brikker/elever er det i hvert rom?

Kommentar til læreren

Elevene skal nå bruke funnene fra forrige oppgave til å legge ringene. Elevene utfordres til å finne ut hvordan de skal plassere ringene slik at de får et «rom» som inneholder begge egenskapene, dvs. både fotball og ski. Poenget er at man får avgrenset mengdene slik at alle brikkene i hvert «rom»/mengde har samme egenskap.

Denne delen av oppgaven oppleves erfaringsmessig som vanskelig for elevene når de gjør den kun ved regning. Å ha oppgaven konkretisert vil kunne hjelpe for å forstå oppgaven. Elevene vil kunne erfare at når samme person liker to idretter, så må det dannes et overlappende område mellom de to mengderingene. Når elevene har lagt ferdig brikkene, vil det ligge 11 blå/grønne, 7 blå/grønne/røde, 6 blå/røde og 5 blå brikker på bordet. Læreren bør vie dette punktet stor oppmerksomhet, og han må legge til rette for en god faglig dialog.

Her kan man ta opp spørsmålene fra aktivitet 1. Nå skal det være lettere å finne svaret, da brikkene er sortert i enkelte mengder/«rom».



AKTIVITET 3

Oppgaveark 1: Venndiagram 1
Elevene jobber i par med hvert sitt oppgaveark.
Når elevene har forstått oppbygningen av venndiagrammmet, er det viktig at de får øve seg. Oppgavearket er bygd opp slik at de første oppgavene er enkle å gjøre med brikker, mens elevene må finne tallene uten konkreter i de siste oppgavene. Denne tenkingen viser veien til det som i neste opplegg blir forklart som «addisjonssetningen».

Kommentar til læreren
Når vi bruker venndiagram i matematikken, må man merke seg at det skal være en ytre ramme i tillegg til mengdesirklene. Også de 5 brikkene skal plasseres innenfor den ytre rammen. Hver brikke-stabel representerer et utfall, og mengden av alle brikkene utgjør utfallsrommet. Det er alltid viktig å skaffe seg oversikt over hele utfallsrommet når man arbeider med problemer i sannsynlighetsregning.

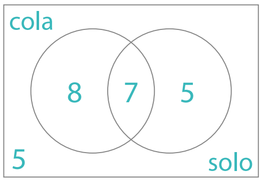
Her introduseres skrivemåten med symboler. Det er viktig at elevene lærer seg de formelle kravene. For å bruke skrivemåten med symboler i sannsynlighetsregning, bør man lage forkortelser for alle kategorier (hendinger). Krev at elevene skriver hva de enkelte forkortelsene står for i hver ny oppgave. I oppgave 1 kan elevene skrive cola og solo på de to mengdesirklene, men hvis de vil bruke forkortelser, skal de skrive:

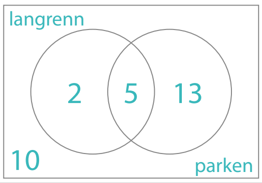
$C:$ (en tilfeldig valgt elev) liker cola

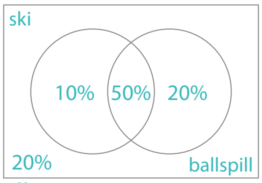
$S:$ (en tilfeldig valgt elev) liker solo

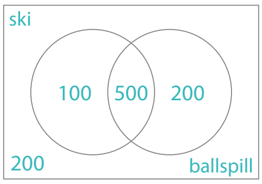
I tillegg til antall i hver mengde (hvert rom), skal det også skrives totalt antall på rammen rundt (hele utfallsrommet).

Fasit og merknader for oppgavene:

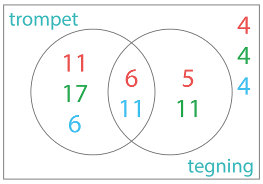
<table>
<tr>
<td>Oppgave 1:</td>
<td>

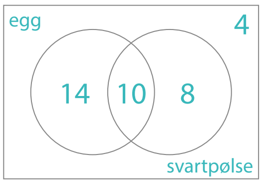
25</td>
<td>Denne oppgaven skal alle elevene få til. Tallene er såpass små at elevene kan prøve seg frem hvis de ikke ser svaret med en gang.</td>
</tr>
<tr>
<td>Oppgave 2:</td>
<td>

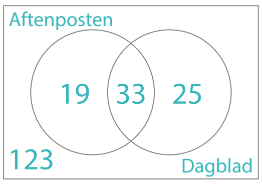
30</td>
<td>Samme type oppgave som oppgave 1.</td>
</tr>
<tr>
<td>Oppgave 3:</td>
<td>

100%
eller


1000</td>
<td>Her er det enklest å regne med prosenter. Oppgaven blir lett hvis eleven velger at en brikke tilsvarer 10 %.

Oppgaven kan også løses med tall.</td>
</tr>
<tr>
<td>Oppgave 4:</td>
<td>

32
21
26</td>
<td>I denne oppgaven mangler det opplysninger, og svarene avhenger av hvilke opplysninger man bruker.
Grønt: Største antall.
Blått: Minste antall.
Rødt: Når 6 velger både trompet og tegning.</td>
</tr>
<tr>
<td>Oppgave 5:</td>
<td>

36</td>
<td>Denne oppgaven viser hvordan man kan repetere brøkregning i andre temaområder enn tallregning.</td>
</tr>
<tr>
<td>Oppgave 6:</td>
<td>

200</td>
<td>Elevene har ikke nok brikker til å løse denne oppgaven. I og med at de nå har løst mange oppgaver, skal de klare å finne svaret uten konkreter.</td>
</tr>
</table>

AKTIVITET 4

Oppgaveark 2: Venndiagram 2
Vi går tilbake til utgangspunktet fra aktivitet 1:

I en klasse er det 29 elever. Når vi undersøker idrettsinteressen finner vi at 18 elever i klassen liker fotball, og 13 elever liker ski. 5 av elevene liker ingen av disse to idrettene.

For å få en god overgang til sannsynlighetsregning, innfører vi skrivemåten $P(...)$ for «sannsynligheten for…» og en del symboler.

Forkortelsene må forklares:

F : (en tilfeldig valgt elev) liker fotball

S : (en tilfeldig valgt elev) liker ski

$\cup$: union betyr «enten det ene eller det andre eller begge deler» (liker enten ski eller fotball eller begge deler). Ofte sier vi bare «eller»

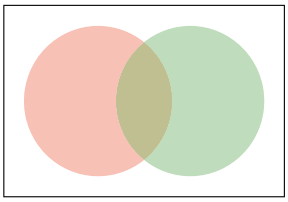
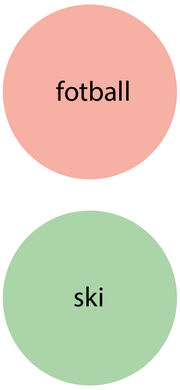
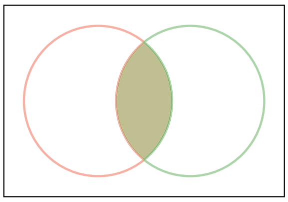
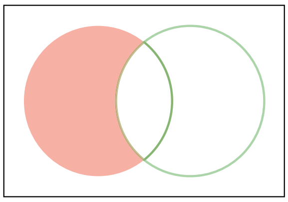
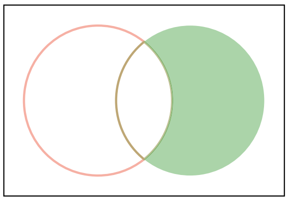
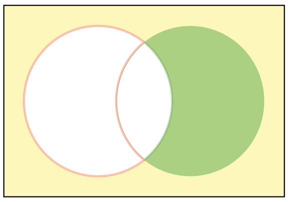
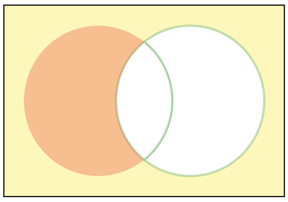
$\cap$: snitt betyr «og samtidig» eller «både – og» (liker både fotball og ski). Ofte sier vi bare «og»

$\overline{F}$: Strek over symbolet betyr «ikke» (liker ikke fotball)

$F \setminus S$: Skrå strek betyr «uten» eller «men ikke» (liker fotball, men ikke ski)

Oppgave 1

Fargelegg de ulike mengdene i Venndiagrammene nedenfor:

$F \cup S$		
$F \cap S$		
$F \setminus S$		
$S \setminus F$		
$\overline{F}$		
$\overline{S}$		

Nå bruker vi det vi har lært til å regne sannsynligheter.

Oppgave 2

Oversett til symbolspråk og regn ut følgende sannsynligheter:

- Sannsynligheten for at en elev liker fotball.
- Sannsynligheten for at en elev liker ski.
- Sannsynligheten for at en elev ikke liker noen av idrettene.
- Sannsynligheten for at en elev liker både fotball og ski.
- Sannsynligheten for at en elev liker ski eller fotball.
- Sannsynligheten for at en elev kun liker ski.

Kommentar til læreren

De fire nye symbolene kan illustreres med skisser der man fargelegger de aktuelle mengdene. La elevene foreslå hvilken mengde som skal fargelegges i hvert av tilfellene.

Bruk god tid på å oversette fra tekst til symboler, og sørg for at symbolene alltid oversettes til ord når de leses.

$P(F)$ leses som «sannsynligheten for at en (tilfeldig valgt) elev liker fotball». (*P* står for probability.)

Sannsynligheten for at en elev liker fotball = $P(F) = \frac{18}{29} \approx 0,621 = 62,1\%$

Sannsynligheten for at en elev liker ski = $P(S) = \frac{13}{29} \approx 0,448 = 44,8\%$

Sannsynligheten for at en elev ikke liker noen av idrettene = $P(\text{ingen}) = \frac{5}{29} \approx 0,172 = 17,2\%$

Sannsynligheten for at en elev liker både ski og fotball = $P(S \cap F) = \frac{7}{29} \approx 0,241 = 24,1\%$

Sannsynligheten for at en elev liker ski eller fotball = $P(S \cup F) = \frac{24}{29} \approx 0,828 = 82,8\%$

Sannsynligheten for at en elev liker bare ski = $P(S \setminus F) = \frac{6}{29} \approx 0,207 = 20,7\%$

Sannsynlighetene er forhold mellom to tall. Det er viktig å vite hva man skal dele på, dvs. hva som er «det hele» eller utfallsmengden. I alle disse eksemplene finner vi hvor stor del de enkelte delmengdene utgjør av antall elever i hele klassen.

Elevene har antakelig lært at sannsynligheter kan skrives både som brøk, desimaltall og prosent på ungdomsskolen. Dette er en fin anledning til å se sammenhengen mellom de tre ulike måtene å skrive samme tall på. Spesielt for elevene på 1T er det viktig at læreren understreker at brøksvaret er et eksakt svar, mens desimaltall og prosent er et mer eller mindre nøyaktig svar.

UTVIDELSE AV OPPGAVEN

Tre mengderinger gir flere valgmuligheter. For å jobbe med begrepene «union» og «snitt», kan det være en mulighet å skravere de ønskete områdene uten å bruke tall.
I en gruppe personer leser noen Dagbladet, noen Morgenbladet og noen Aftenposten.

- Marker området for alle personer som leser nøyaktig to aviser.
- Marker området for alle personer som leser Dagbladet og Morgenbladet.
- Marker området for alle personer som leser Aftenposten eller Dagbladet, men ikke Morgenbladet.
- Osv.

OPPLEGG 2: ADDISJONSSETNINGEN

I dette opplegget skal elevene få en forståelse for addisjonssetningen ved hjelp av venndiagram. Elevene jobber i par med oppgaveark.

Oppgave 1

En gruppe med 20 personer ble spurt om de har søsken. 12 svarte at de har brødre, 10 at de har søstre, mens 6 personer er enebarn.

- Legg informasjonen med brikker inn i et venndiagram. Sett navn på mengdene. Skriv antallene inn i venndiagrammet.

» Bruk forkortelsene
» B: har brødre
» S: har søstre

- Finn sannsynlighetene

$P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$
$P(S) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$
$P(B \cup S) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$
$P(B \cap S) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

Oppgave 2

Addisjonssetningen i sannsynlighet er gitt ved formelen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Skriv setningen slik at den passer til oppgave 1 ovenfor.
- Forklar det som står i formelen med ord.

Oppgave 3

I en skoleklasse på 28 elever ble det gjort en undersøkelse for å finne ut hvem som hadde vært i Tyskland og hvem som hadde vært i Frankrike. Det viste seg at 13 elever hadde vært i Tyskland, 15 hadde vært i Frankrike, mens 4 ikke hadde vært i noen av disse landene.

- Skriv opp forkortelsene du vil bruke.
- Tegn opplysningene inn i venndiagrammet.
- Bruk addisjonssetningen og finn sannsynligheten for at en elev i denne klassen har vært i Tyskland eller Frankrike.

Oppgave 4

En gruppe på 25 elever blir spurt om de går på ungdomsskolen eller på videregående skole. 15 elever svarer at de går på ungdomsskolen, 8 elever svarer at de går på videregående skole, og 2 elever svarer at de ikke går på skole.

- Tegn opplysningene inn i venndiagrammet.
- Skriv opp forkortelsene du vil bruke.
- Bruk addisjonssetningen og finn sannsynligheten for at en elev går på videregående skole eller på ungdomsskolen.
- Hvorfor er denne oppgaven mye enklere enn oppgave 2?

Kommentar til læreren
Prøv å få elevene til å se og forklare hvorfor formelen stemmer med venndiagrammet. Se spesielt på hvorfor man må trekke fra sannsynligheten for snittmengden for å finne sannsynligheten for unionen. Det er viktig å problematisere ordet «eller».

Pass på at elevene leser forkortelsene med fulle setninger.

OPPSUMMERING

Til slutt må man se tilbake og få et overblikk over hva man har arbeidet med og lært gjennom klassesamtale. Bruk elevenes arbeider med konkretene som innfallsvinkel til oppsummering. Ta utgangspunkt i venndiagrammet, og la elevene beskrive funnene de har gjort, og hvordan de har jobbet med oppgaven. Se spesielt på overgangen fra venndiagrammet til sannsynlighetsregning. Løft gjerne frem noe av det elevene har skrevet for å synliggjøre at det er viktig at de dokumenterer arbeidet sitt. Opplegget viser hvordan man kan jobbe med mer kompliserte oppgaver uten å bruke faguttrykkene i undersøkelsesfasen, men heller bygge opp disse etter hvert. Hovedfokuset er rettet mot forståelse for temaet, for deretter å formalisere det med faguttrykk og formler.

7 Derivasjon – Introduksjon

KOMPETANSEMÅL

Kompetansemålene er hentet fra 1T og S1

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- beregne nullpunkt, skjæringspunkt og gjennomsnittlig vekstfart, finne tilnærmede verdier for momentan vekstfart og gi noen praktiske tolkinger av disse aspektene (1T)
- gjøre greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie en derivasjonsregel for polynomfunksjoner og bruke denne regelen til å drøfte funksjoner (1T)

- finne gjennomsnittlig veksthastighet for en funksjon ved regning og finne tilnærmingsverdier for momentan vekst i praktiske anvendelser (S1)
- gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner (S1)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal få mange og varierte erfaringer med momentan vekstfart til ulike funksjoner.
- Eleven skal kunne finne den momentane vekstfarten til en funksjon i et punkt ved å finne stigningstallet til tangenten i punktet.
- Eleven skal lære at denne momentane vekstfarten eller stigningstallet i et punkt er det vi kaller den deriverte til funksjonen i punktet.
- Eleven skal komme frem til regler for derivasjon av polynomfunksjoner og lære disse.

ARBEIDSFORM

Arbeidet tar utgangspunkt i oppgaveark. Elevene skal jobbe i par, ev. i grupper på tre, men pass på at alle skriver og noterer. Til hjelp i utforskningsarbeidet bruker de GeoGebra (eller tilsvarende programvare). Oppmuntre elevene til å diskutere og samarbeide.

Det passer å la elevene arbeide på egen hånd en stund, men læreren oppsummerer i felles gruppe. Hele opplegget gjennomføres med en veksling mellom disse to arbeidsformene.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

Dette undervisningsopplegget egner seg som starten på arbeidet med derivasjon av funksjoner.

Opplegget tar ca. 2 timer.

UTSTYR

GeoGebra eller lignende graftegneprogram og oppgaveark.

INTRODUKSJON

Elevene må ha noen kunnskaper på plass før man bruker dette opplegget:

» De må vite hva vi mener med vekstfart, og at vekstfart uttrykkes ved stigningstallet til en rett linje.

» De må vite hva gjennomsnittlig vekstfart mellom to punkter er, og hvordan vi kan finne den.

» De må kjenne begrepet momentan vekstfart, vite hva en tangent til en graf i et punkt er, og vite at tangentens stigningstall er det samme som funksjonens eller grafens momentane vekstfart i punktet.

DIDAKTISKE REFLEKSJONER

Elevene kjenner til at vi kan beskrive stigningstallet til en graf i et punkt med stigningstallet til tangenten i punktet. I dette opplegget får de mange erfaringer der de bruker denne kunnskapen. Det er viktig å bruke god tid på å la elevene få forståelse av begrepet derivasjon. Merk at vi ikke innfører selve ordet derivasjon før elevene har arbeidet med opplegget en god stund.

