III.

Et lidet Bidrag til Læren om adskillige transcendente Functioner.

Af

Studiosus N. H. Abel.

1.) Vi ville betragte Integralet:

$$p = \int \frac{dx \cdot q}{x - a},$$

hvor q er en Function af x, der ikke indeholder a.

Differentieres p med Hensyn til a, saa faaer man:

$$\frac{dp}{da} = + \int \frac{dx \cdot q}{(x - a)^2}.$$

Dersom nu q er saaledes beskaffen, at $\int \frac{dx \cdot q}{x + a}$ kan reduceres til Integralet $\int \frac{dx \cdot q}{x - a}$, saa kan man faae en lineair Differentialligning mellem p og a, hvoraf altsaa p kan findes som en Function af a. Paa denne Maade vil man altsaa erholde en Relation mellem flere Integraler, hvoraf nogle ere med Hensyn til x, andre med Hensyn til a.

Da dette giver Anledning til adskillige interessante Theoremer, saa vil jeg stræbe at udvikle disse i et meget udstrakt Tilfælde, i hvilket den omtalte Reduction af Integralet $\int \frac{dx \cdot q}{(x - a)^2}$ er muelig. Den kan nemlig altid gaae for sig, naar man har $q = \varphi x \cdot e^{fx}$, hvor fx er en algebraisk rational Function af x og:

$$\varphi x = k (x + \alpha)^{\beta} (x + \alpha')^{\beta'} (x + \alpha'')^{\beta''} \ldots (x + \alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$

α, α', α'' ꝛc. ere hvilkesomhelst constante Størrelser og β, β', β'' ꝛc. hvilkesomhelst rationale Tal.

Man har altsaa i dette Tilfælde:

$$p = \int \frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x - a}$$

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{(x - a)^2}.$$

2.) Dette sidste Integral kan reduceres paa to Maader.

a) Lad os differentiere Størrelsen

$$\frac{\varphi x \cdot e^{fx}}{x - a},$$

saa faaer man:

$$-\frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{(x-a)^2} + \frac{dx \cdot (\varphi' x \cdot e^{fx} + \varphi x \cdot f' x \cdot e^{fx})}{x - a} = d\left(\frac{\varphi x \cdot e^{fx}}{x - a}\right).$$

Integrerer man her saaledes, at Integralerne forsvinde naar $x = c$, saa faaer man:

$$\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} = \frac{\varphi x \cdot e^{fx}}{a - x} - \frac{\varphi c \cdot e^{fc}}{a - c} + \int \frac{dx \cdot (\varphi' x + \varphi x \cdot f' x) \cdot e^{fx}}{x - a}.$$

Af Værdien for φx faaer man ved at differentiere:

$$\varphi' x = \left(\frac{\beta}{x+\alpha} + \frac{\beta'}{x+\alpha'} + \frac{\beta''}{x+\alpha''} + . + \frac{\beta^{(n)}}{x+\alpha^{(n)}}\right) \cdot \varphi x = \Sigma\left(\frac{\beta^{(p)}}{x+\alpha^{(p)}}\right) \cdot \varphi x,$$

hvor Summationstegnet Σ udstrækker sig til Værdierne $p = 0, 1, 2, 3 \ldots n$.

Deraf faaes:

$$\frac{\varphi' x}{x - a} = \Sigma\left(\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(x-a)}\right) \cdot \varphi x.$$

Men som bekjendt er

$$\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(x-a)} = -\frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(a+\alpha^{(p)})} + \frac{\beta^{(p)}}{(a+\alpha^{(p)})(x-a)};$$

$$\text{altsaa } \frac{\varphi' x}{x - a} = -\varphi x \cdot \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{(x+\alpha^{(p)})(a+\alpha^{(p)})} + \frac{\varphi x}{x - a} \cdot \Sigma \frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}}.$$

Lad os nu betragte $\frac{f'x}{x-a}$. Da fx er rational, saa har man:

$$fx = \sum(\gamma^{(p)} \cdot x^p) + \sum \frac{\delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}}},$$

hvor Summationstegnet udstrækker sig til alle hele Værdier af p, og hvor $\mu^{(p)}$ er heelt Tal.

Differentieres, saa faaer man:

$$f'x = \sum p\gamma^{(p)} \cdot x^{p-1} - \mu^{(p)} \cdot \sum \frac{\delta^{(p)} \cdot \mu^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}};$$

altsaa $\frac{f'x}{x-a} = \sum p\gamma^{(p)} \cdot \frac{x^{p-1}}{x-a} - \mu^{(p)} \cdot \sum \frac{\delta^{(p)} \cdot \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}$.

Nu er $\frac{x^{p-1}}{x-a} = x^{p-2} + a \cdot x^{p-3} + \ldots + a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} + \ldots + a^{p-2} + \frac{a^{p-1}}{x-a}$;

altsaa $\sum p\gamma^{(p)} \cdot \frac{x^{p-1}}{x-a} = \sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} + \frac{1}{x-a} \cdot \sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p-1}$,

hvor det første Summationstegn i den anden Side af Ligningen har Hensyn baade til p og p'.

For at reducere $\sum \frac{-\delta^{(p)} \cdot \mu^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}$, lad os betragte:

$$\frac{1}{(x-a)(x+c)^m} = \frac{A}{x-a} + \frac{A1}{x+c} + \frac{A2}{(x+c)^2} + \ldots + \frac{Am}{(x+c)^m};$$

Multipliceres med $x-a$, og derpaa sættes $x = a$, saa faaer man:

$$A = \frac{1}{(a+c)^m}.$$

For at finde Ap' multiplicere man med $(x+c)^m$ og differentiere $m-p'$ Gange, saa faaer man:

$$\frac{1}{x-a}=\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A1}{x+c}+\ldots+\frac{Ap'-1}{(x+c)^{p'-1}}\right)(x+c)^m+Ap'\cdot(x+c)^{m-p'}$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-p')}{(x-a)^{m-p'+1}}\cdot(-1)^{m-p'}=(x+c)\cdot R+(m-p')\ldots 2\cdot 1\cdot Ap'.$$

Sættes $x=-c$, saa faaer man:

$$Ap'=-\frac{1}{(a+c)^{m-p'+1}};$$

altsaa $\dfrac{1}{(x-a)(x+c)^m}=\dfrac{1}{(a+c)^m(x-a)}-\sum\dfrac{1}{(a+c)^{m-p'+1}\cdot(x+c)^{p'}}$.

Sættes istedet for c, $\varepsilon^{(p)}$; for m, $\mu^{(p)}+1$, og multipliceres med $\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}$, saa faaer man:

$$\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}=\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}\cdot(x-a)}$$

$$-\sum\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}\cdot(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Heraf faaes:

$$\sum\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(x-a)(x+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}=\frac{1}{x-a}\cdot\sum\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}}$$

$$-\sum\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}\cdot(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}},$$

hvor det sidste Summationstegn har Hensyn baade til p og p'.

Indsættes denne Værdie og den før fundne for $\sum p\gamma^{(p)}\cdot\dfrac{x^{p-1}}{x-a}$ i Udtrykket for $\dfrac{f'x}{x-a}$, saa faaer man:

$$\frac{f'x}{x-a} = \frac{1}{x-a} \cdot \left(\sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p-1} + \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}+1}} \right)$$

$$+ \sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-2} - \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'} \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}.$$

Multipliceres med φx og læggeş Mærke til at Coefficienten af $\frac{1}{x-a}$ er æqval $f'a$, saa faaer man:

$$\frac{\varphi x \cdot f'x}{x-a} = \frac{\varphi x \cdot f'a}{x-a} + \varphi x \cdot \sum p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot x^{p-p'-2}$$

$$- \varphi x \cdot \sum \frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'} \cdot (a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}.$$

Lægges hertil Værdien for $\frac{\varphi' x}{x-a}$, multipliceres siden med $e^{fx} \cdot dx$ og integreres, saa faaer man:

$$\int \frac{dx \cdot (\varphi' x + \varphi x \cdot f'x) \cdot e^{fx}}{x-a} = \left(f'a + \frac{\varphi' a}{\varphi a} \right) \cdot \int \frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a}$$

$$+ \sum (p\gamma^{(p)} \cdot a^{p'} \cdot \int \varphi x \cdot e^{fx} \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx) - \sum \left(\frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx \cdot e^{fx}}{x+\alpha^{(p)}} \right)$$

$$- \sum \left(\frac{\mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}} \right).$$

Indsættes denne Værdie i Udtrykket for $\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} = \frac{dp}{da}$, og sættes istedet for $\int \frac{dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a}$, p; saa faaer man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{da}-\left(f'a+\frac{\varphi' a}{\varphi a}\right)\cdot p = -\frac{e^{fx}\cdot\varphi x}{x-a}+\frac{e^{fc}\cdot\varphi c}{c-a}\\ +\sum(p\gamma^{(p)}\cdot a^{p'}\cdot\int\varphi x\cdot e^{fx}\cdot x^{p-p'-2}\cdot dx)\\ -\sum\left(\frac{\beta^{(p)}}{a+\alpha^{(p)}}\cdot\int\frac{\varphi x\cdot e^{fx}\cdot dx}{x+\alpha^{(p)}}\right)\\ -\sum\left(\frac{\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\cdot\int\frac{\varphi x\cdot e^{fx}\cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}\right).\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

b) Jeg kommer nu til den anden Reductionsmaade; men da denne, naar fx har sin almindelige Værdie, er temmelig indviklet og vidloftig, saa vil jeg blot betragte det Tilfælde, hvor fx er en heel algebraisk Function af x. Man har altsaa $fx = \sum\gamma^{(p)}\cdot x^p$.

Differentieres Udtrykket

$$\frac{\psi x\cdot\varphi x\cdot e^{fx}}{x-a},$$

hvor $\psi x = (x+\alpha)(x+\alpha')\ldots(x+\alpha^{n})$,
saa faaer man:

$$-\frac{\psi x\cdot\varphi x\cdot e^{fx}\cdot dx}{(x-a)^2}+\frac{\left(\psi' x+\psi x\cdot\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x}+f' x\right)\right)\cdot\varphi x\cdot e^{fx}\cdot dx}{x-a}$$
$$= d\left(\frac{\psi x\cdot\varphi x\cdot e^{fx}}{x-a}\right).$$

For at reducere dette Udtryk, saa lad os betragte

$$\frac{Fx}{x-a}=\frac{F+F' x+\frac{F''}{2}\cdot x^2+\frac{F'''}{2\cdot 3}\cdot x^3+\ldots+\frac{F^{m}}{2\cdot 3\ldots m}\cdot x^{m}}{x-a},$$

hvor F, F', F'' rc. betegne de Værdier, som Fx, $F'x$, $F''x$ rc. faae, naar man sætter $x = 0$.

Man har altsaa:

$$\frac{Fx}{x-a} = \sum \frac{F^{(p)}}{1\cdot 2\ldots p}\cdot\frac{x^p}{x-a} = \frac{\sum\frac{F^{(p)}}{1.2\ldots p}\cdot a^p}{x-a} + \sum\frac{F^{(p)}}{1\cdot 2\ldots p}\cdot a^{p'}\cdot x^{p-p'-1}$$

og naar man lægger Mærke til at $\sum\frac{F^{(p)}}{1\cdot 2\ldots p}\cdot a^p = Fa$

$$\frac{Fx}{x-a} = \frac{Fa}{x-a} + \sum\frac{F^{(p+p'+1)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+1)}\cdot a^{p'}\cdot x^p$$

naar man istedet for p sætter $p+p'+1$.

Differentieres denne Formel med Hensyn til a, saa faaer man:

$$\frac{Fx}{(x-a)^2} = \frac{Fa}{(x-a)^2} + \frac{F'a}{x-a} + \sum\frac{p'F^{(p+p'+1)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+1)}\cdot a^{p'-1}\cdot x^p.$$

Sættes i denne Formel $Fx = \psi x$, saa faaer man:

$$\frac{\psi x}{(x-a)^2} = \frac{\psi a}{(x-a)^2} + \frac{\psi' a}{x-a} + \sum\frac{(p'+1)\cdot F^{(p+p'+2)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+2)}\cdot a^{p'}\cdot x^p.$$

Sættes i den første Formel istedet for Fx den hele Function:

$\psi' x + \psi x\cdot\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f'x\right)$, saa faaer man:

$$\frac{\psi' x + \psi x\cdot\left(\frac{\varphi' x}{\varphi x} + f'x\right)}{x-a} = \frac{\psi' a + \psi a\cdot\left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f'a\right)}{x-a}$$

$$+\sum\frac{\psi^{(p+p'+2)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+1)}\cdot a^{p'}\cdot x^p$$

$$+\sum\frac{\left(\psi\cdot\frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{1.2.3\ldots(p+p'+1)}\cdot a^{p'}\cdot x^p.$$

Indsættes denne og den for $\frac{\psi x}{(x-a)^2}$ fundne Værdie i Udtrykket for $d\left(\frac{\varphi x \cdot \psi x \cdot e^{fx}}{x-a}\right)$, saa faaer man:

$$d\left(\frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{x-a}\right) = -\psi a \cdot \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2} + \psi a \cdot \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right) \cdot \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{x-a}$$
$$+ \sum \frac{(p+1) \cdot F^{(p+p'+2)} \cdot \varphi x \cdot dx \cdot e^{fx}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+p'+2)} \cdot a^{p'} \cdot x^p$$
$$+ \sum \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+p'+1)} \cdot a^{p'} \cdot x^p \cdot dx \cdot \varphi x \cdot e^{fx}.$$