Sørg for at elevene får oppleve at de er aktive, og at de oppdager systemene selv. Mens de arbeider, har læreren mulighet til å gå rundt og observere og snakke med dem. Prøv å oppmuntre elevene, og sett dem på sporet uten å gi dem løsningene. I alle tabellene er det et par tomme rader. Hvis elevene har funnet noe som ser ut som et system, kan de velge noen flere x-verdier, skrive inn hva de tror tangentens stigningstall blir for den aktuelle x-verdien, og så kontrollere ved å tegne. Hvis systemet elevene har funnet er feil, kan samme metode avsløre at noe ikke stemmer, og at de må studere problemet på nytt. Læreren må utfordre dem til å prøve seg frem.

I dette opplegget brukes begrepene *momentan vekstfart i punktet og stigningstallet til tangenten i punktet* hyppig. Til slutt bruker vi også begrepet *den deriverte i punktet*. Bruk disse begrepene hyppig også i samtalene med elevene. Målet er at de til slutt vet at derivasjon faktisk er å finne momentanvekstfart til en funksjon i et punkt, at vekstfarten representeres ved stigningstallet til tangenten i punktet, og at det er denne vekstfarten vi kaller den deriverte til funksjonen i punktet. De skal ikke assosiere begrepet derivasjon bare med derivasjonsreglene og regneteknikkene de etter hvert lærer. Gjenta ofte alle måtene å uttrykke den deriverte på i det videre arbeidet.

Det er fornuftig å ta noen stopp underveis der man snakker sammen i fellesskap om det man arbeider med, og det man har kommet frem til. Hvis læreren ønsker å få presentert noen av elevens løsninger, er det lurt å avtale dette med elevene på forhånd.

AKTIVITET

Kommentar til læreren

Oppgave 1 – 3

1. Tegn grafen til $a(x) = x^2$ i GeoGebra
    - Marker punkter på grafen, se tabellen nedenfor: Punktet i $x = 1$ finner du ved å skrive (1,a(1)).
    - Tegn tangenter i punktene, og noter opplysningene i et skjema:
      Kan du gjette hva stigningstallet vil bli for tangenten i andre x-verdier, $x = -2$, $x = 3$, osv. ?
      Skriv det du gjetter i tabellen, og kontroller etterpå ved å tegne.

Undersøk følgende funksjoner på samme måte. Bruk et nytt vindu i GeoGebra for hver funksjon.

2. $b(x) = -x^2$
3. $c(x) = x^2 + 3$

Start med undersøkelsesoppgavene på arket. Elevene skal finne tangenter og deres stigningstall i noen punkter til funksjonene $a(x) = x^2$, $b(x) = -x^2$ og $c(x) = x^2 + 3$. Forklar at de skal skrive en forklaring, enten med ord eller med symboler, i kolonnen for «Mønsteret er ..».

Det er viktig at elevene ikke lager et punkt som de trekker langs grafen, men at de avsetter alle oppgitte punkt etter mønsteret (1,a(1)).

La elevene arbeide med disse funksjonene på egenhånd. Etterpå bør man oppsummere i fellesskap. Spør elevene hvilke mønster de fant i de tre oppgavene. Har noen skrevet det med ord? Har noen skrevet det med symboler?

Skriv forslagene opp på tavlen, og se at samme løsning kan formuleres på ulike måter. I oppgave 1 kan det f.eks. komme løsninger som «Jeg dobler x’en» eller «2x». Dette er to representasjoner av samme uttrykk. I fortsettelsen kan elevene prøve å bruke begge representasjonene, men etter hvert vil nok de fleste finne det enklest å skrive systemet som et algebraisk uttrykk.

Få elevene til å reflektere over hvorfor tangentene $a(x) = x^2$ og $c(x) = x^2 + 3$ får samme stigningstall i samme x-verdi. Tegn grafene i samme grafikkfelt. Fins det kanskje flere funksjoner som følger samme mønster?

Oppgave 4 - 5

4. $d(x) = 2x^2$
5. $e(x) = 3x^2$

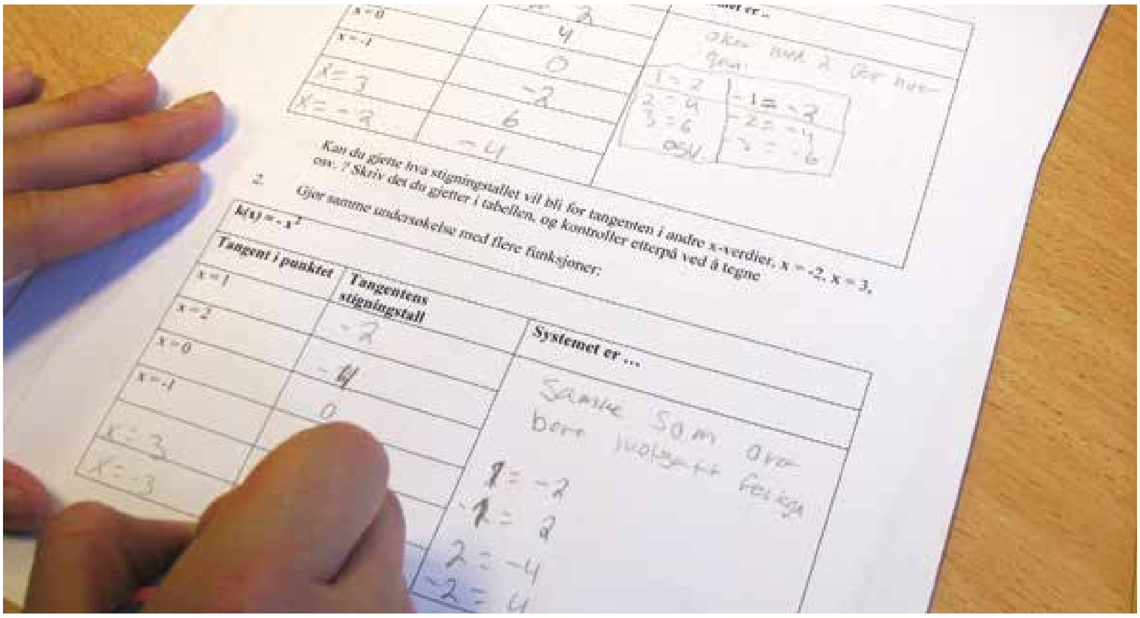
Her skal elevene studere funksjonene $d(x) = 2x^2$ og $e(x) = 3x^2$. Aktuelle spørsmål er: Hva er mønsteret? Hvordan kan det uttrykkes med ord og algebraisk? Hva er forskjellen på funksjonene? Hva er forskjellen på grafene? Hva er forskjellen på stigningstallene? Er det logisk ut fra grafene? Hva hvis funksjonsuttrykket hadde andre koeffisienter enn 2 eller 3? Ser elevene en regel her?

Oppgave 6 - 9

6. $f(x) = x^2 + x$
7. $g(x) = x^2 + 2x$
8. $h(x) = 2x^2 + x$
9. $i(x) = 2x^2 + 3x$

Her skal elevene studere funksjoner med to ledd. I disse oppgavene brukes ekstra kolonner for å sammenligne med andregradsleddet i funksjonene. Bruk litt tid på å se på grafene til f.eks. $f(x) = x^2 + x$ og $a(x) = x^2$. Hva er forskjellen på grafene? Og hva er likt? Hvorfor må stigningstallet til tangenter ved samme x-verdi være forskjellig?

Hva må regelen være når vi har funksjoner med flere ledd?



Oppgave 10

Oppsummering

- Vi har kommet frem til følgende regler for derivasjon av polynomer:

Før elevene gjør denne oppgaven, er det svært viktig med en samtale i hele gruppa. Her skal læreren introdusere begrepet *derivasjon*. Når vi *deriverer* en funksjon, får vi en ny funksjon som gir oss momentan vekstfart eller tangentens stigningstall i et hvilket som helst punkt på grafen. Skrivemåten med den lille «apostrofen» må også introduseres. Alle mønstrene som allerede er skrevet i oppgave 1 – 9, skrives nå opp med standard skrivemåte.

Til slutt må elevene skrive ned hva derivasjon betyr.

Oppgave 11-13

11. $j(x) = x^3$
12. $k(x) = x^4$
13. Generell regel

Disse tre oppgavene handler om å komme frem til regelen for derivasjon av x-potenser. Det virker motiverende for elevene å finne mønsteret på egen hånd.

Etter at regelen $p(x) = x^n$ gir $p'(x) = n\,x^{n-1}$ er etablert, er det nyttig å se spesielt på tilfellene der eksponenten er 1 og 0, jf. oppgavene på kopieringsoriginalene.

OPPSUMMERING

Nå kan elevene derivere alle polynomfunksjoner. Gå tilbake til læringsmålene for dette opplegget, og snakk med elevene om dem. Har de lært det som var planen? Har de sett sammenhengen mellom momentan vekstfart til en funksjon i et punkt, stigningstallet til tangenten i punktet og den deriverte i punktet? Vi ønsker at flest mulig elever har utviklet en god forståelse av hva derivasjon virkelig er. Da vil det videre arbeidet med derivasjon være forankret i en god begrepsforståelse.

Når elevene senere øver på oppgaver der de skal derivere ulike funksjoner, bør de oppmuntres til å tegne grafene til noen av funksjonene, bruke metodene fra dette opplegget og se at reglene stemmer: Uttrykkene for den deriverte til en funksjon er en «formel» for å regne ut den momentane vekstfarten i et hvilket som helst punkt i funksjonen/ på grafen.

8 Derivasjon – Sammenhenger

KOMPETANSEMÅL

Læreplanmålene er hentet fra R1, R2, S1 og S2

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner (R1)
- tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen (R1)

- derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner (R2)
- formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og fremgangsmåte (R2)

- gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner (S1)

- drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i praktiske sammenhenger ved å bruke førstederiverte og andrederiverte (S2)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal bli kjent med egenskaper ved grafen til en funksjon.
- Eleven skal bli kjent med hva den deriverte til en funksjon uttrykker.
- Eleven skal bruke begrepene nullpunkt, toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt.
- Eleven skal se sammenhengen, og drøfte forhold mellom grafen til en funksjon, den deriverte og den andrederiverte.
- Eleven skal kunne bruke digitale hjelpemidler i forståelsen av dette temaet.

ARBEIDSFORM

Elevene jobber med sammenhengen mellom en funksjon og den deriverte gjennom en induktiv arbeidsform med utforsking. Utforskingsarbeidet gjøres med digitale hjelpemidler (GeoGebra), så elevene må ha hver sin PC. Men vi anbefaler at to og to elever samarbeider. Det stimulerer til en matematisk samtale, og læreren må oppmuntre til denne samtalen. Elevene skriver ned løsninger som de finner, det er viktig at de bruker både ord og matematiske symboler. Underveis i elevenes arbeid bør læreren stille spørsmål som får elevene til å resonnere over matematiske sammenhenger. Det kan være «Hvorfor tror du det er slik?», «Hva forventer du?», «Hva mener du om det?». Til slutt i timen bør læreren bruker elevenes arbeid som utgangspunkt for en felles samtale og oppsummering.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

4 skoletimer. Elevene må kjenne til begrepet *den deriverte* fra før.

UTSTYR
PC med GeoGebra (eller liknende programvare) og oppgaveark.

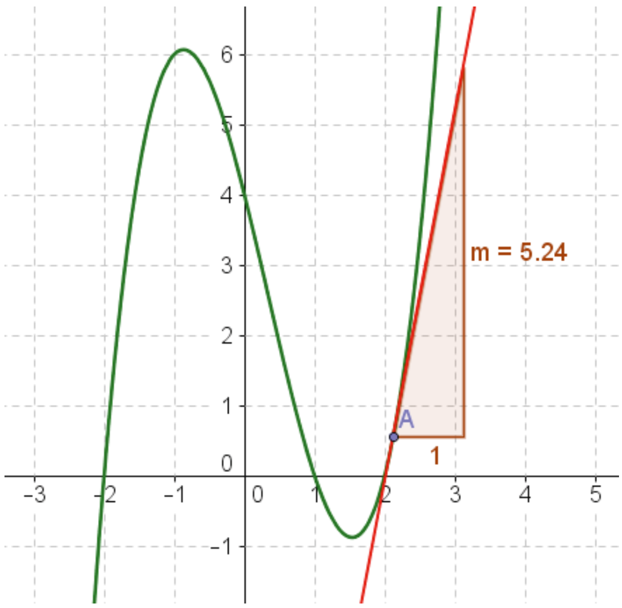
INTRODUKSJON
Dette undervisningsopplegget inneholder relativt selvinstruerende arbeidsoppgaver. Det forutsettes at de har kjennskap til dataprogrammet GeoGebra. Hvis annen programvare benyttes, må læreren eventuelt gjøre nødvendige tilpasninger. Funksjonsuttrykket de bruker er $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Innled økten med å presentere planen for timene og læringsmålene. Forklar arbeidsformen for elevene og presiser at de selv skal være aktive i utforskingen av temaet.

DIDAKTISKE REFLEKSJONER
Gjennom en utforskende og induktiv tilnærming til lærestoffet vil mange elever oppleve en ny innfallsvinkel. En slik tilnærming bidrar til faglig aktive elever. Elevene bygger selv opp forståelse for temaet, og i samarbeid og samtale med en samarbeidspartner forsterker de begrepsdannelsen. Dette vil også gjøre at de opplever et eieforhold til lærestoffet. Prøv å lede elevene gjennom undersøkelsesarbeidet. Det er imidlertid avgjørende at læreren er aktivt lyttende i denne prosessen, og at man ved behov kan bidra med spørsmål som underbygger forståelse for temaet. Det er viktig at elevene selv reflekterer over de matematiske funnene og sammenhengene som de finner. Ikke gi elevene svar på oppgavene, men bygg opp under undringen og resonneringen med spørsmål som: «Hvordan ser grafen til *f(x)* ut når stigningstallet til tangentene er positiv?» «Hvor i koordinatsystemet er det punktene skal plasseres?» «Hvordan ser grafen til den deriverte funksjonen ut der funksjonen har et bunnpunkt eller et toppunkt?»

GJENNOMFØRING

I denne oppgaven bruker vi dataprogrammet GeoGebra til å utforske egenskapene ved grafen til en funksjon. Vi skal også utforske den deriverte til funksjonen.



- Åpne GeoGebra.
- Tegn funksjonen $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
- Sett et punkt *A* på grafen.
- Tegn en tangent i dette punktet.
- Marker stigningen til tangenten og kall stigningstallet for *m*.

Du vil få et grafikkfelt i GeoGebra som ser omtrent ut som figur 1. I det videre arbeidet lar du A bevege seg langs grafen.

Kommentar til læreren

Oppgave 1

- Studer grafen og tegn en fortegnslinje som viser fortegnet til $f(x)$ for alle verdier av x.

Ved bruk av GeoGebra får elevene mulighet til å arbeide praktisk med oppgaven. Elevene undersøker funksjonen ved å flytte på punktet *A* og finne ulike funksjonsverdier.
I denne oppgaven får elevene øving i å veksle mellom to representasjoner, grafen til $f(x)$ og fortegnslinjen til $f(x)$. Ved å bruke grafen blir nullpunktene tydeliggjort visuelt.

Oppgave 2

- Flytt punktet *A*, og dermed tangenten, langs grafen til *f(x)*. Du skal nå tegne en fortegnslinje for stigningen *m* til tangenten.

Elevene skal nå utforske stigningen, *m*, til tangenter. Ved å flytte punktet og tangenten, får de registrert mange verdier av stigningstallene, og de må merke seg *x*-verdiene i hvert punkt.

Oppgave 3

- Sammenlign fortegnslinjen for *m*, med grafen til *f(x)*.
» Hva kan du si om grafen når fortegnslinjen til *m* er positiv?
» Hva kan du si om grafen når fortegnslinjen til *m* er negativ?
» Hva kan du si om grafen når *m* er null?

- Diskuter funnene dine med din samarbeidspartner og skriv ned det dere kommer fram til.

Når elevene har jobbet interaktivt med oppgave 1 og 2, er det viktig at de diskuterer funnene med samarbeidspartneren. Elevene har ofte ulike innfallsvinkler til hvordan de jobber med en oppgave. Det er viktig at dette kommer frem i diskusjonen, og at elevene engasjerer seg i hverandres resonneringer. Læreren kan bruke spørsmål som: Hvordan gjorde du dette? Hvordan tenkte du for å finne ut av det? På hvilken annen måte kunne du finne ut av det?

Oppgave 4

- Fortsett å flytte på punktet *A*, slik at du finner stigningstallet til tangenten i punktene som er listet opp i tabellen.
- Når du har funnet alle verdiene, bruker du disse stigningstallene som y-verdier. Du får da punkter som viser stigningstallene til tangenten for funksjonen *f(x)*. Tegn punktene inn i koordinatsystemet.
- Ut fra disse punktene skisserer du et forslag til hvordan grafen blir seende ut. Kall grafen for *g(x)*.

Dette er en meget viktig del av undervisningsopplegget. Her skal elevene selv skissere en ny graf basert på funn fra grafen. Elevene skal bruke stigningstallet *m* som y-verdi, og de skal lage en verditabell som grunnlag for å skissere den nye grafen. Erfaringsmessig er dette en oppgave som elevene trenger å arbeide grundig med. Overgangene her er essensielle i begrepsforståelsen av den deriverte til en funksjon og de bør trekkes frem i drøftingen av temaet. Av den grunn er det viktig at læreren påser at elevene jobber nøyaktig med skissen. Som lærer må du bruke de gode spørsmålene for å drive elevene videre fremover i begrepsforståelsen.

Oppgave 5

- Ta nå utgangspunkt i grafen *g(x)* som du har skissert.
- » For hvilke x-verdier er *g(x)* positiv?
- » For hvilke x-verdier er *g(x)* negativ?
- » Hvilken sammenheng finner du mellom funksjonsverdiene til *g(x)*, og når funksjonen *f(x)* stiger og synker?

Oppgave 6

- Hvordan kan du bruke *g(x)* til å finne ut hvor grafen til *f(x)* har toppunkt og bunnpunkt? Forklar hva du tenker og skriv ned *x*-verdien til punktene:

I oppgave 5 og 6 skal elevene arbeide med å se sammenhengen mellom grafen *g(x)* som de har skissert og funksjonen *f(x)* ved å studere grafene.

Oppgave 7

Du skal nå utforske temaet videre med programmet GeoGebra og med bruk av CAS. Lagre derfor det du har gjort i oppgavene frem til nå, før du åpner en helt ny fil i GeoGebra.

- La grafikkfelt og CAS være synlige.
- Skriv $f(x):=x^3-x^2-4x+4$ inn i CAS og trykk enter. Klikk på sirkelen til venstre for uttrykket. Grafen til $f(x)$ blir nå synlig i grafikkfeltet.
- Finn så den deriverte til funksjonsuttrykket ved å skrive inn i CAS $f'(x)$. Trykk enter og klikk på sirkelen slik at grafen blir synlig.
- Sammenlikn grafen til $f'(x)$ og grafen til $g(x)$ i oppgave 4. Beskriv det du finner ut.

Elevene bruker nå grafikkfeltet og CAS parallelt i GeoGebra. Det er nyttig å kunne observere CAS og grafene samtidig. Elevene har nytte av å se temaet fremstilt i ulike representasjoner.

Elevene ser grafen til $f(x)$ og grafen til $f'(x)$ i samme koordinatsystem. De vil oppdage at grafen til $f'(x)$ er den samme som grafen $g(x)$.

Be elevene diskutere funnene med samarbeidspartneren sin. I tillegg bør læreren vektlegge denne oppgaven i en felles oppsummering.

Oppgave 8

Du skal nå undersøke hva som skjer når du deriverer den deriverte. Du skriver inn følgende i CAS: *f ″(x)* og trykker enter. Klikk på sirkelen slik at grafen til *f″(x)* blir synlig.

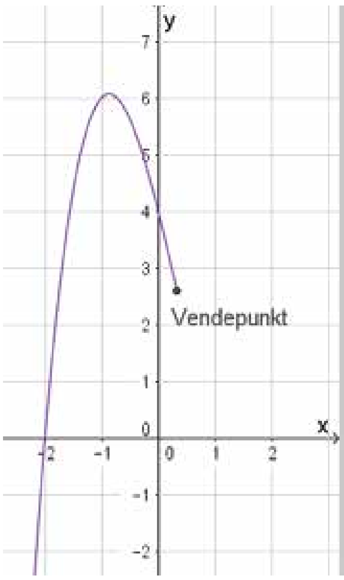
- Tegn fortegnslinjen til *f ″ (x)*.
- For hvilken x-verdi skifter *f ″ (x)* fortegn?
- Finn det stedet på grafen til *f(x)* som har denne x-verdien og tegn et punkt der. Dette punktet kalles vendepunktet på grafen *f(x)*. Skriv ned koordinatene for vendepunktet.

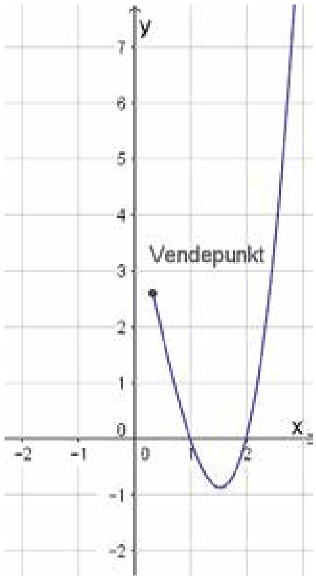
Når elevene har sett sammenhengen mellom funksjonen og den deriverte, kan de arbeide videre. Elevene skal nå undersøke den andrederiverte på samme måte som tidligere med grafikkfelt og CAS.

Oppgave 9

- Under er det to koordinatsystemer som du skal lage skisser i.

Slik vil løsningene se ut:





- Det punktet der den ene grafen slutter og den neste begynner, er punktet der *f″(x)* = 0. Forklar hvorfor dette punktet kalles et vendepunkt.

Når elevene skal presenteres for begrepet *hul side*, er det bevisst valgt å legge grafen til *f(x)* i to koordinatsystemer. Erfaringsmessig opplever elevene det som bedre å få forståelse for «den hule side» når funksjonen splittes i vendepunktet. Det er imidlertid viktig at læreren påpeker sammenhengen med grafen til *f(x)*.

Oppgave 10

- Ved hjelp av utforsking av egenskapene til grafer i dataprogrammet GeoGebra og egne skisser på papir, har du nå sett sammenhenger mellom grafen til en funksjon, den deriverte og den andrederiverte.
- » Til slutt skal du forklare sammenhengen mellom en funksjon, den deriverte og den andrederiverte <u>med egne ord</u>. Gå gjerne tilbake i det arbeidet du har gjort, når du skal beskrive dette.
- » I forklaringen din skal du blant annet bruke ord som ***stigningstall, tangent, bunnpunkt, toppunkt, vendepunkt, nullpunkt, positiv og negativ***.

Denne oppgaven oppsummerer elevenes forståelse for en funksjon, den deriverte og den andrederiverte. Elevene skal ikke bare vise til grafbilder, men beskrive dette med ord og setninger. De viser om de har en dypere forståelse for temaet, og om de klarer å formidle dette skriftlig.

Læreren må oppsummere arbeidet med elevene. En fin innfallsvinkel er å be elevene forklare sammenhengen til en annen elev, men denne gangen ikke til samarbeidspartneren.

Til slutt må læreren oppsummere sammen med klassen. Sørg for at dere kommer frem til en felles forståelse av sammenhengen mellom de deriverte og funksjonen.

UTVIDELSE/VARIASJON AV OPPGAVEN

Undervisningsopplegget kan brukes på et bredt spekter av elever. Det er også lite som skal til for å tilpasse oppgavene for de elevene som trenger større utfordringer.

Eksempler:

Gitt den deriverte funksjonen $h'(x) = 3x^2 - 2x - 4$.
- Skisser grafen til $h'(x)$.
- Hvordan vil funksjonen $h(x)$ se ut? Skisser den i samme koordinatsystem som $h'(x)$.

Eller
$k(x)$ er en tredjegradsfunksjon. Du får vite at $k''(x) = -2x+3$.
- Skisser grafen til $k(x)$.

Elevene kan også utfordres til å lage oppgaver til hverandre.

I dette undervisningsopplegget arbeider elevene induktivt. Gjennom en slik tilnærming vil elevene i større grad tilegne seg kunnskap på en slik måte at de kan hente den frem igjen ved en senere anledning. Gjennom forståelse gis matematikken innhold, i stedet for at det bare blir regler og strukturer som må følges for å finne riktige svar.

9 Derivasjon – Med spillkort

KOMPETANSEMÅL

Kompetansemålene er hentet fra 1T, R1, R2, S1 og S2.

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere greie for funksjonsomgrepet og kunne omsetje mellom ulike representasjonar av funksjonar (1T)
- berekne nullpunkt, ekstremalpunkt, skjeringspunkt og gjennomsnittleg vekstfart, finne tilnærma verdiar for momentan vekstfart og gje nokre praktiske tolkingar av desse aspekta (1T)

- bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i modeller av praktiske situasjoner (R1)
- tegne grafer til funksjoner med og uten digitale hjelpemidler, og tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen (R1)

- derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner (R2)

- gjøre rede for definisjonen av den deriverte, regne ut den deriverte til polynomfunksjoner og bruke den til å drøfte polynomfunksjoner (S1)

- drøfte forløpet til funksjoner og tolke de deriverte i praktiske sammenhenger ved å bruke førstederiverte og andrederiverte (S2)
- tolke grunnleggende egenskaper til en funksjon ved hjelp av grafen (S2)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal utvikle en god forståelse for egenskapene til en funksjon, den deriverte til funksjonen og den andrederiverte til funksjonen.
- Eleven skal kunne systematisere spillkortene og skriftlig gjøre sine funn.

ARBEIDSFORM

Undervisningsopplegget kan brukes med spillkort fra alle tre kategoriene (funksjonen, den deriverte og den andrederiverte), og da passer det for R1 og R2.

Brukes spillkort fra kun to kategorier (funksjonen og den deriverte til funksjonen), vil det passe for 1T, S1 og S2.

Uavhengig av om alle spillkortene eller kun deler av spillkortene brukes, bør elevene gjennomføre aktiviteten individuelt først. Læreren gir kun en kort presentasjon om bruk av spillkort og spillbrett, da spillbrettet med tilhørende oppgave er relativt selvinstruerende for elevene.

Når elevene arbeider individuelt, er det viktig at læreren aktivt snakker med elevene om hvordan de tenker for å finne de tre (to) kortene som hører sammen. Læreren må oppmuntre til å skrive ned funnene, og man må legge til rette for bruk av GeoGebra (eller tilsvarende programvare).

Det er ikke sikkert at alle elever finner alle triplettene (parene) like fort. Men etter at alle har funnet noen tripletter, kan man oppsummere i klassen. Elevene får da en bekreftelse på om de har forstått, eller en korreksjon av misforståelser.

Elevene kan også arbeide sammen i par og i fellesskap formulere sammenhenger de finner mellom funksjonsuttrykk, den deriverte og den andrederiverte.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

Elevene må være kjent med begrepene funksjon, den deriverte og også den andrederiverte i R1, R2 og S2.

Opplegget vil ta ca. 2 skoletimer.

UTSTYR

Kopieringsoriginaler med oppgaver og spillbrett til elevene. Kopieringsoriginaler med kort som må klippes ut. PC med GeoGebra (eller liknende programvare).

Læreren må kopiere opp spillkort og spillbrett. Et tips kan være å laminere spillkortene slik at de kan brukes om igjen. La funksjonsuttrykket stå på baksiden av tredjegradsfunksjonen. Et annet praktisk tips til læreren er å kopiere opp kortstokkene i ulike farger. Hvis hver elev har sin farge på kortstokken, vil det forenkle sorteringen når timen er slutt.

Arkene med spillbrett bør kopieres på papir slik at elevene kan skrive på dem hver gang de finner tre kort som hører sammen. Det er nødvendig for oppsummeringen.

AKTIVITET 1

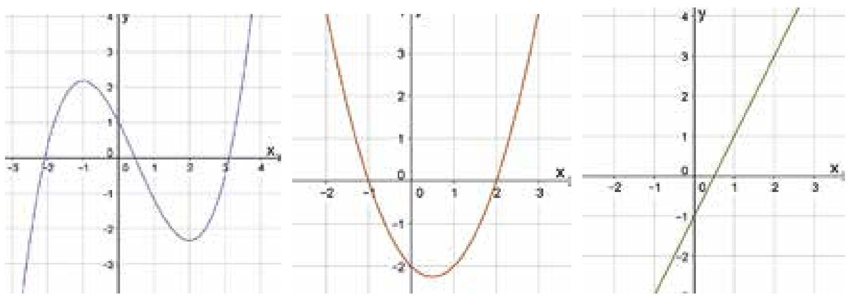
- Legg alle de 18 kortene foran deg slik at du kan se grafene:
  - » 6 kort viser en graf av tredje grad, et funksjonsuttrykk.
  - » 6 kort viser en graf av andre grad, den førstederiverte.
  - » 6 kort viser en graf av første grad, den andrederiverte.

- Et kort fra hver kategori hører sammen. De viser sammenhengen mellom en tredjegradsfunksjon, den førstederiverte og den andrederiverte.
- På spillbrettet er det plass til tre kort, ett fra hver kategori. Du skal nå finne tre kort som hører sammen og plassere dem på spillbrettet.
- Finn *x*-verdier til nullpunkter, topp-/bunnpunkter og vendepunkt på grafene. Skriv *x*-verdiene du finner i de tomme rutene på spillbrettet.
- Legg vekk de tre kortene du har jobbet med. Finn tre nye kort som hører sammen og legg dem på spillbrettet. Gjenta punkt 1-2. Skriv inn *x*-verdiene i et nytt skjema, slik at du får tatt vare på alle notatene dine.
- Forklar hvilke sammenhenger du finner mellom funksjonsuttrykket, den førstederiverte og den andrederiverte når du ser på *x*-verdiene i tabellen.

Kommentar til læreren

Under er et eksempel på hvordan en elev har lagt tre spillkort og fylt ut tabellen:

i (x) *i ʹ (x)* *i ʺ(x)*



x-verdi til nullpunkt	**x= -2,1 og x=0,5 og x=3,1**	**x= -1 og x= 2**	**x= 0,5**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= -1 og x= 2**	**x= 0,5**	
x-verdi til vendepunkt	**x= 0,5**		

Sammenhengene er markert med grønn og lilla farge for læreren:
Grønt viser at *x*-verdien til nullpunktet for *i '(x)* er lik *x*-verdien til topp-/bunnpunktet for *i(x)*.
Lilla viser at *x*-verdien til vendepunktet på *i(x)* er lik *x*-verdien til topp-/bunnpunkt for *i '(x)* og *x*-verdien til nullpunktet for *i ''(x)*.

Oppsummer ved å la elevene presentere sine løsninger. Sørg for at alle har sett sammenhengene som er markert ovenfor.

Løsningsforslag for alle spillkortene

	$j(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2$	$j'(x)$	$j''(x)$
x-verdi til nullpunkt	**x= 1,84**	**x= -0,33 og x=1**	**x= 0,33**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= -0,33 og x= 1**	**x= 0,33**	
x-verdi til vendepunkt	**x= 0,33**		

	$i(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$	$i'(x)$	$i''(x)$
x-verdi til nullpunkt	**x= -2,1 og x=0,5 og x=3,1**	**x= -1 og x= 2**	**x= 0,5**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= -1 og x= 2**	**x= 0,5**	
x-verdi til vendepunkt	**x= 0,5**		

	$h(x) = -0,07x^3 + 0,54x^2 + 0,2$	$h'(x)$	$h''(x)$
x-verdi til nullpunkt	**x= 7,76**	**x= 0 og x= 5,14**	**x= 2,57**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= 0 og x= 5,14**	**x= 2,57**	
x-verdi til vendepunkt	**x= 2,57**		

	$g(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 1$	$g'(x)$	$g''(x)$
x-verdi til nullpunkt	**x= -0,2 og x=1,29 og x=3,91**	**x= 0,46 og x= 2,87**	**x=1,67**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= 0,46 og x= 2,87**	**x= 1,67**	
x-verdi til vendepunkt	**x= 1,67**		

	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 2$	$f'(x)$	$f''(x)$
x-verdi til nullpunkt	**x= -3,74 og x=0,4 og x=1,35**	**x= - 2,23og x=0,9**	**x= -0,67**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= -2,23 og x=0,9**	**x= -0,67**	
x-verdi til vendepunkt	**x= -0,67**		

	$k(x) = -1,5x^3 + 3,5x^2 - x$	$k'(x)$	$k''(x)$
x-verdi til nullpunkt	**x= 0 og x=0,33 og x=2**	**x= 0,16 og x= 1,4**	**x= 0,78**
x-verdi til topp-/bunnpunkt	**x= 0,16 og x= 1,4**	**x= 0,78**	
x-verdi til vendepunkt	**x= 0,78**		

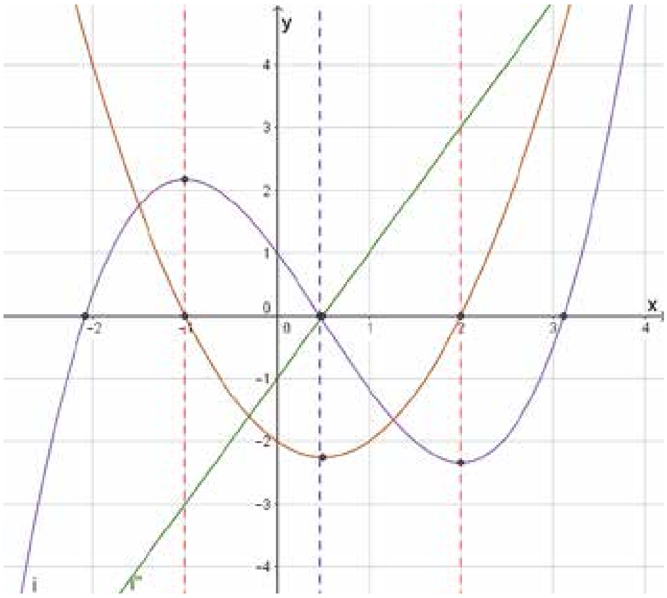
AKTIVITET 2

- Åpne GeoGebra og skriv inn en av funksjonene. I samme koordinatsystem tegner du den første- og andrederiverte av funksjonen. Marker nullpunktene og topp-, bunn- og vendepunktene. Undersøk hvordan det stemmer med verdiene i tabellen. Tegn loddrette linjer gjennom nullpunktene til den førstederiverte og den andrederiverte.
- Gjør det samme med de andre funksjonene. Lagre funksjonene i hver sin GeoGebrafil.