Integrerer man denne Ligning, dividerer med ψa, og sætter istedet for $\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{x-a}$ p, og for $\int \frac{\varphi x \cdot e^{fx} \cdot dx}{(x-a)^2}$ $\frac{dp}{da}$, saa faaer man:

$$\frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right) \cdot p = \frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{\psi a \cdot (a-x)} - \frac{\psi c \cdot \varphi c \cdot e^{fc}}{\psi a \cdot (a-c)}$$
$$+ \sum \frac{(p+1) \cdot \psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+p'+2)} \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot x^p \cdot dx \cdot \psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{\psi a}$$
$$+ \sum \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+p'+1)} \cdot \frac{a^{p'}}{\psi a} \cdot \int \varphi x \cdot \psi x \cdot e^{fx} \cdot x^p \cdot dx,$$

eller:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp}{da} - \left(\frac{\varphi' a}{\varphi a} + f' a\right) \cdot p = \frac{\psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx}}{\psi a \cdot (a-x)} - \frac{\psi c \cdot \varphi c \cdot e^{fc}}{\psi a \cdot (a-c)} \\ &\qquad + \sum \varphi(p,p') \cdot \frac{a^{p'}}{\psi a} \cdot \int \psi x \cdot \varphi x \cdot e^{fx} \cdot x^p \cdot dx, \\ &\text{hvor } \varphi(p,p') = \frac{(p+1) \cdot \psi^{(p+p'+2)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+p'+2)} + \frac{\left(\psi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + f'\right)^{(p+p'+1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p+p'+1)}. \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

3. De fundne Ligninger (1) og (2) kan meget simpelt integreres ved at multiplicere dem med Factoren $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$. Gjør man dette og integrerer, saa faaer man, ved at lægge Mærke til at $\int\left(dp-\left(\frac{\varphi' a}{\varphi a}+f'a\right)\cdot pda\right)\cdot\frac{e^{-fa}}{\varphi a}=\frac{p\cdot e^{-fa}}{\varphi a}$, følgende to Formler:

$$\frac{p\cdot e^{-fa}}{\varphi a}=e^{fx}\cdot\varphi x\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a-x)}-e^{fc}\cdot\varphi c\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a-c)}$$
$$+\sum p\gamma^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^{p-p'-2}\cdot dx$$
$$-\sum\beta^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a+\alpha^{(p)})}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x+\alpha^{(p)}}$$
$$-\sum\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}+C(x),$$

$$\frac{p\cdot e^{-fa}}{\varphi a}=e^{fx}\cdot\psi x\cdot\varphi x\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a\cdot(a-x)}$$
$$-e^{fc}\cdot\psi c\cdot\varphi c\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a\cdot(a-c)}$$
$$+\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a}\cdot\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^{p}\cdot dx+C(x).$$

Da c er vilkaarlig, saa ville vi antage at $e^{fc}\cdot\varphi c=0$ i den første Formel, og $e^{fc}\cdot\psi c\cdot\varphi c$ i den anden. Antages endvidere at Integralerne med Hensyn til a forsvinde naar $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}=0$, saa seer man let at $C(x)=0$, og man faaer altsaa ved at indsætte Værdien for $p=\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^{-fa}}{\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}-e^{fx}\cdot\varphi x\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{(a-x)\cdot\varphi a}\\&=\Sigma p\gamma^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^{p-p'-2}\cdot dx\\&-\Sigma\beta^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a+\alpha^{(p)})}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x+\alpha^{(p)}}\\&-\Sigma\mu^{(p)}\cdot\delta^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'+2}}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}\end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^{-fa}}{\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}-e^{fx}\cdot\psi x\cdot\varphi x\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a\cdot(a-x)}\\&=\Sigma'\varphi(p,p')\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a}\cdot\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^{p'}\cdot dx\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

Hvis fx er en heel Function i den første af disse Formler, saa har man $\delta^{(p)}=0$, og altsaa

$$\left.\begin{aligned}&\frac{e^{-fa}}{\varphi a}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}-e^{fx}\cdot\varphi x\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{(a-x)\cdot\varphi a}\\&=\Sigma(p+p'+2)\gamma^{(p+p'+2)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\varphi a}\cdot\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^{p}\cdot dx\\&-\Sigma\beta^{(p)}\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot da}{\varphi a\cdot(a+\alpha^{(p)})}\cdot\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x+\alpha^{(p)}}\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

4.) Jeg vil nu vise Anvendelsen af disse almindelige Formler paa flere specielle Tilfælde.

a) Antages $\varphi a = 1$, saa faaer man af Formelen (3):

$$\frac{e^{-fa}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{a-x}$$
$$= \sum p\gamma^{(p)} \cdot \int e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^{p-p'-2} \cdot dx$$
$$- \sum \mu^{(p)} \cdot \delta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a+\varepsilon^{(p)})^{\mu^{(p)}-p'-2}} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{(x+\varepsilon^{(p)})^{p'}}.$$

Er fx en heel Function, saa har man $\delta^{(p)} = 0$, og altsaa bliver Formelen i dette Tilfælde:

$$\left.\begin{aligned} & e^{-fa} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{a-x} \\ & = \sum (p+p'+2)\gamma^{(p)} \cdot \int e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^{p} \cdot dx. \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Udvikles det sidste Led i denne Ligning, saa faaer man:

$$e^{-fa} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{a-x} =$$
$$2\gamma^{(2)} \cdot \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx$$
$$+ 3\gamma^{(3)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx)$$
$$+ 4\gamma^{(4)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a^2 \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx$$
$$+ \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^2 \cdot dx)$$
$$+ 5\gamma^{(5)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a^3 \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot a^2 \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx$$
$$+ \int e^{-fa} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^2 \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^3 \cdot dx)$$
$$+ \\ \vdots$$
$$+ n\gamma^{(n)} \cdot (\int e^{-fa} \cdot a^{n-2} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot dx + \int e^{-fa} \cdot a^{n-3} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x \cdot dx$$
$$+ \ldots + \int e^{-fa} \cdot da \cdot \int e^{fx} \cdot x^{n-2} \cdot dx).$$

Er f. Ex. $fx = x^n$, saa er $\gamma = \gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = \gamma^{(3)} = \ldots = \gamma^{(n+1)} = 0$, $\gamma^{(n)} = 1$; altsaa bliver ovenstaaende Formel i dette Tilfælde:

$$e^{-fa^n} \cdot \int \frac{e^{x^n} \cdot dx}{x-a} - e^{x^n} \cdot \int \frac{e^{-a^n} \cdot da}{a-x} =$$

$$n(\int e^{-a^n} \cdot a^{n-2} \cdot da \cdot \int e^{x^n} \cdot dx + \int e^{-a^n} \cdot a^{n-3} \cdot da \cdot \int e^{x^n} \cdot x \cdot dx + \ldots$$
$$+ \int e^{-a^n} \cdot da \cdot \int e^{x^n} \cdot x^{n-2} \cdot dx);$$

f. Ex. naar $n = 2, 3$:

$$e^{-a^2} \cdot \int \frac{e^{x^2} \cdot dx}{x-a} - e^{x^2} \cdot \int \frac{e^{-a^2} \cdot da}{a-x} = 2 \cdot \int e^{-a^2} \cdot da \cdot \int e^{x^2} \cdot dx,$$