Kommentar til læreren

Gjennom å bruke GeoGebra (eller annet digitalt verktøy) vil elevene se de eksakte tallverdiene som hører sammen. Elevene skal sammenligne verdiene på GeoGebra med verdiene de fikk under sorteringen. Sørg for at elevene ser hvilke punkter på de tre grafene som ligger på samme loddrette linje, dvs. har samme *x*-verdi.

Etter litt jobbing med spillkortene vil elevene få mange erfaringer med å se sammenhengene mellom et funksjonsuttrykk, den førstederiverte og den andrederiverte. Det kan da være spennende å lage en animasjon med glidere i GeoGebra der alle tre grafene presenteres samtidig. Elevene vil da se de sammenfallende *x*-verdiene for alle tre uttrykkene. Se forklaring på GeoGebra-veiledningen til dette heftet på www.matematikksenteret.no.



UTVIDELSE AV OPPGAVEN

En del elever motiveres av at oppgavene har et konkurransemoment. Oppgaven med spillkort kan enkelt endres slik at to og to elever konkurrerer mot hverandre. Konkurransen går ut på at de to elevene raskest mulig skal finne flest tripler med kort. Elevene trenger ikke å bruke spillbrettet. Sørg for at elevene begrunner hvorfor løsningene er riktige.

La elever som trenger en ekstra utfordring lage nye spillekort. Da blir elevene utfordret til å tenke oppgaven «bakvendt».

Det er også mulig å lage en liten vri på oppgaven, men fortsatt bruke kopieringsoriginalene. I stedet for å ha funksjonsuttrykkene bakpå kortene, kan de kopieres på egne kort. Oppgaven blir da å finne de fire kortene som hører sammen (kvartett).

10 Skalarprodukt – Introduksjon

KOMPETANSEMÅL

Kompetansemålene er hentet fra 2T og R1 .

Mål for opplæringa er at eleven skal kunne

- gjere greie for det geometriske biletet av vektorar som piler i planet og berekne sum, differanse og skalarprodukt av vektorar og produktet av tal og vektor (2T)
- rekne med vektorar i planet skrivne på koordinatform, berekne lengder, avstandar og vinklar med vektorrekning og avgjere når to vektorar er parallelle eller ortogonale (2T)

- regne med vektorer i planet, både geometrisk som piler og analytisk på koordinatform (R1)
- beregne og analysere lengder og vinkler til å avgjøre parallellitet og ortogonalitet ved å kombinere regneregler for vektorer (R1)

LÆRINGSMÅL

- Eleven skal kunne beregne skalarprodukt med vektorer i koordinatform.
- Eleven skal kunne forklare når og hvorfor skalarproduktet blir null.
- Elven skal kunne tegne vektorer slik at skalarproduktet blir 0.
- Eleven skal finne to vektorer på koordinatform slik at skalarproduktet blir 0.
- Eleven skal forklare sammenhengen mellom formelen for skalarproduktet skrevet geometrisk med piler og beregningen med vektorer på koordinatform.
- Eleven skal kunne bruke digitale hjelpemidler i forståelse av dette tema.

ARBEIDSFORM

Gjennom dette opplegget skal elevene opparbeide ny kunnskap gjennom veksling mellom pararbeid og samtaler i hele klassen. Denne vekslingen mellom utprøving og sammendrag gjør at elevene må holde konsentrasjonen oppe gjennom hele økten. Å jobbe i par stimulerer dessuten til matematiske samtaler.

TIDSBRUK OG VALG AV TIDSPUNKT

- Opplegget varer 2-3 skoletimer. Skoletimene behøver ikke å være i den samme økten.
- Elevene må være kjent med vektorer, både geometrisk som piler og på koordinatform.

UTSTYR

PC med GeoGebra (eller liknende programvare) og oppgaveark.

INTRODUKSJON

Dette undervisningsopplegget skal bidra til å utvikle en forståelse for skalarprodukt ved hjelp av undersøkende oppgaver og aktiviteter. Skalarproduktet blir utforsket ved hjelp av tenking, tegning på ark og digitale hjelpemidler. Elevene blir så ledet til å finne ut at vektorene står normalt på hverandre når skalarproduktet blir 0. Opplegget avsluttes med å finne sammenhengen mellom definisjonen av skalarprodukt og skalarprodukt på koordinatform.

For mange elever er skalarprodukt bare en definisjon som de må lære å bruke. I lærebøker blir det ofte presentert uten noen nærmere forklaring. Hvis det blir gitt en forklaring, blir det gjerne brukt eksempler fra fysikken. Det er ikke alle elever som har fysikk, så sammenhengen med dekomponering av krefter er ikke opplagt for alle.

Opplegget er delt opp i 7 aktiviteter. Flere av aktivitetene krever at elevene løser noen gitte oppgaver. For at kontinuiteten i opplegget skal ivaretas, er det lurt at læreren har skrevet opp oppgavene på forhånd, enten på elektronisk tavle eller på lysark. Oppgavearket til elevene hører til aktivitet 5,6 og 7.

Under klassesamtalen er det viktig å ta vare på alle innspill. Alt elevene sier, skal noteres på tavlen. Det skjer mye læring når læreren tar tak i feilsvar, siden disse kan avdekke misoppfatninger. Det er viktig å ta tak i slike misoppfatninger før de fester seg. Ved å diskutere feilsvar i felles klasse, vil man nå hele elevgruppen, noe som er gunstig siden misoppfatningene ofte gjelder mange elever. Også elever som ikke sliter med akkurat denne misoppfatningen, kan få en bedre forståelse. Disse elevene lærer å se oppgaver fra flere sider («Det var en artig måte å tenke på, rart at det ikke fører frem»).

AKTIVITET 1

Læreren har skrevet følgende ord på tavlen: **vektor, skalar og produkt.**
Be elevene jobbe individuelt i 2-3 minutter. De skal notere ned forklaringer på ordene uten hjelpemidler.

Etterpå deles tankene med samarbeidspartneren. Har elevene den samme forståelsen av ordene? Etter en stund er det muntlig oppsummering på tavlen. Læreren noterer alle ord og uttrykk som blir nevnt. Det er viktig at læreren har utformet en plan på forhånd, slik at man kan ordne forklaringene når de skrives opp.

Mulige elevsvar:

- Skalar: tall, det vanlige
- Produkt: multiplikasjon, faktorer, gangetabellen, ganging
- Vektor: lengde, retning, kraft, fysikk pluss eventuelle skrivemåter som [1,2], $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, <1,2>, $\vec{a}$

Etter denne idémyldringen presenterer læreren læringsmålet for timen ved å notere:

skalarprodukt

vektor • *vektor* = *skalar*

Målet for timen er å forklare betydningen av dette uttrykket.

Kommentar til læreren

Undervisningen starter med noe som er kjent. Dermed plasserer eleven det nye inn i en sammenheng fra starten av. Man kan gjerne tipse elevene om at ordet skalarprodukt består av to deler. De kjenner ikke til ordet skalarprodukt, men de kjenner til delene skalar og produkt.
Til slutt noterer læreren læringsmålet *vektor* • *vektor* = *skalar* og overskriften *skalarprodukt* på tavlen. Målet for timen er å få en forståelse for skalarprodukt som går utover definisjonen i lærebøkene.

Det er viktig å presisere at dette er noe annet enn multiplikasjon vi kjenner fra før. Symbolet er også annerledes. Det er et større, tykkere punkt. Skalarprodukt blir også kalt for prikkprodukt (dot product).

AKTIVITET 2

Følgende uttrykk noteres på tavlen, gjerne på forhånd:

[3,4] • [5,7] = 43
[2,6] • [4,4] = 32
[8,-4] • [5,9] = 4
[2,2] • [-12,5] = -14

Elevenes oppgave blir å finne ut hvordan man regner for å få det riktige resultatet. De diskuterer fremgangsmåten parvis.

Eksempler på veier til målet

[8,-4] • [5,9] = 40 - 72 - 20 + 36 = -16	Elevene tester regler som de kan fra før. Her bruker de regelen om multiplikasjon av to parenteser.
[8,-4] • [5,9] = 40 - 72 + 20 + 36 = 24	Noen prøver å endre operasjonstegn for å tilpasse svaret.
[8,-4] • [5,9] = 40 - 36 = 4	**Det riktige svaret.**

Elevene skal løse noen få oppgaver for å se om de virkelig har forstått hvordan man beregner skalarproduktet.

Eksempler på oppgaver:

[3,4] • [3,-1] =
[-2,-7] • [-3,1] =
[5,-2] • [2,4] =

Oppsummering av aktiviteten:
Der læreren har skrevet om skalarprodukt i starten av timen, kan hun nå føye til at klassen har funnet en måte beregne skalarproduktet på. Vis tydelig at svaret er et vanlig tall.

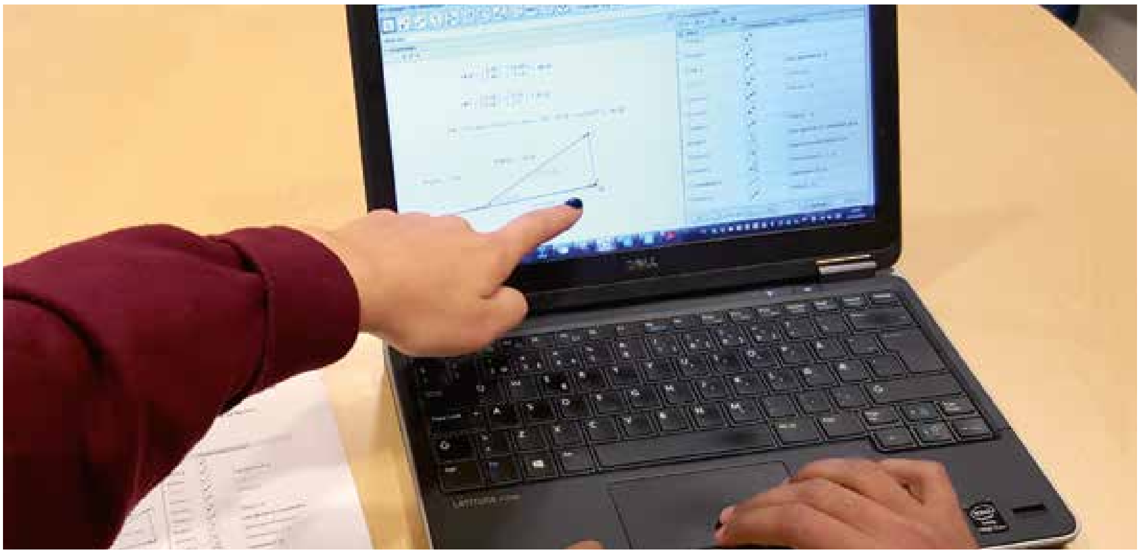
Vi finner skalarprodukt ved å multiplisere de første koordinatene og addere produktet av de andre koordinatene

[a,b] • [c,d] = ac + bd

Kommentar til læreren
I denne aktiviteten finner elevene først ut hvordan man beregner skalarprodukt av to vektorer. Læreren skal altså ikke forklare fremgangsmåten på forhånd. Elevene liker å finne ut noe. Som oppsummering skal læreren kun spørre om alle tror de vet hvordan vi får til resultatet. Erfaringen viser at alle elevgruppene finner det ut, og derfor har det ingen hensikt at læreren forklarer fremgangsmåten.

For å være helt sikker på at alle har forstått, lages det noen eksempler som elevene skal løse. Det kan med fordel lages flere eksempler enn oppgitt, slik at raske regnere ikke blir ferdige før alle har klart noen oppgaver. Svarene noteres på tavlen. Husk at også feilsvar skal noteres. Det er viktig at mulige misforståelser kommer frem på dette tidspunktet. Dessuten vil både eleven som har gjort feilen, og alle som hører på, få en økt forståelse når man forklarer *hvorfor* et svar er feil.

Nå er det riktige tidspunktet for å sammenfatte hvordan man beregner skalarproduktet. Elevene må også få forklart at det de har regnet ut, kalles for skalarprodukt. Regnemåten skrives både med ord og med formel på tavlen. Vær nøye med å notere fremgangsmåten slik som elevene vil ha det, selv om det kan virke litt kronglete, for det er viktig at elevene øver seg på å formulere med ord.



AKTIVITET 3

På tavlen står følgende:

[,] • [,] = 0

Elevene skal finne eksempler som gjør at påstanden blir sann. Det er en fordel at de jobber parvis. Etter en stund samles eksemplene på tavlen.

Kommentar til læreren

Denne oppgaven er meget sentral i opplegget. Her skal man gi elevene nok tid til å finne mange eksempler. Man skal også ta seg god tid til oppsummering. Eksemplene vil gjerne ha forskjellig vanskegrad. Ved å gå rundt i klasserommet kan læreren tipse elever om å finne andre typer vektorer som har skalarprodukt 0.

Mulige elevsvar

a. [4,2] • [5,-10] = 0

b. [2,2] • [2,-2] = 0

c. [2,4] • [6,-3] = 0

d. [3,4] • [-4,3] = 0

- Disse elevsvarene noteres i rekkefølgen de blir nevnt i. Det tar ikke lang tid før elevene oppdager at det er nødvendig med et negativt tall. Kan det være flere negative tall?
- Svar b) er matematisk sett det enkleste. 2 like tall og ett minustegn. En rundgang i klasserommet viser derimot at svar av typen d) gjerne forekommer hyppigst.
- I svar av typen a) og c) har elevene antagelig valgt en annen strategi: De har valgt ett tall, og de har funnet frem til to multiplikasjoner med det valgte tallet som produkt.
- Lærerens oppgave er å vise sammenhengen mellom de ulike løsningene. De røde vektorene tilsvarer svartypen d).

  [4,2] • [5,-10] = 2[2,1] • [1,-2] = 0

- Svar som [6,8] • [-4,3] = 2 [3,4] • [-4,3] = 0 er en variasjon med bare ett tall utenfor parentesen.

AKTIVITET 4

Den neste oppgaven skal elevene løse med papir og blyant.
Elevene skal velge noen av regnestykkene fra aktivitet 3 som har skalarprodukt 0, og tegne dem på arket.

Ved hjelp av linjal skal de forlenge vektorene til linjene skjærer hverandre.
Elevene skal lete etter et mønster. Målet er å finne ut at vektorene står loddrett på hverandre hvis skalarproduktet er 0.

Kommentar til læreren

Her viser det seg at elevene har lett for å blande sammen punkt og vektor. Mange elever tegner en vektor mellom to punkter i stedet for å tegne to vektorer. Det vil si at de blander sammen [,] med (,). For eksempel tegner elevene ofte [4,2] • [5,-10] som vektor mellom punkt (4,2) og punkt (5,-10). Det er viktig at vi repeterer denne skrivemåten før vi tar i bruk digitale hjelpemidler. GeoGebra bruker dessverre ikke den samme notasjonen som er vanlig på videregående skoler i Norge. I GeoGebra-veiledningen til dette heftet på www.matematikksenteret.no er det forklart hvordan programmet skriver vektorer, og hvordan vi regner med vektorer.

Gjennom klassesamtale må vi komme frem til at vektorene står loddrett på hverandre. Først da kan vi lete etter en forbindelse mellom loddrett og 0.

Noen tips til hjelpende spørsmål:

- Hvilken egenskap har vektorene når skalarproduktet blir 0?
- Hva lærte dere om vinkler i 1T?
- Husker dere begreper som sinus, cosinus og tangens?
- Husker dere om et av uttrykkene sinus 90°, cosinus 90° eller tangens 90° er lik 0?

AKTIVITET 5

Oppgavearkene deles ut nå. Elevene jobber med hver sine oppgaveark. Det er fremdeles pararbeid, men det er viktig at alle bruker GeoGebra, og at de skriver på eget ark.

Oppgave 1

- Tegn 3 vektorer med ulik lengde langs hver av de to linjene.
- Sett opp minst 4 skalarprodukt mellom en vektor fra hver retning og regn ut.
- Skriv med egne ord hva du har funnet ut.

Kommentar til læreren

Så langt har elevene funnet ut at vektorene står loddrett på hverandre hvis skalarproduktet er 0. I denne oppgaven viser de det motsatte, nemlig at skalarproduktet blir 0 hvis vektorene står loddrett på hverandre.

Det er viktig å poengtere at denne regelen gjelder begge veier: Hvis to vektorer står normalt på hverandre, er skalarproduktet 0, og hvis skalarproduktet er 0, står vektorene normalt på hverandre. Elevene har lett for å ta det som en selvfølge.

AKTIVITET 6

Elevene jobber videre med oppgavearkene.

Oppgave 2

- I denne oppgaven skal du finne den største og den minste verdien skalarproduktet av to vektorer kan ha.
- Bruk GeoGebra eller en annen programvare og lag en figur som tilsvarer denne figuren.
- Hva skjer hvis du flytter på punkt A?
- Ved å flytte på punktene B og C skal du finne sammenhengen mellom skalarprodukt og vinkel. Velg vinkler mellom 0° og 180°
- Skriv med egne ord hva du har funnet ut.

Kommentar til læreren

I denne oppgaven skal elevene bruke et digitalt hjelpemiddel til utforsking. Det er viktig at elevene noterer oppdagelsene sine på oppgavearket. I tekstfeltet skal de notere hva de har oppdaget med egne ord. Det er lurt at læreren går rundt i klasserommet for å se etter ulike formuleringer, for så å velge ut elever som skal presentere svarene sine, slik at svarene representerer hele klassen. Det er vanskelig å formulere seg klart og tydelig, og derfor er det viktig at elevene ser forskjellige riktige løsninger.

Den viktigste oppdagelsen for det videre arbeidet er at skalarproduktet blir størst når vinkelen mellom vektorene er 0°.

AKTIVITET 7

Elevene jobber med oppgavearkene. Læreren skal oppmuntre elevene til å diskutere svarene med hverandre.

Oppgave 3

- Formelen for skalarprodukt blir ofte oppgitt på følgende form:

  $$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$$

  φ er den minste vinkelen mellom de to vektorene.
- Forklar med ord de enkelte delene av formelen.
- For å forklare sammenhengen mellom denne formelen og det som du har lært om skalarprodukt, skal du åpne en ny fil, bruke et blankt ark (uten akser og rutenett) og tegne en figur som er bygd opp på samme måte som figuren nedenfor. (Punkt B bruker programmet til å lage en rett linje). Bruk fremgangsmåten som hjelp. Pass på at navnene på objektene er de samme som på oppgavearket.
- OBS: Vektorkoordinatene og vinkelen på deres figur vil være ulik tallene på figuren.

- Finn skalarproduktet av vektor *u* og vektor *w*.
- Finn skalarproduktet av vektor *u* og vektor *v*.
- Finn skalarprodukt av vektor *u* og *v* ved å bruke formelen.
- Finn en sammenheng mellom lengden av vektor *v*, lengden av vektor *w* og vinkelen mellom vektorene.

Oppsummering

Forklar hvorfor du kan bruke begge formlene for å finne skalarproduktet. Legg vekt på sammenhengen mellom disse formlene. Når vil du bruke den første formelen, og når vil du bruke den andre?

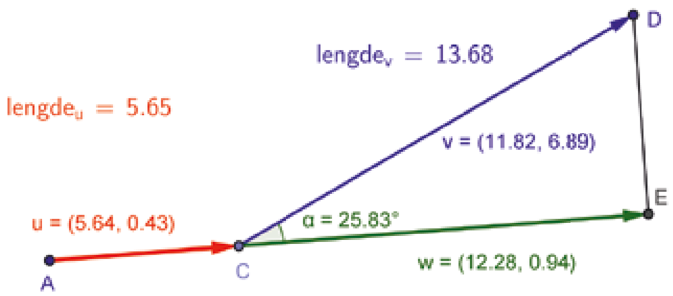
Kommentar til læreren

Elevene skal løse oppgavene enten ved beregning i skrivefeltet eller med CAS. Deloppgavene skal føre dem til å se sammenhengen mellom de to formlene. Hvis man jobber i skrivefeltet, er det enkelt å lage en dynamisk tekst i grafikkfeltet som viser at svaret i de tre regnestykkene blir det samme, og det selv om man flytter på vektorene.

$$u \bullet w = \begin{pmatrix} 5.64 \\ 0.43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12.28 \\ 0.94 \end{pmatrix} = 69.62$$

$$u \bullet v = \begin{pmatrix} 5.64 \\ 0.43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11.82 \\ 6.89 \end{pmatrix} = 69.62$$

$$u \bullet v = lengde\ u \cdot lengde\ v \cdot cos\alpha = 5.65 \cdot 13.68 \cdot cos(25.83°) = 69.62$$



Det som står igjen er å peke på sammenhengen mellom de to formlene. Her gjelder det å forstå at både lengden og retningen til vektorer er inkludert når vi skriver dem på koordinatform. Dermed er også vinkelen mellom de to vektorene bestemt. Definisjonen av cosinus i 1T skal hjelpe til forståelsen. Nedenfor er det også en forklaring ved regning, og ved å kunne vise flere representasjoner øker forståelsen for elevene.

Hvis det derimot bare står $\vec{a} \bullet \vec{b}$, vet vi ikke noe om lengden til vektorene, og vi vet heller ikke noe om vinkelen mellom dem. Dette er tilleggsinformasjon som må være oppgitt i oppgaven for at man kan bruke formelen.

- Finn sammenhengen mellom lengden av vektor *v*, lengden av vektor *w* og vinkelen mellom vektorene.

Målet med denne oppgaven er å se at $|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \cos C$. I lærebøker er som regel de to vektorene tegnet i den samme trekanten. For å forklare formelen kan det være hensiktsmessig å tegne vektorene etter hverandre. Projeksjonen av vektor *v* på samme linje som vektor *u* henger da sammen med oppdagelsen av at skalarproduktet er størst når vektorene peker i samme retning.
Ved hjelp at en klassesamtale skal elevene få følgende forståelse:

- Skalarproduktet blir 0 når vektorene står loddrett på hverandre.
- Siden et produkt er 0 når minst en av faktorene er 0, er det lett å se at skalarproduktet blir 0 når φ=90°
- Skalarproduktet blir størst mulig hvis vektorene peker i samme retning, dvs. når $\varphi = 0°$. Den største verdien som cosinus til en vinkel kan ha, er 1. da cos 0°=1
- Det betyr at jo mindre φ er, jo større blir skalarpoduktet.

Vi kan vise at sammenhengen er riktig ved regning:

Utgangspunktet er definisjonen $\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$, der φ er vinkelen mellom vektorene. Denne definisjonen bestemmer hva et skalarprodukt mellom to vektorer er. Definisjonen skal gjelde for alle vinkler φ, også for $\varphi = 0°$. Nedenfor viser vi at regelen gjelder når $\varphi = 0°$.

Vi kaller vektorene $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d] = n[a, b] = [na, nb]$ da de har samme retning (men kan ha ulik lengde).

Vi setter inn i definisjonen:

$$
\begin{aligned}
&\vec{u} \bullet \vec{v} = \\
&|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi = \\
&|[a,b]||[na,nb]|\cos 0° = \\
&\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(\sqrt{(na)^2+(nb)^2}\right)\cdot 1 = \\
&\sqrt{(a^2+b^2)(n^2a^2+n^2b^2)} = \\
&\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2)n^2} = \\
&(a^2+b^2)n = \\
&a\cdot(na)+b\cdot(nb) = \\
&a\cdot c+b\cdot d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Altså}: \\
&\vec{u} \bullet \vec{v} = [a,b] \bullet [c,d] = ac + bd
\end{aligned}
$$

Dette begrunner regelen som vi kan bruke når vi kjenner vektorkoordinatene.

Innholdsliste kopieringsoriginaler

1 Figurtall, følger og rekker – Tårn

I denne oppgaven brukes bare terninger med 6 sider.

Oppgave 1

- Bygg et tårn med terninger. Det vil si at du setter terningene opp på hverandre. Tell antall synlige sider og noter svarene i tabellen.

Antall terninger	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antall synlige sider									

- Prøv å finne en sammenheng mellom antall terninger og antall synlige sider. Noter sammenhengen med ord.

- Bruk denne sammenhengen for å finne antall synlige sider i flere tårn.

Antall terninger	15	20	30	50	100	1000	10000	*t*
Antall synlige sider								

- Klarte du å finne løsningen med regelen som du har skrevet i boksen over, eller måtte du endre noe for å finne antall sider i høye tårn? Noter den nye regelen.

Oppgave 2

- I denne oppgaven gjør du det samme som i oppgave 1, men nå teller du sidene som *ikke* synes.

Antall terninger	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antall ikke-synlige sider									

- Prøv å finne en sammenheng mellom antall terninger og antall ikke-synlige sider. Noter sammenhengen med ord.

- Bruk denne sammenhengen for å finne antall ikke-synlige sider i flere tårn:

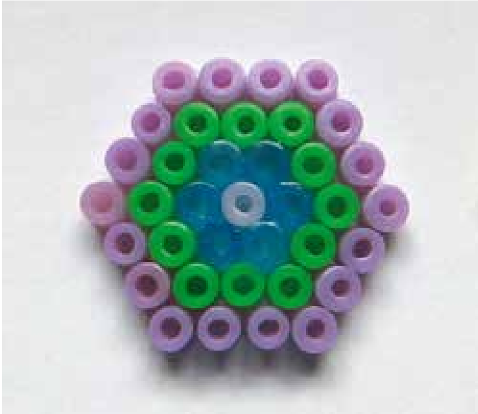
Antall terninger	15	20	30	50	100	1000	10000	*t*
Antall ikke-synlige sider								

- Klarte du å finne løsningen med regelen som du har skrevet i boksen over, eller måtte du endre noe for å finne antall ikke-synlige sider i høye tårn? Noter den nye regelen.

3 *Figurtall, følger og rekker – Perlebrett 1*

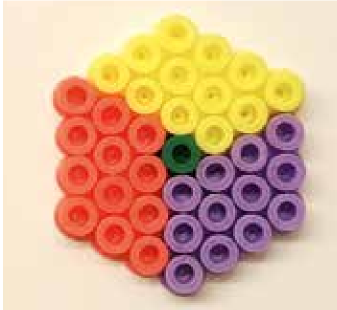
Bildet viser et perlebrett i størrelse 4, det vil si figur 4.

- Lag perlebrett i flere størrelser, og noter antall perler som du trenger i tabellen.
- Finn en sammenheng mellom størrelsen av perlebrettet og det antall perler som du trenger for å lage det.
- De siste tre kolonnene kan du bruke til beregninger.



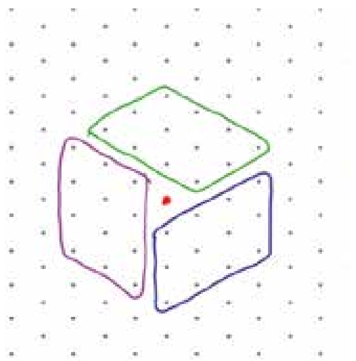
Størrelse/Figur	Antall			
1	1			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
10				
n				

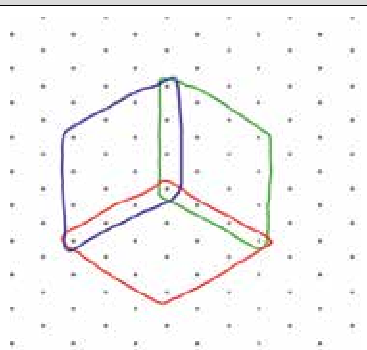
3 *Figurtall, følger og rekker – Perlebrett 2*

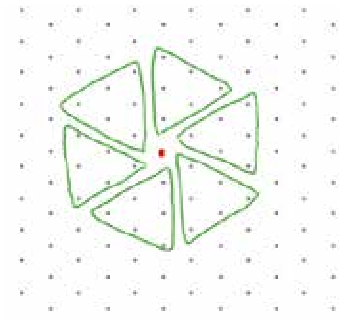


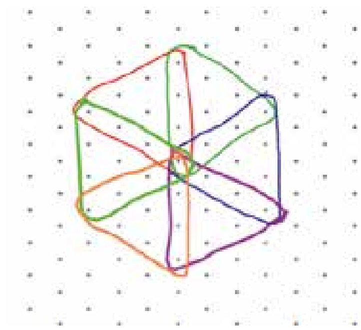
Nedenfor er det 4 tegninger. Disse viser ulike geometriske tenkemåter for å finne en formel for antall perler som trengs for å lage et perlebrett. Alle eksemplene viser figur 4.

- Lag en tilsvarende tegning for figur 3 og 5. Sett opp regnestykker som viser hvordan du finner antall perler i figurene.
- Forklar med ord hvilke tanker som ligger bak hver figur og hvordan du finner antall perler.
- Finn en formel som viser tenkemåten bak figuren.

Figur 3	Figur 4	Figur 5
		
Forklaring:		
Formel:		

Figur 3	Figur 4	Figur 5
		
Forklaring:		
Formel:		

Figur 3	Figur 4	Figur 5
		
Forklaring:		
Formel:		

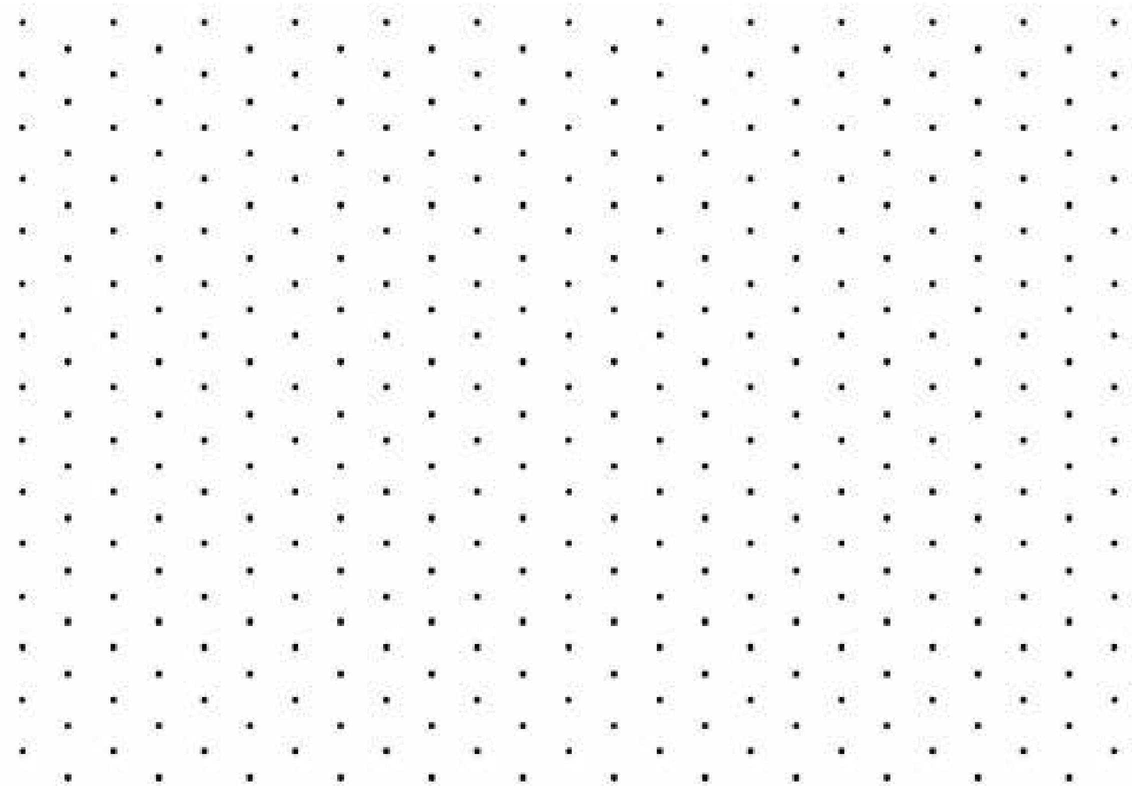
Figur 3	Figur 4	Figur 5
		
Forklaring:		
Formel:		

3 *Figurtall, følger og rekker – Perlebrett 3*

Bildet viser et perlebrett med størrelse 4

- Bruk perler eller tellebrikker og lag en figur med størrelse 4. Velg fargene slik at figuren blir delt inn i tre firkanter.
- Tegn figuren inn i prikkarket, og fargelegg firkantene med forskjellig farge.
- Lag og tegn figur 3 og 5 på samme måte.
- Bruk firkantene til å beregne antall brikker som du trenger til å lage figur *n*.