$$e^{-a^3} \cdot \int \frac{e^{x^3} \cdot dx}{x-a} - e^{x^3} \cdot \int \frac{e^{-a^3} \cdot da}{a-x} =$$
$$3 \cdot \int e^{-a^3} \cdot da \cdot \int e^{x^3} \cdot x \cdot dx + 3 \cdot \int e^{-a^3} \cdot a \cdot da \cdot \int e^{x^3} \cdot dx.$$

b) Lad os nu antage at $fx = 0$ i Formelen (3), saa faaer man:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi x \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot \varphi a} - \frac{1}{\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x-a} = \\ &\sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

eller naar det sidste Led udvikles:

$$\varphi x \cdot \int \frac{da}{(a-x) \cdot \varphi a} - \frac{1}{\varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x-a} =$$

$$\beta \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha} + \beta' \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha') \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha'} + \ldots$$
$$+ \beta^{(n)} \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha^{(n)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(n)}},$$

hvor man maa erindre at

$$\varphi x = (x+\alpha)^{\beta} \cdot (x+\alpha')^{\beta'} \cdot (x+\alpha'')^{\beta''} \ldots (x+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}$$
$$\varphi a = (a+\alpha)^{\beta} \cdot (a+\alpha')^{\beta'} \cdot (a+\alpha'')^{\beta''} \ldots (a+\alpha^{(n)})^{\beta^{(n)}}.$$

c) Sættes $fx = 0$ i Formelen (4), saa faaer man:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\cdot dx}{x-a}-\psi x\cdot\varphi x\cdot\int\frac{da}{(a-x)\cdot\psi a\cdot\varphi a}= \\ \sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a}\cdot\int\varphi x\cdot x^{p'}\cdot dx\end{array}\right\}\ldots(8)$$

hvor $\varphi(p,p') = \frac{(p+1)\cdot\psi^{(p+p'+2)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+2)}+\frac{\left(\psi\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+1)}$

$\psi x = (x+\alpha)\cdot(x+\alpha')\cdot(x+\alpha'')\ldots(x+\alpha^{(n)})$.

d) Antages $\beta = \beta' = \beta'' \ldots = \beta^{(n)} = m$, saa har man:

$$\varphi x = (\psi x)^m,\ \varphi x\cdot\psi x = (\psi x)^{m+1}$$

$$\varphi' x = m(\psi x)^{m-1}\cdot\psi' x;\ \frac{\psi x\cdot\varphi' x}{\varphi x} = m\psi' x$$

$$\left(\psi\cdot\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{(p+p'+1)} = m\cdot\psi^{(p+p'+2)};$$

altsaa: $\varphi(p,p') = \frac{((p+1)+m(p+p'+2))\cdot\psi^{(p+p'+2)}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(p+p'+2)}$

$$= (p+1+m(p+p'+2))\cdot k^{(p+p'+2)}$$

naar ψx sættes $= k+k^{(1)}\cdot x+k^{(2)}\cdot x^2+\ldots+k^{(n)}\cdot x^{(n)}$.

Indsættes disse Værdier, saa faaer man:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{(\psi a)^m}\cdot\int\frac{\psi x\cdot dx}{x-a}-(\psi x)^{m+1}\cdot\int\frac{da}{(a-x)\cdot(\psi a)^{m+1}}= \\ \sum k^{(p+p'+2)}\cdot(p+1+m(p+p'+2))\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da}{(\psi a)^{m+1}}\cdot\int(\psi x)^m\cdot x^p\cdot dx\end{array}\right\}\ldots(9)$$

Det Tilfælde, i hvilket $m = -\frac{1}{2}$, er mærkværdigt derved at da faae Integralerne med Hensyn til x og a samme Form; man faaer nemlig da

$(\psi a)^{m+1} = (\psi a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\psi a)}$, $\frac{1}{(\psi a)^m} = \sqrt{(\psi a)}$, og altsaa

$$\sqrt{(\psi a)} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\cdot\sqrt{(\psi x)}} - \sqrt{(\psi x)} \cdot \int \frac{da}{(a-x)\cdot\sqrt{(\psi a)}} =$$
$$\tfrac{1}{2}\sum (p-p')\cdot k^{(p+p'+2)} \cdot \int \frac{a^{p'}\cdot da}{\sqrt{(\psi a)}} \cdot \int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\psi x)}}.$$

Lad os f. Ex. antage $\psi x = 1+\alpha\cdot x^n$, saa er $k^{(n)} = \alpha$, $k^{(p+p'+2)}$ er lig Nul, undtagen naar $p+p'+2 = n$, det er naar $p = n-p'-2$, altsaa

$$\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} - \sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)} \cdot \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}}$$
$$= \tfrac{\alpha}{2}\sum (n-2p'-2) \cdot \int \frac{a^{p'}\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{x^{n-p'-2}\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}}.$$

Udvikles det sidste Led, saa faaer man:

$$\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} - \sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)} \cdot \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}}$$
$$= \tfrac{\alpha}{2}(n-2) \cdot \left(\int \frac{da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{x^{n-2}\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} - \int \frac{a^{n-2}\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} \right)$$
$$+ \tfrac{\alpha}{2}(n-4) \cdot \left(\int \frac{a\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{x^{n-3}\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} - \int \frac{a^{n-3}\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} \right)$$
$$+ \tfrac{\alpha}{2}(n-6) \cdot \left(\int \frac{a^2\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{x^{n-4}\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} - \int \frac{a^{n-4}\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^n)}} \cdot \int \frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^n)}} \right)$$
$$+ \text{rc.}$$

Er f. Ex. $n = 3$, saa faaer man:

$$\sqrt{(1+\alpha\cdot a^3)}\cdot\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1+\alpha\cdot x^3)}}$$
$$-\sqrt{(1+\alpha\cdot x^3)}\cdot\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1+\alpha\cdot a^3)}}$$
$$=\tfrac{\alpha}{2}\left(\int\frac{da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^3)}}\cdot\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^3)}}\right.$$
$$\left.-\int\frac{a\cdot da}{\sqrt{(1+\alpha\cdot a^3)}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(1+\alpha\cdot x^3)}}\right).$$

Som et andet Exempel vil jeg tage $\psi x = (1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2)$; Man har altsaa $k = 1$, $k^{(1)} = 0 = k^{(3)}$, $k^{(2)} = -(1+\alpha^2)$, $k^{(4)} = \alpha$. Formelen bliver altsaa, naar man forandrer a til $-a$:

$$\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}\cdot\int\frac{dx}{(x+a)\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}}$$
$$-\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}\cdot\int\frac{da}{(a+x)\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}}$$
$$=\alpha\cdot\int\frac{da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}}\cdot\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}}$$
$$-\alpha\cdot\int\frac{a^2\cdot da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}}.$$