	Firkant 1	Firkant 2	Firkant 3	Sum
Figur 3				
Figur 4				
Figur 5				
Figur 6				
Figur 10				
Figur *n*				



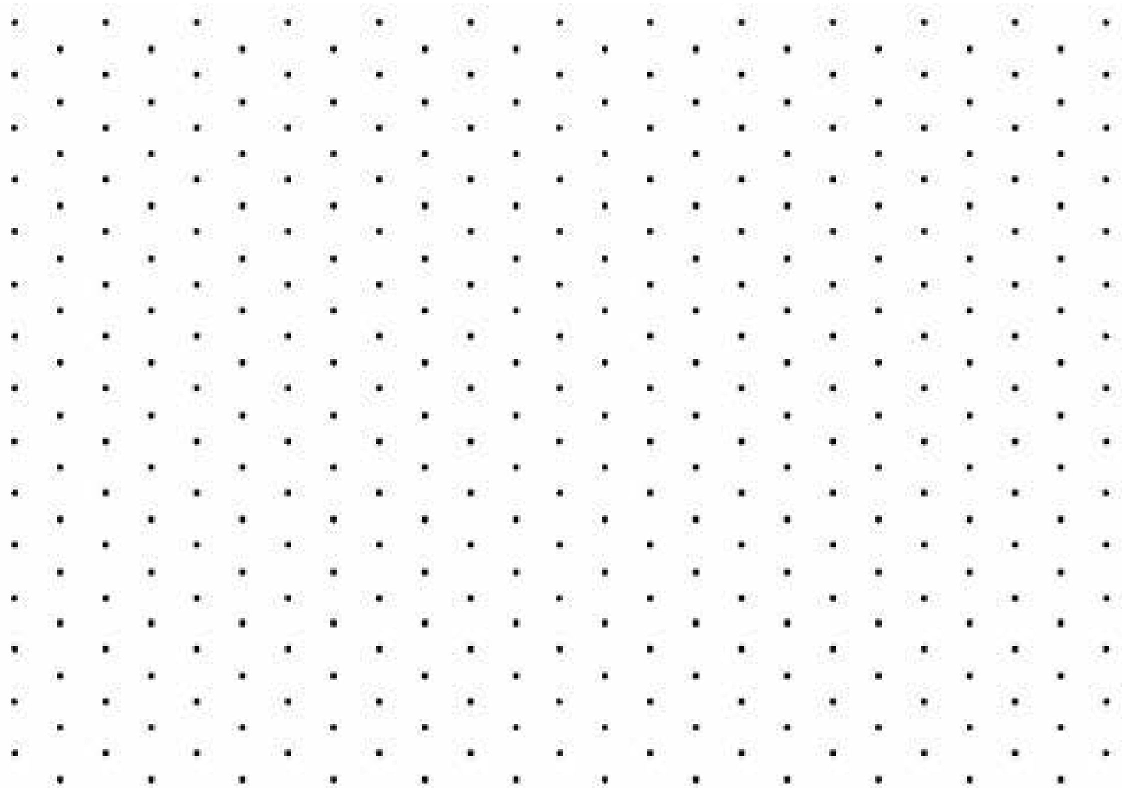
3 *Figurtall, følger og rekker – Perlebrett 4*

Bildet viser et perlebrett med størrelse 4.

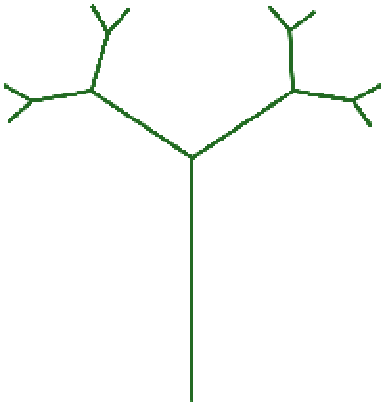
- Bruk perler eller tellebrikker og lag figurer med størrelse 3, 4 og 5 slik som på bildet.
- Tegn figurene inn i prikkarket. Fargelegg slik at ringene får forskjellig farge.
- Bruk ringene og det du har lært om rekker til å beregne antall brikker som du trenger til å lage figur *n*.

Hvor stort perlebrett kan vi lage med 8000 perler?

Størrelse/Figur	Antall i den ytterste ringen	Økning fra forrige ledd	Vi velger ny nummering
1			
2			$a_1 =$
3			$a_2 =$
4			$a_3 =$
5			$a_4 =$
6			$a_5 =$



4 Figurtall, følger og rekker – Treet



Denne figuren er laget slik at grenene deler seg i to.
Hver nye gren er halvparten så lang som den foregående.

Vi tenker at man tegner treet videre uendelig mange ganger.

- Fyll ut tabellen

Steg	Antall nye grener	Lengden av den nye grenen	Total lengde av alle grener tilsammen	Lengden fra roten til den ytterste grenen
0	1	1	1	1
1				
2				
3				
4				
5				
6				
15				
72				
n				

Se på *n*-raden:

- Sjekk med andre elevgrupper. Har alle gruppene samme svar? Har alle tenkt på samme måte? Forklar for hverandre hvordan dere har tenkt.

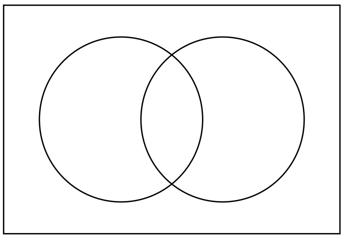
Se på den siste kolonnen:

- Uttrykket i *n*-raden er en generell formel for lengden målt fra roten til den ytterste grenen. Tegn denne formelen som en funksjon i GeoGebra.
- Hva skjer med funksjonen når *n* blir uendelig stor? Vis det på flere måter.

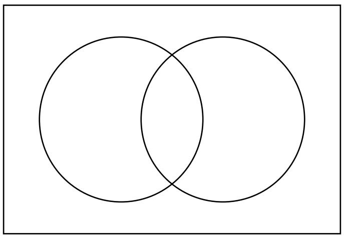
6 *Sannsynlighet – Venndiagram 1*

- Illustrer oppgaven med brikker og mengderinger.
- I hver oppgave må du først skrive på mengderingene hva de skal inneholde, enten med ord eller med forkortelser.
- Skriv deretter riktig antall i hver mengde (hvert rom). Utenfor rammen skal det totale antallet stå.

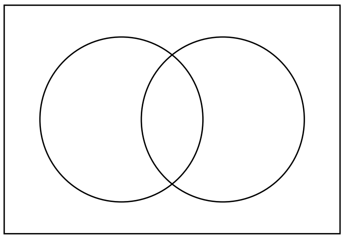
Oppgave 1
25 elever blir spurt om brus. 15 elever svarte at de liker cola, 12 at de liker solo, mens 5 elever liker verken cola eller solo.



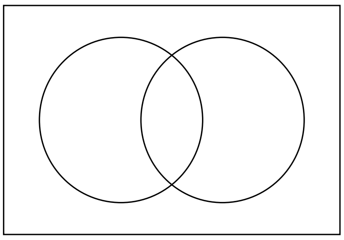
Oppgave 2
I påskeferien skal 7 elever gå langrenn og 18 skal kjøre i parken. 10 elever har ikke tenkt å bruke tid i snøen. Elevgruppen teller 30 elever.



Oppgave 3
Ved en skole er det 1000 elever. 70 % driver med ballspill, 60 % liker å gå på ski. 20 % sier at de ikke liker noen av delene.



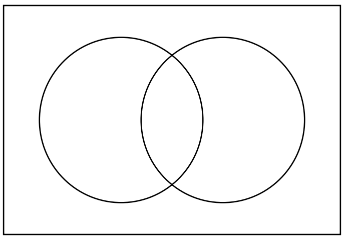
Klarer dere disse også?



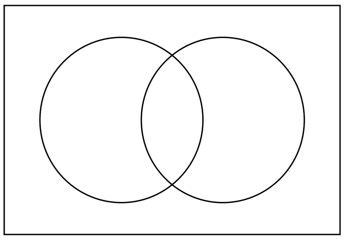
Oppgave 4
I en elevgruppe har 17 elever valgt trompet, 11 har valgt tegning. 4 elever har valgt noe annet.

Hvor mange elever kan det være i klassen?

a. Finn det største mulige antall elever.
b. Finn det minste mulige antall elever.
c. Finn det nøyaktige antall elever, hvis 6 elever har valgt begge fag



Oppgave 5
På et fat ligger 36 smørbrød. På halvparten av smørbrødene ligger svartpølse. 2/3 av smørbrødene er pyntet med egg.
1/9 har annet pålegg.



Oppgave 6
I en undersøkelse ble 200 personer spurt om hvilke aviser de leste. 52 svarte Aftenposten og 58 Dagbladet. 123 svarte at de ikke leste noen av disse to avisene.

6 *Sannsynlighet – Venndiagram 2*

I en klasse er det 29 elever. Når vi undersøker idrettsinteressen finner vi at 18 elever liker fotball, og 13 elever liker ski. 5 av elevene i klassen liker ingen av disse to idrettene.

Forkortelsene må forklares:
F : (en tilfeldig valgt elev) liker fotball.

S : (en tilfeldig valgt elev) liker ski.

$\cup$: union betyr «enten det ene eller det andre eller begge deler» (liker enten ski eller fotball eller begge deler). Ofte sier vi bare «eller».

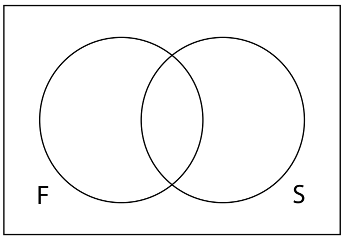
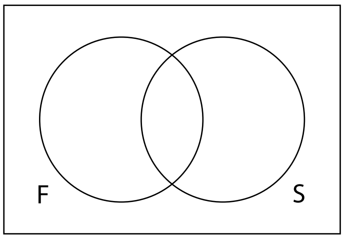
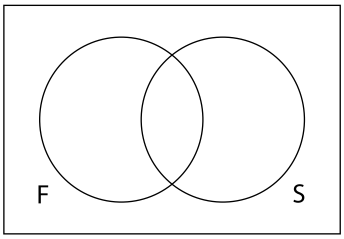
$\cap$: snitt betyr «og samtidig» eller «både – og» (liker både fotball og ski). Ofte sier vi bare «og».

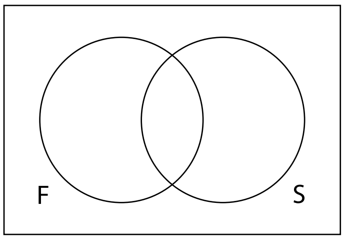
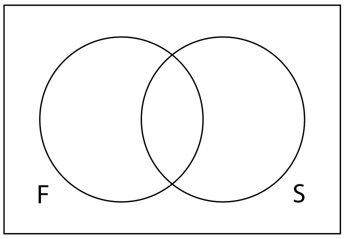
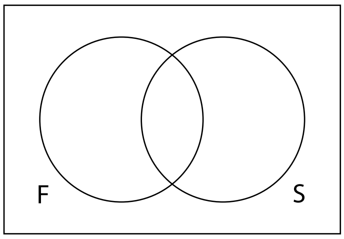
$\overline{F}$: Strek over symbolet betyr «ikke» (liker ikke fotball).

$F \setminus S$: Skrå strek betyr «uten» eller «men ikke» (liker fotball, men ikke ski).

Oppgave 1

- Fargelegg de ulike mengdene i Venndiagrammene nedenfor:

$F \cup S$	
$F \cap S$	
$F \setminus \mathrm{S}$	

$S \setminus F$	
$\overline{F}$	
$\overline{S}$	

Oppgave 2

- Oversett til symbolspråk og regn ut følgende sannsynligheter:

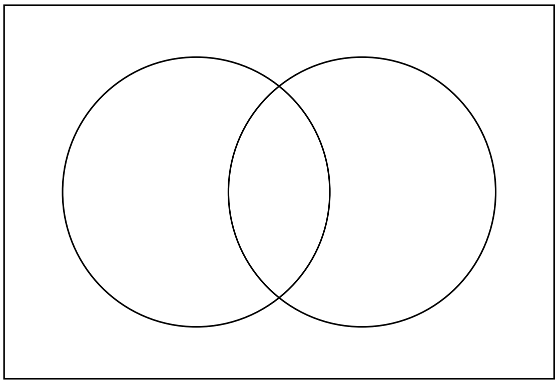
Sannsynligheten for at en elev liker fotball =
Sannsynligheten for at en elev liker ski =
Sannsynligheten for at en elev ikke liker noen av idrettene =
Sannsynligheten for at en elev liker både fotball og ski =
Sannsynligheten for at en elev liker ski eller fotball =
Sannsynligheten for at en elev liker ski, men ikke fotball =
Sannsynligheten for at en elev liker bare én idrett =
Sannsynligheten for at en elev ikke liker fotball =
Sannsynligheten for at en elev ikke liker to idretter =

6 *Sannsynlighet – Venndiagram – Addisjonssetningen*

Oppgave 1

En gruppe med 20 personer ble spurt om de har søsken. 12 svarte at de har brødre, 10 at de har søstre, mens 6 personer er enebarn.

- Legg informasjonen med brikker inn i et venndiagram. Sett navn på sirklene. Skriv antallene inn i venndiagrammet.



Bruk forkortelsene
B: har brødre
S: har søstre

- Finn sannsynlighetene

P(B) =
P(S) =
$P(B \cup S) =$
$P(B \cap S)=$

Oppgave 2

Addisjonssetningen i sannsynlighet er gitt ved formelen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Skriv setningen slik at den passer til oppgave 1 ovenfor.

- Forklar det som står i formelen med ord.

Oppgave 3

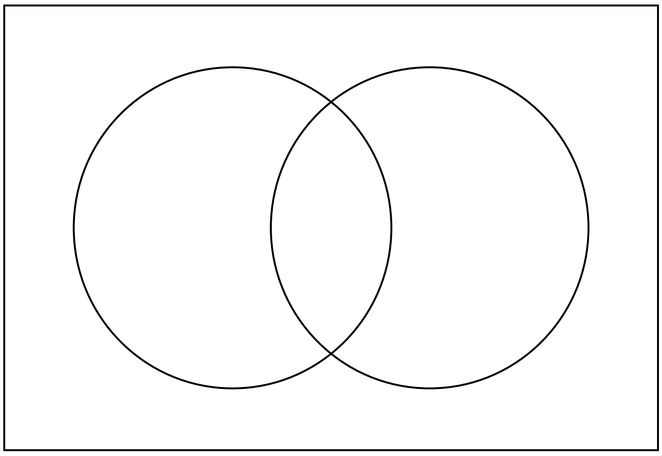
I en skoleklasse på 28 elever ble det gjort en undersøkelse for å finne ut hvem som hadde vært i Tyskland og hvem som hadde vært i Frankrike. Det viste seg at 13 elever hadde vært i Tyskland, 15 hadde vært i Frankrike, mens 4 ikke hadde vært i noen av disse landene.

- Skriv opp forkortelsene du vil bruke.

Har vært i Tyskland:

Har vært i Frankrike:

- Tegn opplysningene inn i venndiagrammet.

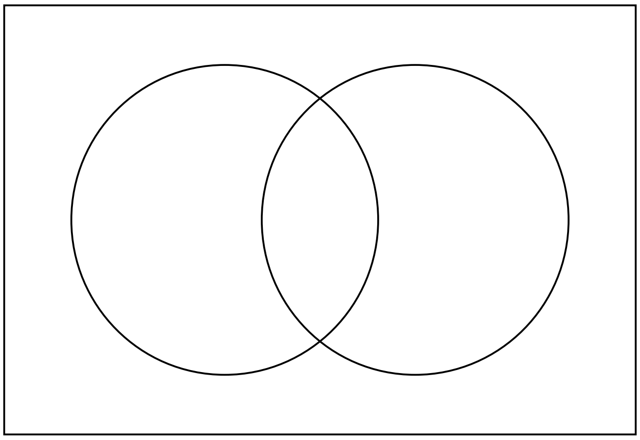


- Bruk addisjonssetningen og finn sannsynligheten for at en elev i denne klassen har vært i Tyskland eller Frankrike.

Oppgave 4

En gruppe på 25 elever blir spurt om de går på ungdomsskolen eller på videregående skole. 15 elever svarer at de går på ungdomsskolen, 8 elever svarer at de går på videregående skole og 2 elever svarer at de ikke går på skole.

- Tegn opplysningene inn i venndiagrammet.



- Skriv opp forkortelsene du vil bruke.

- Bruk addisjonssetningen og finn sannsynligheten for at en elev går på videregående skole eller på ungdomsskolen.

- Hvorfor er denne oppgaven mye enklere enn oppgave 2?

7 Derivasjon – Introduksjon

Tangenter til krumme grafer

Oppgave 1

Tegn grafen til $a(x) = x^2$ i GeoGebra.
Marker punkter på grafen, se tabellen nedenfor: Punktet i $x = 1$ finner du ved å skrive $(1,a(1))$.
Tegn tangenter i punktene, og noter opplysningene i et skjema:

$a(x) = x^2$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er ..**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Kan du gjette hva stigningstallet vil bli for tangenten i andre x-verdier, $x = -2$, $x = 3$, osv. ?
Skriv det du gjetter i tabellen, og kontroller etterpå ved å tegne.

Undersøk følgende funksjoner på samme måte. Bruk et nytt vindu i GeoGebra for hver funksjon.