Sættes $x = \sin\varphi$, og $a = \sin\psi$, saa er:

$$\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))} = \cos\varphi\cdot\sqrt{(1-\alpha\cdot\sin^2\varphi)},$$
$$\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))} = \cos\psi\cdot\sqrt{(1-\alpha\cdot\sin^2\psi)},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha\cdot\sin^2\varphi)}},$$
$$\frac{da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\cdot\sin^2\psi)}},$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha \cdot x^2))}} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}},$$

$$\frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha \cdot a^2))}} = \frac{\sin^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}}.$$

Indsættes disse Værdier, saa faaer man:

$$\cos\psi \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)} \cdot \int \frac{d\varphi}{(\sin\varphi + \sin\psi) \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}}$$

$$- \cos\varphi \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)} \cdot \int \frac{d\psi}{(\sin\psi + \sin\varphi) \cdot \sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}}$$

$$= \alpha \cdot \int \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}} \cdot \int \frac{\sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}}$$

$$- \alpha \cdot \int \frac{\sin^2 \psi \cdot d\psi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \psi)}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\alpha \cdot \sin^2 \varphi)}}.$$

Denne Formel svarer til den, som Legendre har fundet i sit Værk: Exercices de calcul intégral, Tom. I. pag. 136, hvoraf den kan udledes.

e) Sættes i Formelen (5) $fx = x$, saa faaer man:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{-a}}{\varphi a} \cdot \displaystyle\int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a} - e^x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \varphi a} = \\ = -\Sigma \beta^{(p)} \cdot \displaystyle\int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot x\varphi \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} \end{array}\right\} \ldots (10)$$

og naar man udvikler det sidste Led:

$$e^x \cdot \varphi x \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \varphi a} - \frac{e^{-a}}{\varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x-a}$$

$$= \beta \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \varphi x}{x+\alpha} + \beta' \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha') \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha'}$$

$$+ \beta'' \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha'') \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha''} + \ldots \beta^{(n)} \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a+\alpha^{(n)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^x \cdot \varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(n)}}$$

F. Ex. naar $\varphi x = \sqrt{(x^2-1)}$, saa er $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\alpha' = -1$;

altsaa
$$e^x \cdot \sqrt{(x^2-1)} \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x)\cdot\sqrt{(a^2-1)}}$$
$$-\frac{e^{-a}}{\sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x-a}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-a}\cdot da}{(a+1)\cdot\sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x+1}$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{e^{-a}\cdot da}{(a-1)\cdot\sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x-1}\,..$$

f) Antages i Formelen (4) $\beta = \beta' = \beta'' = \ldots \beta^{(n)} = m$, saa faaes $\varphi x = (\psi x)^m$, $\varphi x \cdot \psi x = (\psi x)^{m+1}$; altsaa:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m} \cdot \int \frac{e^{fx}\cdot(\psi x)^m \cdot dx}{x-a} - e^{fx}\cdot(\psi x)^{m+1} \cdot \int \frac{e^{-fa}\cdot da}{(a-x)(\psi a)^{m+1}} \\ &= \sum \varphi(p,p') \cdot \int \frac{e^{-fa}\cdot a^{p'} \cdot da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int e^{fx}\cdot(\varphi x)^m \cdot x^p \cdot dx, \end{aligned}\right\} \,..(11)$$

hvor
$$\varphi(p,p') = \frac{f^{(p+p'+2)}}{1\cdot2\cdot3\ldots(p+p'+2)}$$
$$+ (p+1+m(p+p'+2)) \cdot \frac{\psi^{(p+p'+2)}}{1\cdot2\cdot3\ldots(p+p'+2)},$$

eller: $\varphi(p,p') = (p+p'+2)\cdot\gamma^{(p+p'+2)} + (p+1+m(p+p'+2))\cdot k^{(p+p'+2)}$,

naar $fx = \gamma + \gamma^{(1)}\cdot x + \gamma^{(2)}\cdot x^2 + \ldots \gamma^{(n')}\cdot x^{n'}$,

og $\psi x = k + k^{(1)}\cdot x + k^{(2)}\cdot x^2 + \ldots k^{(n)}\cdot x^n$;

Man har altsaa:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{e^{-fa}}{(\psi a)^m} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot (\psi x)^m \cdot dx}{x-a} - e^{fx} \cdot (\psi x)^{m+1} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x) \cdot (\psi a)^{m+1}} \\ = \sum((p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} + p+1+m(p+p'+2) \cdot k^{(p+p'+2)}) \times \\ \qquad \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{(\psi a)^{m+1}} \cdot \int e^{fx} \cdot (\psi x)^m \cdot x^p \cdot dx; \end{array}\right\} \ldots (12)$$

Antages $m = -\frac{1}{2}$, saa faaer man:

$$e^{-fa} \cdot \sqrt{(\psi a)} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx}{(x-a) \cdot \sqrt{(\psi x)}} - e^{fx} \cdot \sqrt{(\psi x)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a-x) \cdot \sqrt{(\psi a)}}$$

$$= \sum((p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} + \tfrac{1}{2}(p-p') \cdot k^{(p+p'+2)}) \times$$

$$\int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\sqrt{(\psi a)}} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot x^p \cdot dx}{\sqrt{(\psi x)}};$$

Er f. Ex. $fx = x$, og $\psi x = 1 - x^2$, saa faaer man:

$$\gamma^{(p+p'+2)} = 0, \quad \tfrac{1}{2}(p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} = 0;$$

altsaa: $$e^{-a} \cdot \sqrt{(1-a^2)} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx}{(x-a) \cdot \sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= e^x \cdot \sqrt{(1-x^2)} \cdot \int \frac{e^{-a} \cdot da}{(a-x) \cdot \sqrt{(1-a^2)}}.$$

Sættes istedet for a —a, saa faaer man:

$$e^a \cdot \sqrt{(1-a^2)} \cdot \int \frac{e^x \cdot dx}{(x+a) \cdot \sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= e^x \cdot \sqrt{(1-x^2)} \cdot \int \frac{e^a \cdot da}{(a+x) \cdot \sqrt{(1-a^2)}}.$$

Sættes $x = \sin\varphi$, og $a = \sin\psi$, saa faaer man:

$$\cos\psi \cdot e^{\sin\psi} \cdot \int \frac{e^{\sin\varphi} \cdot d\varphi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \cos\varphi \cdot e^{\sin\varphi} \cdot \int \frac{e^{\sin\psi} \cdot d\psi}{\sin\psi + \sin\varphi},$$

hvor Integralerne tages fra $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$.

Jeg gaaer nu over til at vise en anden Anvendelse af de almindelige Ligninger. Hidindtil have vi betragtet x og a uden Hensyn til bestemte Værdier som de kunne have, hvorved de almindelige Formler vilde blive simplere; vi ville nu søge saadanne Værdier. Lad os først betragte Ligningen (3). Den første Side af denne Ligning indeholder to Integraler, men da enhver af dem er multipliceret med en Størrelse, den ene afhængig af x og den anden af a, saa maa man kunne give disse Størrelser saadan en Værdie, at enten eet eller begge Integraler forsvinde, forudsat at hver af Ligningerne $\frac{e^{-fa}}{\varphi a} = 0$, $e^{fx} \cdot \varphi x = 0$ har idetmindste to forskjellige Rødder; thi have vi antaget, at Integralerne ere tagne fra saadanne Værdier for x og a, der gjøre disse Ligninger $= 0$.

Lad os først antage $e^{fx} \cdot \varphi x = 0$, saa faaer man efter at have multipliceret med $e^{fa} \cdot \varphi a$:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x - a} &= e^{fa} \cdot \varphi a \cdot \sum (p + p' + 2) \cdot \gamma^{(p + p' + 2)} \\ &\quad \times \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^p \cdot dx \\ &\quad - e^{fa} \cdot \varphi a \cdot \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a + \alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot \varphi x \cdot dx}{x + \alpha^{(p)}} \end{aligned}\right\} \ldots (13)$$

$$(x = x', \quad x = x'', \quad a = a').$$

Størrelserne mellem Parenthesen angiver mellem hvilke Grændser Integralerne skal tages, og de maae være saaledes, at

$$e^{fx'}\cdot\varphi x' = 0,\quad e^{fx''}\cdot\varphi x'' = 0,\quad \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'} = 0.$$

Af den foregaaende Formel følger følgende Theorem:

„Værdien af Integralet: $\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}$ mellem to saadanne Grændser, „der gjøre $e^{fx}\cdot\varphi x = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af følgende „Formler;

$$\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^p\cdot dx,\ \int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\varphi a},\ \int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x+\alpha^{(p)}},\ \int\frac{e^{-fa}\cdot da}{(a+\alpha^{(p)})\cdot\varphi a},$$

„hvor Integralerne med Hensyn til x ere tagne mellem de samme Grændser „som det første Integral."

Dette Theorem er mærkværdigt derved, at den samme Reduction er absolut umuelig, naar Integralet $\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}$ tages mellem hvilkesomhelst Værdier af x.

Antages $fx = 0$, saa faaer man:

$$\int\frac{\varphi x\cdot dx}{x-a} = -\varphi a\cdot\sum\beta^{(p)}\cdot\int\frac{da}{(a+\alpha^{(p)})\cdot\varphi a}\cdot\int\frac{\varphi x\cdot dx}{x+\alpha^{(p)}}\ \ldots(14)$$

$$(x = x',\ x = x'',\ a = a').$$

Antages derimod $\varphi x = 1$, saa faaer man:

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{e^{fx}\cdot dx}{x-a} = {} & e^{fa}\cdot\sum(p+p'+2)\cdot\gamma^{(p+p'+2)}\\ & \times\int e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da\times\int e^{fx}\cdot x^p\cdot dx.\end{aligned}\right\}\ldots(15)$$

$$(x = x',\ x = x'',\ a = a').$$

Lad os nu tillige antage at man giver a saadan en Værdie, at $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}$ bliver $= 0$, og lad a″ være denne Værdie, saa faaer man:

$$\left.\begin{array}{l} \sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^{fx} \cdot dx \cdot \varphi x}{x+\alpha^{(p)}} \\ = \sum (p+p'+2) \cdot \gamma^{(p+p'+2)} \cdot \int \frac{e^{-fa} \cdot a^{p'} \cdot da}{\varphi a} \cdot \int e^{fx} \cdot \varphi x \cdot x^{p} \cdot dx \end{array}\right\} \ldots (16)$$

$$(x = x', \ x = x''; \ a = a', \ a = a'').$$

Sættes $fx = kx$, saa har man:

$$\sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{e^{-ka} \cdot da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{e^{kx} \cdot dx \cdot \varphi x}{x+\alpha^{(p)}} = 0. \ \ldots \ldots (17)$$

$$(x = x', \ x = x''; \ a = a', \ a = a'').$$

Sættes $k = 0$, saa har man ogsaa:

$$\sum \beta^{(p)} \cdot \int \frac{da}{(a+\alpha^{(p)}) \cdot \varphi a} \cdot \int \frac{\varphi x \cdot dx}{x+\alpha^{(p)}} = 0. \ \ldots \ldots \ldots (18)$$

$$(x = x', \ x = x''; \ a = a', \ a = a'').$$

Lad os f. Ex. antage $\varphi x = \sqrt{(x^2-1)} = \sqrt{((x-1)(x+1))}$, saa har man:

$$\beta = \beta' = \tfrac{1}{2}, \ x' = 1, \ x'' = -1, \ a' = \infty, \ a'' = -\infty,$$
$$\alpha = -1, \ \alpha' = 1;$$

altsaa: $$\int \frac{da}{(a-1) \cdot \sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x-1}$$
$$+ \int \frac{da}{(a+1) \cdot \sqrt{(a^2-1)}} \cdot \int \frac{dx \cdot \sqrt{(x^2-1)}}{x+1} = 0;$$
$$(x' = 1, \ x'' = -1), \ (a' = +\infty, \ a'' = -\infty);$$

hvilket ogsaa er rigtigt, da:

$$\int \frac{da}{(a-1)\cdot\sqrt{(a^2-1)}} = -\sqrt{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)} = 0; \quad (a = \infty,\ a = -\infty)$$

$$\int \frac{da}{(a+1)\cdot\sqrt{(a^2-1)}} = -\sqrt{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)} = 0. \quad (a = \infty,\ a = -\infty).$$

Sættes i (16) $\varphi x = 1$, saa faaer man:

$$\sum (p+p'+2)\cdot\gamma^{(p+p'+2)}\cdot\int e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da\cdot\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^p\cdot dx = 0 \quad ..(19)$$
$$(x = x',\ x = x'')\quad (a = a',\ a = a'').$$

Lad os nu betragte Formelen (4). Sættes $e^{fx}\cdot\psi x\cdot\varphi x = 0$, saa faaer man efter at have multipliceret med $e^{fa}\cdot\varphi a$:

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a} = e^{fa}\cdot\varphi a\cdot\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a} \\ \times\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^p\cdot dx\end{aligned}\right\}\ ..(20)$$
$$(x = x',\ x = x'';\ a = a')$$

hvor $\psi x'\cdot e^{fx'}\cdot\varphi x' = \psi x''\cdot e^{fx''}\cdot\varphi x'' = 0,\ \frac{e^{-fa'}}{\varphi a'} = 0.$

Denne Formel lader sig med Ord udtrykke i følgende Theorem:

„Værdien af Intergralet $\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}$ imellem to saadanne Værdier „af x, der gjør $e^{fx}\cdot\varphi x = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af For„merne: $\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a}$ og $\int e^{fx}\cdot\varphi x\cdot x^p\cdot dx$."

Derimod er denne Reduction af $\int\frac{e^{fx}\cdot\varphi x\cdot dx}{x-a}$ umuelig for en hvilkensomhelst Værdie af x.

Antages $\beta = \beta' = \beta'' = \ldots\beta^{(n)} = m$, saa faaer man følgende Formel:

$$\int\frac{e^{fx}\cdot(\varphi x)^m\cdot dx}{x-a}=e^{fa}\cdot(\varphi a)^m\cdot\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{e^{-fa}\cdot a^{p'}\cdot da}{(\varphi a)^{m+1}}\left.\begin{matrix}\\ \times\int e^{fx}\cdot(\varphi x)^m\cdot x^p\cdot dx\end{matrix}\right\}\cdot\cdot(21)$$

$$(x=x',\ x=x'',\ a=a')$$

hvor $\varphi x=(x+\alpha)(x+\alpha')(x+\alpha'')\ldots(x+\alpha^{(n)})$.

Antages endvidere $x=0$, saa faaer man:

$$\int\frac{(\varphi x)^m\cdot dx}{x-a}=(\varphi a)^m\cdot\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da}{(\varphi a)^{m+1}}\cdot\int(\varphi x)^m\cdot x^p\cdot dx\ldots(22)$$

$$(x=x',\ x=x'',\ a=a').$$

Man har altsaa følgende Theorem, der kun er specielt Tilfælde af det foregaaende:

„Værdien af Integralet $\int\frac{(\varphi x)^m\cdot dx}{x-a}$ mellem to saadanne Værdier af x, „der gjør $(\varphi x)^{m+1}=0$, lader sig udtrykke ved Integraler af Formerne: „$\int\frac{a^{p'}\cdot da}{(\varphi a)^{m+1}}$ og $\int(\varphi x)^m\cdot x^p\cdot dx$, naar φx er en heel algebraisk „Function af x."

Sættes $m=-\frac{1}{2}$, saa faaer man:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\cdot\sqrt{(\varphi x)}}=\frac{1}{2\sqrt{(\varphi a)}}\cdot\left.\begin{matrix}\sum(p-p')\cdot k^{(p+p'+2)}\\ \times\int\frac{a^{p'}\cdot da}{\sqrt{(\varphi a)}}\cdot\int\frac{x^p\cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}}\end{matrix}\right\}\cdot\cdot(23)$$

$$(x=x',\ x=x'',\ a=a');$$

hvoraf følger følgende Theorem:

„Værdien af Integralet $\int \frac{dx}{(x-a)\cdot\sqrt{(\varphi x)}}$ mellem to saadanne Grændser,
„der gjør $\varphi x = 0$, lader sig udtrykke ved Integraler af Formen $\int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}}$."

Lad os f. Ex. antage $\varphi x = (1-x^2)\cdot(1-\alpha\cdot x^2)$, saa er $x' = 1$, $x' = -1$, $x' = +\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $x' = -\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, $a' = 1, -1, \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, -\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$;

altsaa $\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}\cdot\int\frac{dx}{(x+a)\cdot\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}}$

$$= \alpha\cdot\int\frac{da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}}\cdot\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}}$$
$$- \alpha\cdot\int\frac{a^2\cdot da}{\sqrt{((1-a^2)(1-\alpha\cdot a^2))}}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\alpha\cdot x^2))}};$$

$(x = 1,\ x = -1,\quad a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}})$
$(x = 1,\ x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}},\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}})$
$(x = -1,\ x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}},\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}})$
$(x = \sqrt{\tfrac{1}{\alpha}},\ x = -\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}},\ a = \pm 1,\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{\alpha}})$.

Antages i Formelen (22) $\varphi x = 1 - x^{2n}$, saa har man:

$$\int\frac{dx\cdot(1-x^{2n})^m}{x-a} = (1-a^{2n})^m\cdot\sum\varphi(p,p')$$
$$\times\int dx\cdot x^p\cdot(1-x^{2n})^m\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da}{(1-a^{2n})^{m+1}};$$
$$(x = 1,\ x = -1,\ a = +7);$$

hvor $m+1$ maa være mindre end 1, det er $m < 0$,

$$\varphi(p,p') = (p+1+m(p+p'+2))\cdot k^{(p+p'+2)};$$

Da $k^{(p+p'+2)}$ er $= 0$, undtagen naar $p+p'+2 = 2n$, saa har man $\varphi(p,p') = -(p+1+2nm)$, da nemlig $k^{(2n)} = -1$. Integralet $\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m$ kan udtrykkes ved den bekjendte Function Γ. Man har nemlig:

$$\begin{aligned}&\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=1,\ x=-1)\\ &= -\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=0,\ x=1)\\ &\quad +\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=0,\ x=-1);\end{aligned}$$

men $\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=0,\ x=-1)$

$$= (-1)^{p+1} \cdot \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n}) \qquad (x=0,\ x=1),$$

hvilket indsees naar man istedet for x sætter $-x$.

Man har altsaa:

$$\begin{aligned}&\int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=1,\ x=-1)\\ &= ((-1)^{p+1}-1) \cdot \int dx \cdot x^p \cdot (1-x^{2n})^m \cdot dx \qquad (x=0,\ x=1)\end{aligned}$$

altsaa, eftersom p er lige eller ulige:

$$\begin{aligned}&\int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=1,\ x=-1)\\ &\quad = -2 \cdot \int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m \qquad (x=0,\ x=1),\end{aligned}$$

$$\int dx \cdot x^{2p+1} \cdot (1-x^{2n})^m = 0 \qquad (x=1,\ x=-1).$$

Af Legendre Exercices de calcul intégral, Tome I. pag. 279, faaer man let:

$$\int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m = \frac{\Gamma(m+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{2n \cdot \Gamma\left(m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)} \qquad (x=0,\ x=1);$$

altſaa $\int dx \cdot x^{2p} \cdot (1-x^{2n})^m \quad (x=1,\ x=-1)$

$$= -\frac{\Gamma(m+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{n \cdot \Gamma\left(m+1+\frac{1+2p}{2n}\right)}.$$

Indſættes denne Værdie, og man ſiden gjør $m = -m$, ſaa faaer man:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(1-x^{2n})^m} &= \frac{\Gamma(-m+1)}{n} \cdot \sum (2p+1-2mn) \\ &\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(-m+1+\frac{1+2p}{n}\right)} \cdot \int \frac{a^{2n-2p-2} \cdot da}{(1-a^{2n})^{1-m}} \end{aligned}\right\} \ldots (24)$$

$$(x=1,\ x=-1,\ a=1).$$

Sættes $m = \frac{1}{2}$, ſaa har man:

$$\int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{(1-x^{2n})}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{n} \cdot \sum (2p+1-n)$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1+2p}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1+2p}{2n}\right)} \cdot \int \frac{a^{2n-2p-2} \cdot da}{\sqrt{(1-a^{2n})}}$$

$$(x=1,\ x=-1,\ a=1,\ a=a).$$

F. Ex. naar $n=3$, ſaa har man:

$$\int \frac{dx}{(x-a) \cdot \sqrt{(1-x^6)}} \quad (x=1,\ x=-1)$$

$$\left.\begin{aligned} &= -\tfrac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \cdot \int \frac{a^4 \cdot da}{\sqrt{(1-a^6)}} \\ &\quad + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})} \cdot \int \frac{a \cdot da}{\sqrt{(1-a^6)}} \end{aligned}\right\} (\text{fra } a=1).$$

Nu er $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; indsættes denne Værdie, saa faaer man:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\cdot\sqrt{(1-x^6)}} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\cdot\int\frac{a^4\cdot da}{\sqrt{(1-a^6)}}$$
$$+\tfrac{2}{3}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{4}{3})}\cdot\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^6)}}$$
$$(x=1,\ x=-1,\ a=1).$$

I det Foregaaende have vi antaget $\psi x\cdot\varphi x\cdot e^{fx}=0$; lad os nu tillige antage $\frac{e^{-fa}}{\varphi a}=0$, og lad a'' være en Værdie af a som fyldestgjør denne Betingelse. Ligningen (5) bliver i dette Tilfælde:

$$\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da\cdot e^{-fa}}{\psi a\cdot\varphi a}\cdot\int\varphi x\cdot e^{fx}\cdot x^p\cdot dx = 0 \quad \ldots\ldots (25)$$
$$(x=x',\ x=x'',\ a=a',\ a=a'').$$

Er $fx=0$, saa har man:

$$\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da}{\psi a\cdot\varphi a}\cdot\int\varphi x\cdot x^p\cdot dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$
$$(x=x',\ x=x'',\ a=a',\ a=a'').$$

Lad os antage at β, β', β'' ꝛc. ere negative men mindre end 1, saa bliver $\psi x\cdot\varphi x=0$, og $\frac{1}{\varphi a}=0$, naar $a=-\alpha^{(q)}$ og $x=-\alpha^{(p)}$. Man har altsaa i dette Tilfælde:

$$\sum\varphi(p,p')\cdot\int\frac{a^{p'}\cdot da}{\psi a}\cdot\int\frac{x^p\cdot dx}{\varphi x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$
$$(x=-\alpha^{(p)},\ x=-\alpha^{(p')},\ a=-\alpha^{(q)},\ a=-\alpha^{(q')});$$

hvor $\varphi x = (x+\alpha)^{\beta}\cdot(x+\alpha')^{\beta'}\cdot(x+\alpha'')^{\beta''}\ldots$

$\psi a = (a+\alpha)^{1-\beta}\cdot(a+\alpha')^{1-\beta'}\cdot(a+\alpha'')^{1-\beta''}\ldots$

og hvor $\beta^{(p)}$ er mindre end 1.

Sættes $\beta = \beta' = \beta'' = \ldots = \frac{1}{2}$, saa faaer man:

$$\sum (p-p') \cdot k^{(p+p'+2)} \cdot \int \frac{a^{p'} \cdot da}{\sqrt{(\varphi a)}} \cdot \int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}} = 0 \quad \ldots \quad (28)$$

$$(x = -\alpha^{(p)},\ x = -\alpha^{(p')},\ a = -\alpha^{(q)},\ a = -\alpha^{(q')}).$$

I denne Formel er

$$\varphi x = (x+\alpha) \cdot (x+\alpha') \cdot (x+\alpha'') \ldots = k + k^{(1)} \cdot x + k^{(2)} \cdot x^2 + \text{ꝛc.}$$

Antager man f. Ex. $\varphi x = (1-x) \cdot (1+x) \cdot (1-cx) \cdot (1+cx)$,

saa er $\alpha = 1,\ \alpha' = -1,\ \alpha'' = \frac{1}{c},\ \alpha''' = -\frac{1}{c}$,

og $$\int \frac{da}{\sqrt{((1-a^2) \cdot (1-c^2 \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}} =$$

$$\int \frac{a^2 \cdot da}{\sqrt{((1-a^2) \cdot (1-c^2 \cdot a^2))}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}}$$

$$(x = 1,\ x = -1;\ a = 1,\ a = -1) \quad (1)$$
$$(x = 1,\ x = -1;\ a = 1,\ a = \tfrac{1}{c}) \quad (2)$$
$$(x = 1,\ x = -1;\ a = 1,\ a = -\tfrac{1}{c}) \quad (3)$$
$$(x = 1,\ x = -1;\ a = \tfrac{1}{c},\ a = -\tfrac{1}{c}) \quad (4)$$
$$(x = 1,\ x = \tfrac{1}{c};\ a = 1,\ a = \tfrac{1}{c}) \quad (5)$$
$$(x = 1,\ x = \tfrac{1}{c};\ a = 1,\ a = -\tfrac{1}{c}) \quad (6)$$
$$(x = 1,\ x = \tfrac{1}{c};\ a = \tfrac{1}{c},\ a = -\tfrac{1}{c}) \quad (7)$$
$$(x = \tfrac{1}{c},\ x = -\tfrac{1}{c};\ a = \tfrac{1}{c},\ a = -\tfrac{1}{c}) \quad (8)$$

Lad os betegne $\int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}}$ (fra $x = 0$) med $F(x)$

og $\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2) \cdot (1-c^2 \cdot x^2))}}$ fra ($x = 0$) med $E(x)$;

Heraf følger at

$$\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{((1-x^2)\cdot(1-c^2\cdot x^2))}} (x=\alpha,\ x=\alpha') = E(\alpha') - E(\alpha)$$

$$\text{og} \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)\cdot(1-c^2\cdot x^2))}} (x=\alpha,\ x=\alpha') = F(\alpha') - F(\alpha).$$

Gjøres denne Substitution i den foregaaende Formel, saa vil man finde følgende Formel:

$$F(1)\cdot E(\tfrac{1}{c}) = E(1)\cdot F(\tfrac{1}{c}).$$

Man faaer ikke flere end denne ene, hvilken af de 8 Grændser man end bruger, naar undtages dem som ere identiske, nemlig den 1ste, 5te og 8de.

Lad os i Almindelighed betegne $\int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}}$ fra en hvilkensomhelst Grændse med $F(p,x)$, saa er

$$\int \frac{x^p \cdot dx}{\sqrt{(\varphi x)}} (x=\alpha,\ x=\alpha') = F(p,\alpha') - F(p,\alpha).$$

Gjøres denne Substitution i Formelen ( ), saa faaer man den følgende:

$$\left.\begin{aligned}
&\textstyle\sum(p-p')\cdot k^{(p+p'+2)}\cdot F(p,\alpha)\cdot F(p',\alpha')\\
+&\textstyle\sum(p-p')\cdot k^{(p+p'+2)}\cdot F(p,\alpha'')\cdot F(p',\alpha''')\\
=&\textstyle\sum(p-p')\cdot k^{(p+p'+2)}\cdot F(p,\alpha)\cdot F(p',\alpha''')\\
+&\textstyle\sum(p-p')\cdot k^{(p+p'+2)}\cdot F(p,\alpha'')\cdot F(p',\alpha')
\end{aligned}\right\}\ \ldots (29)$$

Af denne Formel kan atter igjen udledes mange specielle eftersom man antager at φx er lige eller ulige, men for ikke at blive for vidtløftig vil jeg forbigaae dem.

Det maa lægges Mærke til at α, α', α'', α''' kan betyde hvilkesomhelst Rødder af Ligningen $\varphi x = 0$. Man kan ogsaa antage $\alpha = \alpha'$, $\alpha'' = \alpha'''$.