Oppgave 2

$b(x) = -x^2$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er ..**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Oppgave 3

$c(x) = x^2 + 3$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er ..**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Oppgave 4

$d(x) = 2x^2$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er ..**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Oppgave 5

$e(x) = 3x^2$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er ..**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Oppgave 6

$f(x) = x^2 + x$			**Sammenlign med $a(x) = x^2$**	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**
$x = 1$				
$x = 2$				
$x = 0$				
$x = -1$				

Oppgave 7

$g(x) = x^2 + 2x$			Sammenlign med $a(x) = x^2$	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**
$x = 1$				
$x = 2$				
$x = 0$				
$x = -1$				

Oppgave 8

$h(x) = 2x^2 + x$			Sammenlign med $d(x) = 2x^2$	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**
$x = 1$				
$x = 2$				
$x = 0$				
$x = -1$				

Oppgave 9

$i(x) = 2x^2 + 3x$			Sammenlign med $d(x) = 2x^2$	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**	**Tangentens stigningstall**	**Mønster**
$x = 1$				
$x = 2$				
$x = 0$				
$x = -1$				

Oppgave 10

OPPSUMMERING
Vi har kommet frem til følgende regler for derivasjon av polynomer:

1. $a(x) = x^2$ $\quad a'(x) =$
2. $b(x) = -x^2$ $\quad b'(x) =$
3. $c(x) = x^2 + 3$ $\quad c'(x) =$
4. $d(x) = 2x^2$ $\quad d'(x) =$
5. $e(x) = 3x^2$ $\quad e'(x) =$
6. $f(x) = x^2 + x$ $\quad f'(x) =$
7. $g(x) = x^2 + 2x$ $\quad g'(x) =$
8. $h(x) = 2x^2 + x$ $\quad h'(x) =$
9. $i(x) = 2x^2 + 3x$ $\quad i'(x) =$

Derivasjon betyr

Oppgave 11

$j(x) = x^3$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er ..**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Oppgave 12

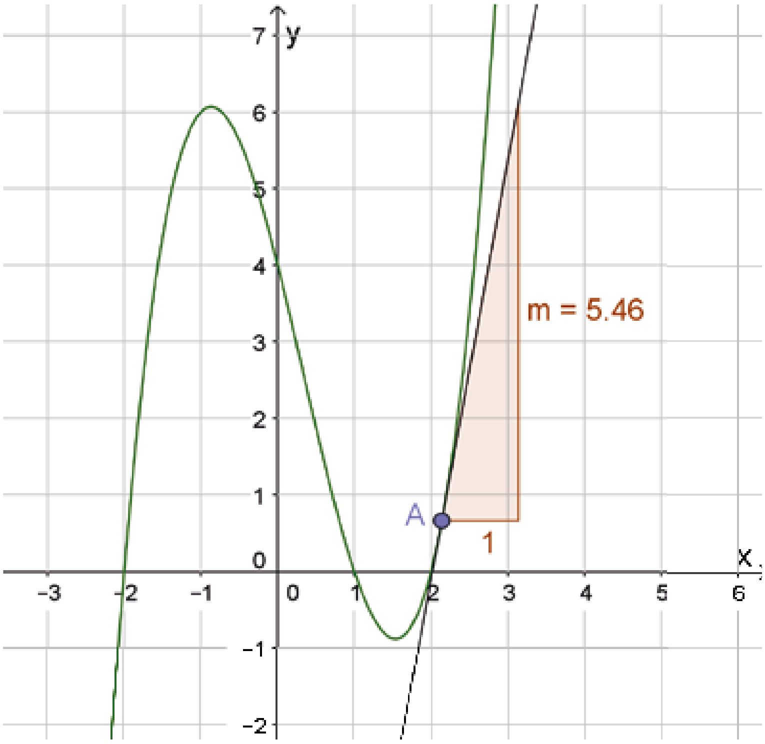
$k(x) = x^4$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Mønsteret er …**
$x = 1$		
$x = 2$		
$x = 0$		
$x = -1$		

Oppgave 13

Se på funksjonene fra oppgave 1, 11 og 12	$a(x) = x^2$	$a'(x) =$
	$j(x) = x^3$	$j'(x) =$
	$k(x) = x^4$	$k'(x) =$
Hvordan tror du systemet er videre?	$l(x) = x^5$	$l'(x) =$
	$m(x) = x^6$	$m'(x) =$
	$n(x) = x^7$	$n'(x) =$
Generell regel	$\boldsymbol{p(x) = x^n}$	$\boldsymbol{p'(x) =}$
Hva hvis	$q(x) = x^1 = x$	$q'(x) =$
	$r(x) = x^0 = 1$	$r'(x) =$

8 *Derivasjon – Sammenhenger*

I denne oppgaven bruker vi dataprogrammet GeoGebra til å utforske egenskapene ved grafen til en funksjon. Vi skal også utforske den deriverte til funksjonen.

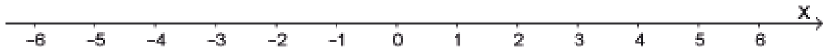


- Åpne GeoGebra.
- Tegn funksjonen
- Sett et punkt *A* på grafen.
- Tegn en tangent i dette punktet.
- Marker stigningen til tangenten og kall stigningstallet for m.

Du vil få et grafikkfelt i GeoGebra som ser omtrent ut som figur 1. I det videre arbeidet lar du *A* bevege seg langs grafen.

Oppgave 1

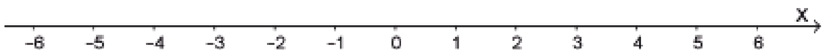
Studer grafen og tegn en fortegnslinje som viser fortegnet til *f(x)* for alle verdier av *x*.



f(x)

Oppgave 2

Flytt punktet *A*, og dermed tangenten, langs grafen til *f(x)*. Du skal nå tegne en fortegnslinje for stigningen *m* til tangenten.



m

Oppgave 3

Sammenlign fortegnslinjen for *m* med grafen til *f(x)*.

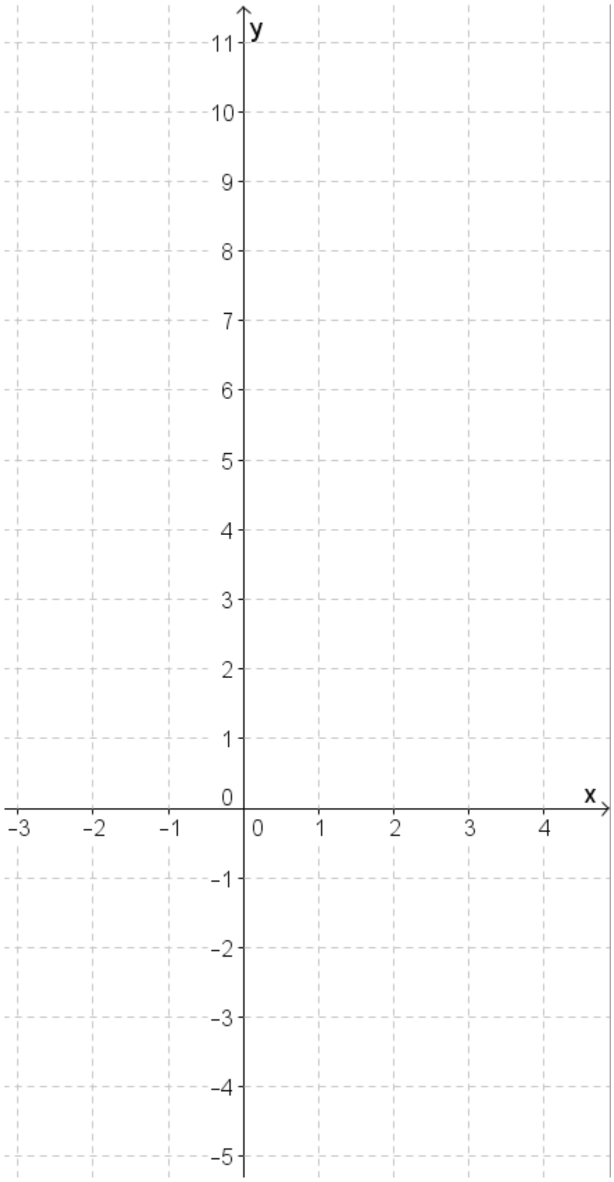
- Hva kan du si om grafen når fortegnslinjen til *m* er positiv?
- Hva kan du si om grafen når fortegnslinjen til *m* er negativ?
- Hva kan du si om grafen når *m* er null?

Diskuter funnene dine med samarbeidspartneren din, og skriv ned det dere kommer frem til.

Oppgave 4

- Fortsett å flytte på punktet *A*, slik at du finner stigningstallet til tangenten i punktene som er listet opp i tabellen.
- Når du har funnet alle verdiene, bruker du disse stigningstallene som y-verdier. Du får da punkter som viser stigningstallene til tangenten for funksjonen *f(x)*. Tegn punktene inn i koordinatsystemet.
- Ut fra disse punktene skisserer du et forslag til hvordan grafen blir seende ut. Kall grafen for *g(x)*.

***x*-verdi**	**Stigningstall, *m***
-2,00	
-1,80	
-1,30	
-1,00	
-0,87	
-0,70	
0	
0,20	
0,33	
0,60	
1,00	
1,40	
1,54	
1,70	
1,90	
2,00	
2,30	
2,50	



Oppgave 5

Ta nå utgangspunkt i grafen *g(x)* som du har skissert.

- For hvilke x-verdier er *g(x)* positiv?
- For hvilke x-verdier er *g(x)* negativ?
- Hvilken sammenheng finner du mellom funksjonsverdiene til *g(x)*, og når funksjonen *f(x)* stiger og synker?

g(x)	***x*-verdier**	***f(x)* stiger/synker**
Positiv		
Negativ		

Oppgave 6

Hvordan kan du bruke *g(x)* til å finne ut hvor grafen til *f(x)* har toppunkt og bunnpunkt? Forklar hva du tenker og skriv ned *x*-verdien til punktene:

Toppunkt for $f(x)$	$x =$	$g(x)=$
Bunnpunkt for $f(x)$	$x=$	$g(x)=$
Forklaring:		

Oppgave 7

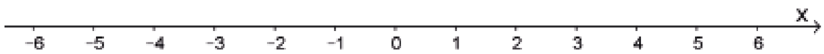
Du skal nå utforske temaet videre med programmet GeoGebra og med bruk av CAS. Lagre derfor det du har gjort i oppgavene frem til nå, før du åpner en helt ny GeoGebra fil.

- La grafikkfelt og CAS være synlige.
- Skriv $f(x):=x^3-x^2-4x+4$ inn i CAS og trykk enter. Klikk på sirkelen til venstre for uttrykket. Grafen blir nå synlig i grafikkfeltet.
- Finn så den deriverte til funksjonsuttrykket ved å skrive inn i CAS $f'(x)$. Trykk enter og klikk på sirkelen slik at grafen blir synlig.
- Sammenlikn grafen til $f'(x)$ og grafen til $g(x)$ i oppgave 4. Beskriv det du finner ut.

Oppgave 8

Du skal nå undersøke hva som skjer når du deriverer den deriverte. Du skriver inn følgende i CAS: *f''*(*x*) og trykk enter. Klikk på sirkelen slik at grafen til *f''*(*x*) blir synlig.

- Tegn fortegnslinjen til *f ''* (*x*).



f'' (*x*)

- For hvilken x-verdi skifter *f '' (x)* fortegn?

x =

- Finn det stedet på grafen til *f(x)* som har denne x-verdien og tegn et punkt der. Dette punktet kalles vendepunktet på grafen *f*(*x*). Skriv ned koordinatene for vendepunktet.

Vendepunkt (,   )

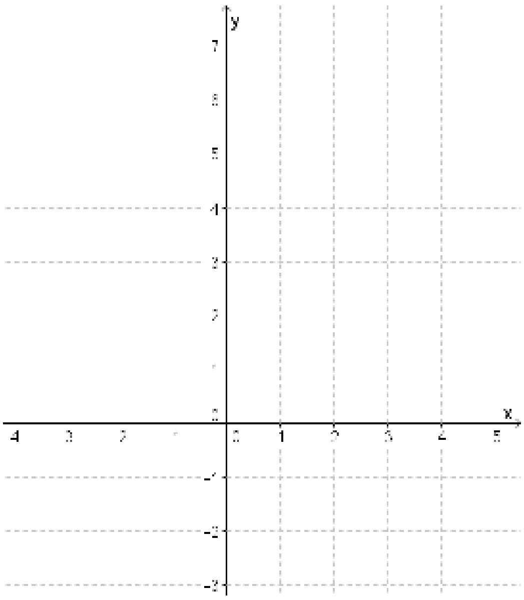
Grafen g(x) som du tegnet i oppgave 4 med stigningstallene til tangentene til funksjonen f(x), er den deriverte funksjonen av f(x).

Det betyr at g(x) = f' (x).

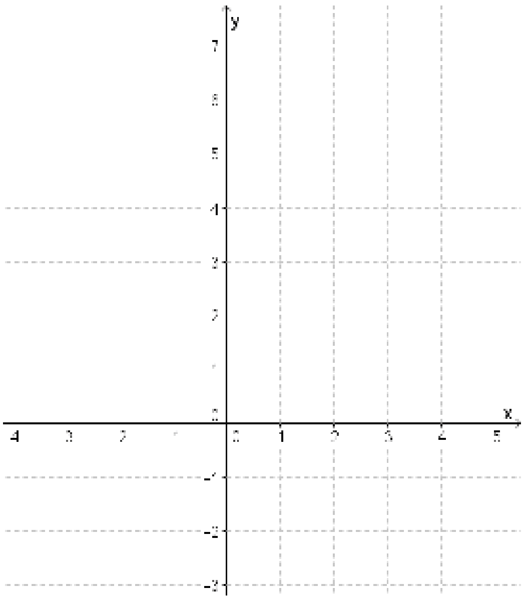
Oppgave 9

- Under er det to koordinatsystemer som du skal lage skisser i.

Til venstre skal du skissere grafen til *f(x)* i det området hvor *f '' (x)* er **negativ**.



Til høyre skal du skissere grafen til *f(x)* i det området hvor *f '' (x)* er **positiv.**



- Det punktet der den ene grafen slutter og den neste begynner, er punktet der $f''(x) = 0$. Forklar hvorfor dette punktet kalles et vendepunkt.

I området der *f ʺ (x)* er negativ, sier vi at *f(x)* vender den **hule siden ned**. I området der *f ʺ (x)* er positiv, sier vi at *f(x)* vender den **hule siden opp**.

Oppgave 10

Ved hjelp av utforsking av egenskapene til grafer i dataprogrammet GeoGebra og egne skisser på papir, har du nå sett sammenhenger mellom grafen til en funksjon, den deriverte og den andrederiverte.

Til slutt skal du nå forklare sammenhengen mellom en funksjon, den deriverte og den andrederiverte med egne ord. Gå gjerne tilbake i det arbeidet du har gjort, når du skal beskrive dette.

I forklaringen din skal du blant annet bruke ord som ***stigningstall, tangent, bunnpunkt, toppunkt, vendepunkt, nullpunkt, positiv og negativ.***

Sammenhenger mellom grafen til en funksjon, den deriverte og den andrederiverte:

9 *Derivasjon – Med spillkort*

Oppgave:

Legg alle de 18 kortene foran deg slik at du kan se grafene:

- 6 kort viser en graf av tredje grad, et funksjonsuttrykk.
- 6 kort viser en graf av andre grad, den deriverte.
- 6 kort viser en graf av første grad, den andrederiverte.

Et kort fra hver kategori hører sammen. De viser sammenhengen mellom en tredjegradsfunksjon, den første- og den andrederiverte.

1. På spillbrettet er det plass til tre kort, ett fra hver kategori. Du skal nå finne tre kort som hører sammen og plassere dem på spillbrettet.

2. Finn x-verdier til nullpunkter, topp-/bunnpunkter og vendepunkt på grafene. Skriv x-verdiene du finner i de tomme rutene på spillbrettet.

3. Legg vekk de tre kortene du nå har jobbet med. Finn tre nye kort som hører sammen og legg dem på spillbrettet. Gjenta punkt 1-2. Skriv inn x-verdiene i ett nytt skjema, slik at du får tatt vare på alle notatene dine.

4. Forklar hvilke sammenhenger du finner mellom funksjonsuttrykket, den deriverte og den andrederiverte når du ser på x-verdiene i tabellen.

5. Åpne GeoGebra og skriv inn en av funksjonene. I samme koordinatsystem legger du inn den første- og andrederiverte av funksjonen. Marker nullpunktene, topp- og bunnpunktene. Undersøk hvordan det stemmer med verdiene i tabellen. Tegn loddrette linjer gjennom nullpunktene til den første- og andrederiverte.

6. Gjør det samme med de andre funksjonene. Lagre funksjonene i hver sin GeoGebrafil.

Spillbrett med funksjoner

	3.gradsfunksjonen	den førstederiverte	den andrederiverte
x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

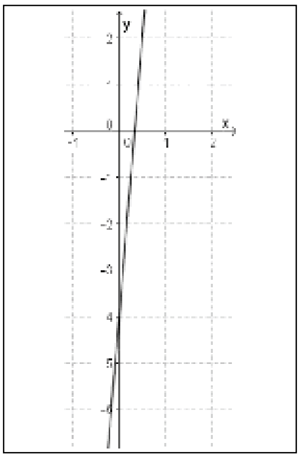
x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

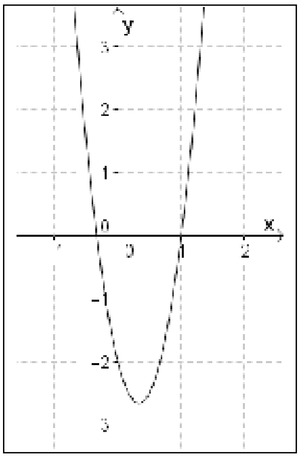
x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

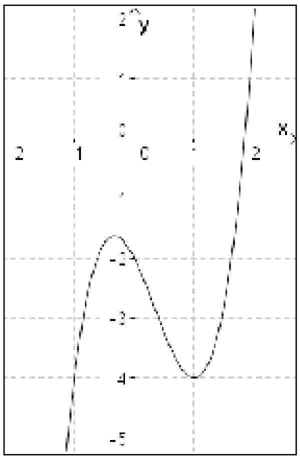
x-verdi til nullpunkt			
x-verdi til topp-/bunnpunkt			
x-verdi til vendepunkt			

Sammenhenger mellom funksjon, førstederivert og andrederivert:

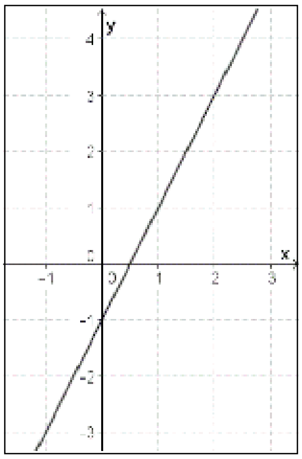
$$j(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2$$

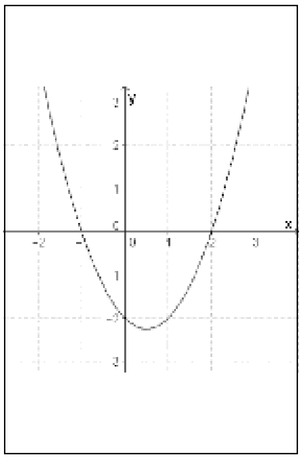


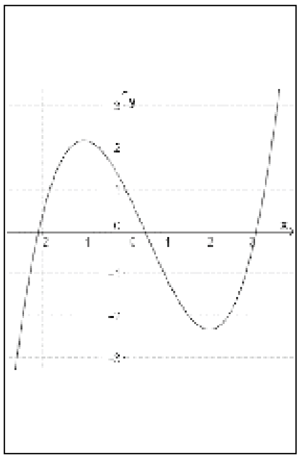




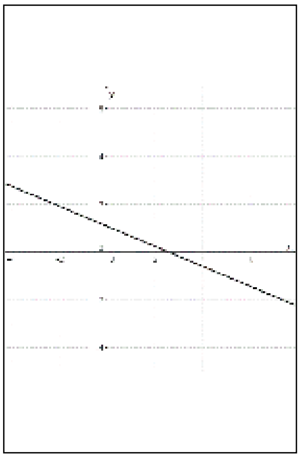
$$i(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

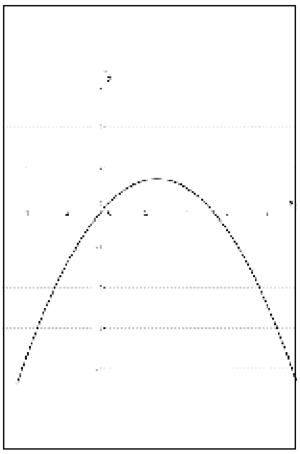


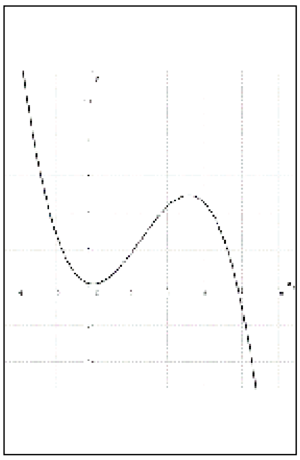




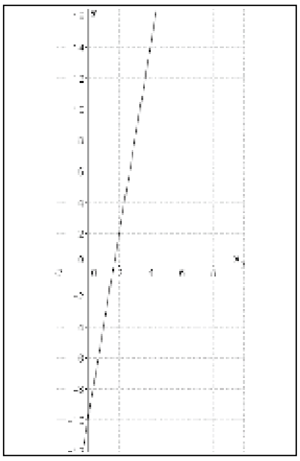
$$h(x) = -0{,}07x^3 + 0{,}54x^2 + 0{,}2$$

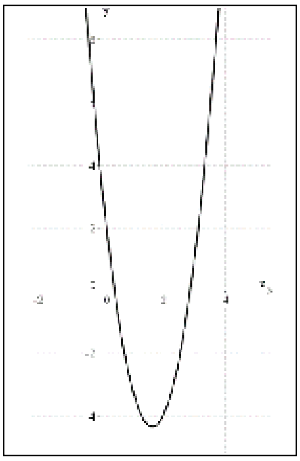


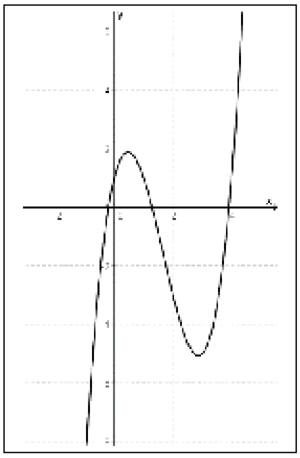




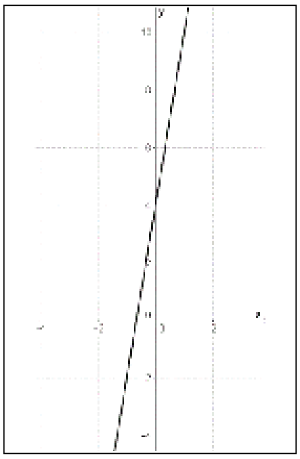
$g(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

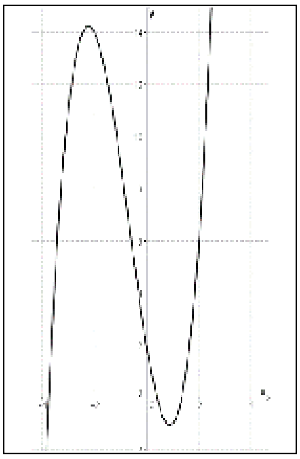


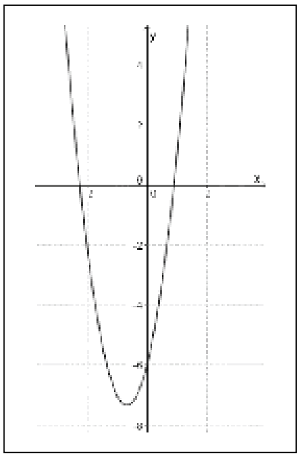




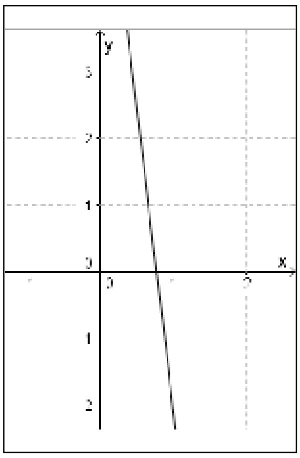
$f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 2$

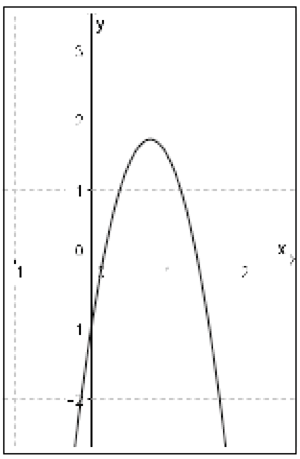


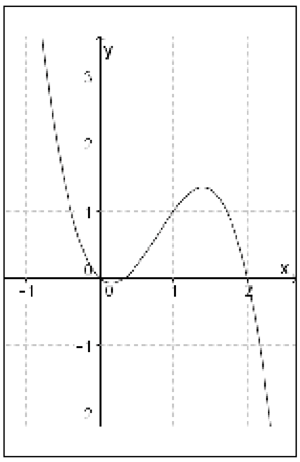




$k(x) = -1,5x^3 + 3,5x^2 - x$

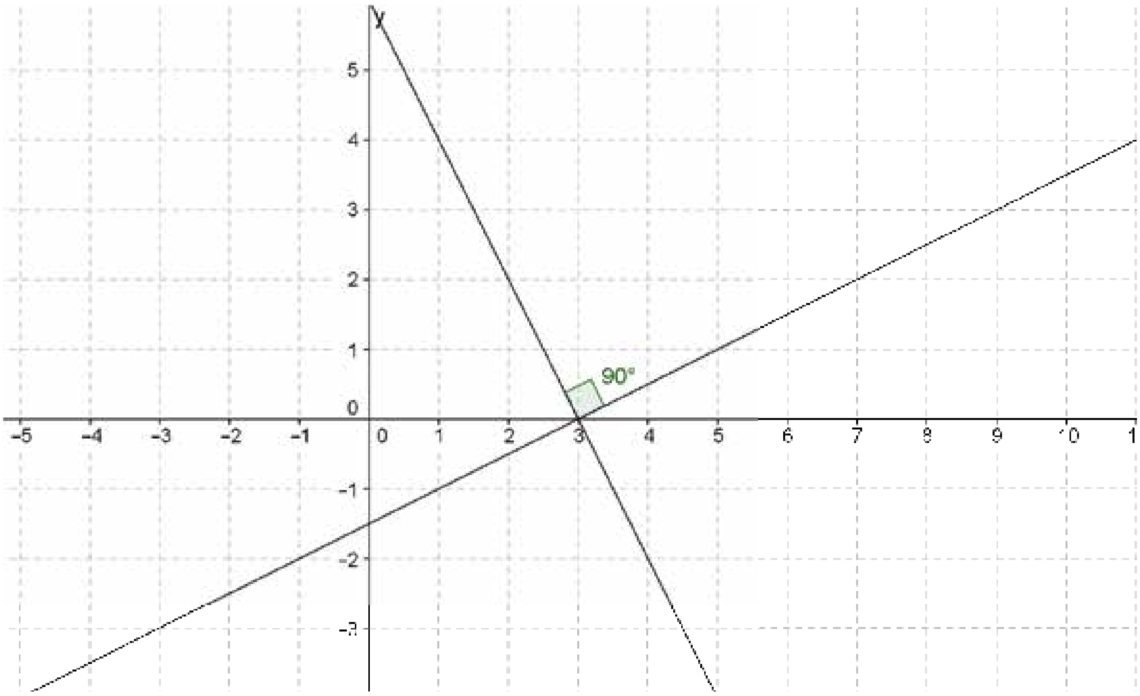






10 *Skalarprodukt – Introduksjon*

Oppgave 1



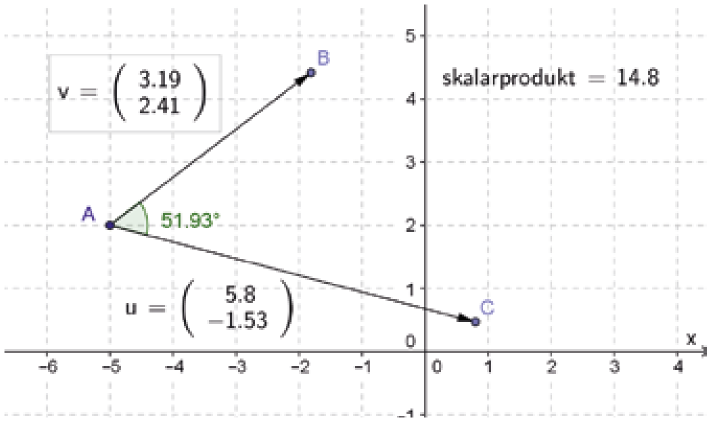
- Tegn 3 vektorer med ulik lengde langs hver av de to linjene.
- Sett opp minst 4 skalarprodukt mellom en vektor fra hver retning og regn ut.

- Skriv med egne ord hva du har funnet ut.

Oppgave 2

- I denne oppgaven skal du finne den største og den minste verdien skalarproduktet av to vektorer kan ha.
- Bruk GeoGebra eller en annen programvare og lag en figur som tilsvarer denne figuren.

OBS: Tallene på tegningen din vil være forskjellige fra tallene på arket



Fremgangsmåte

- Sett av et vilkårlig punkt. (Punktet får automatisk navn *A*)
- Tegn et linjestykke $a = 4$ fra punkt *A*. Da får du et punkt *B*. Gjør linjestykket usynlig og tegn en vektor mellom de to punktene. Dra litt i punkt *B*.
- Tegn et linjestykke $b = 6$ fra punktet *A*. Da får du et punkt *C*. Gjør linjestykket usynlig og tegn en vektor mellom de to punktene. Dra litt i punkt *C*.
- Finn vinkelen mellom vektorene.
- Skriv i skrivefeltet: u*v, endre navn til «Skalarprodukt» og dra teksten inn i grafikkfeltet.

- Hva skjer hvis du flytter på punkt *A*?

- Ved å flytte på punktene *B* og *C* skal du finne sammenhengen mellom skalarprodukt og vinkel. Velg vinkelen mellom 0° og 180°

Skalarprodukt u*v	Vinkel	Kommentar
positiv		
negativ		
0		
størst verdi		
minst verdi		

- Skriv med egne ord hva som du har funnet ut.

Oppgave 3

Formelen for skalarprodukt blir ofte oppgitt på følgende form:

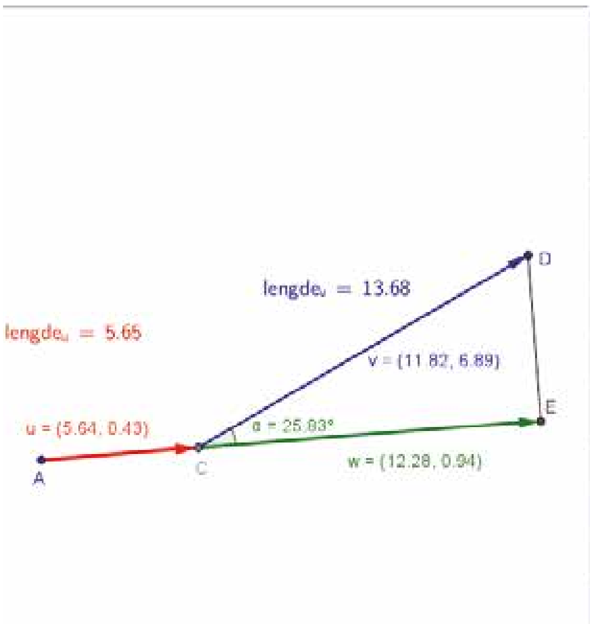
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$$

φ er den minste vinkelen mellom de to vektorene.

- Forklar med ord de enkelte delene av formelen.

- For å forklare sammenhengen mellom denne formelen og det som du har lært om skalarprodukt, skal du åpne en ny fil, bruke et blankt ark (uten akser og rutenett) og tegne en figur som er bygd opp på samme måte som figuren nedenfor. (Punkt *B* bruker programmet til å lage en rett linje). Bruk fremgangsmåten som hjelp. Pass på at navnene på objektene er de samme som på oppgavearket.

OBS: Vektorkoordinatene og vinkelen på deres figur vil være ulik tallene på figuren.



Nr.	Navn	Verktøylinjeikon	Definisjon
1	Punkt A		
2	Punkt B		
3	Linje a		Linje gjennom A, B
4	Punkt C		Punkt på a
5	Vektor u		Vektor[A, C]
6	Punkt D		
7	Vektor v		Vektor[C, D]
8	Linje b		Linje gjennom D, vinkelrett på a
9	Punkt E		Skjæringspunkt mellom b,a
10	Vinkel α		Vinkel mellom E, C, D
11	Linjestykke d		Linjestykke [D, E]
12	Vektor w		Vektor[C, E]

Finn skalarproduktet av vektor u og vektor w	
Finn skalarproduktet av vektor u og vektor v	
Finn skalarprodukt av vektor u og v ved å bruke formelen $\vec{u} \bullet \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\varphi$	

- Finn en sammenheng mellom lengden av vektor *v*, lengden av vektor *w* og vinkelen mellom vektorene.

Oppsummering
Skalarprodukt:

1. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\varphi$

φ er den minste vinkelen mellom de to vektorene.

2. [a,b] • [c,d] = ac + bd

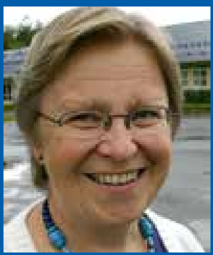
Forklar hvorfor du kan bruke begge formlene for å finne skalarproduktet. Legg vekt på sammenhengen mellom disse to formlene. Når vil du bruke den første formelen, og når vil du bruke den andre formelen?

TOVE KALVØ

Hun har hovedfag i matematikkdidaktikk. Hun har bred erfaring med alle matematikkurs i videregående skole. I ungdomsskolen har hun også undervisningserfaring fra alle trinn og har ledet nettverk for lærere på tvers av skoler. Parallelt med undervisning i skolen har hun vært kursholder for matematikksenteret gjennom flere år. Tove er spesielt interessert i undersøkende matematikk gjennom dialog i klasserommet.

SUSANNE STENGRUNDET

Hun har hovedfag i matematikkdidaktikk og jobber ved Matematikksenteret hvor hun blant annet holder kurs for lærere fra ungdomsskole og videregående skole. Det siste året har hun gitt mange lærere en innføring i GeoGebra. Susanne har mange års erfaring med undervisning fra alle matematikkurs i videregående skole.



ANNE-MARI JENSEN

Hun har hovedfag i matematikk og jobber ved Matematikksenteret. Hun har mange års erfaring fra undervisning fra studieforberedende programområdet i videregående skole. Hun har holdt mange kurs og drevet nettverk for lærere på ungdomstrinnet og videregående skole. Hun fikk Holmboeprisen i 2013. Anne-Mari er spesielt interessert i undersøkende matematikk.

Flere opplegg ligger på våre hjemmesider:
www.matematikksenteret.no

ISBN 978-82-997448-7-4

9 788299 744874 >

ISBN: 978-82-997448-7-4
(PDF) ISBN 978-82-997448-8-1

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen