III.

Forsøg

til

en med mathematisk Nøiagtighed fremsat Theorie

om

parallele Linier og deres Egenskaber,

af

Professor og Magister

Frederik Christian Holberg Arentz,

Rector ved Cathedralskolen i Bergen,

Ridder af Vasa og Dannebrogen.

§ 1.

Geometrien har fra Oldtiden baade havt og fortjent den Lykke, at ansees for den Videnskab, hvori alle de Sætninger, som fremsættes, demonstreres med en uimodsigelig Vished, og Ingen har vovet at nægte dem, uagtet al den større Kundskab og Oplysning, som Verden igjennem saa mange Aarhundrede har opnaaet. Euclides's Værk bliver derfor i Agtelse, saalænge Mathematik studeres af Mennesker. Med andre Videnskaber har det, desværre! ikke gaaet saaledes. En Auctor nedriver ofte, hvad en Foregaaende har opbygget, men ikke saa i de egentlige mathematiske Videnskaber. Vel demonstrerer undertiden Een anderledes end en Anden, men Begge rigtig, og det, som skulde bevises, bliver dog altid det samme. Geometriens Aand og Maade kan derfor ansees som en practisk Logik og en Maalestok, hvorefter fremsatte Sætningers Vished kan ligesom maales og bedømmes, dog med Forskjel af Tingenes Natur, da ikke alle Sandheder modtage samme Slags Demonstrationsmaade. Saaledes kan Erfarings og historiske Sandheder ikke bevises paa samme Maade, som de Geometriske, men Vishedens Grad kan dog sættes i Sammenligning med disses Vished. F. Ex. Hvem er ikke ligesaa overbeviist om, at der har været en Keiser Augustus i Rom, som at Qvadraten paa den Side, som staaer mod den rette Vinkel i en retvinklet Triangel, er lige saa stor, som Summen af begge de Qvadrater, som beskrives paa de Sider, der indslutte den rette Vinkel?

§ 2.

Imidlertid, da Man i Geometrien fordrer, at Alt med tydelig Klarhed maa kunne henledes til og udledes af de første Grundsætninger, saa er Man ikke ret fornøiet, naar dette ikke er fuldkommen skeet, omendskjøndt Satsen iøvrigt er ganske sandsynlig beviist, og der ikke er mindste Tvivl tilbage om dens Rigtighed. Af dette Slags er Theorien om parallele Linier og deres Egenskaber. Euclides, denne Geometriens berømte Lærer fra Oldtiden, har fremsat og beviist den, men synes dog deri at have antaget Noget, som nøiere burde været beviist, hvilket har givet Anledning til, at Eftertidens Geometrer ikke har været ganske fornøiede dermed. Nogle have forsøgt at bevise og udføre det paa deres Maade, hvilket Andre ikke have anseet tilstrækkeligt, saa det synes, som Man indtil denne Stund ikke er bleven ret enig om den Sag, og i de mindre Lærebøger anfører det, som Noget, Man for en Deel ikke kan indlade sig i, men med Euclides antager, hvad han uden videre Beviis har antaget. Dette har derfor stændig været en Gjenstand for Undersøgelser. (Man see Professor Kæstners Begyndelsesgrunde af Arithmet., Geomet. ꝛc. 12te Sætn. Anmærkn.)

§ 3.

Hvorvidt Nogen af de Mange, der have behandlet denne Materie, har fyldestgjort den ommeldte Hensigt, kan her ikke være Sted at undersøge, ja det lod sig ikke engang gjøre, da Man her paa Stedet langt fra ikke kan faae til Gjennemlæsning Alt, hvad der i den Anledning af en stor Mængde er skrevet. Det synes endog nu at være et overflødigt Arbeide, da en berømt Mathematiker, den førommeldte Kæstner, med Flid har foretaget sig denne vidtløftige Undersøgning, uden at finde hos Nogen det, han vilde ansee som fuldkommen fyldestgjørende. Selv har han og fremsat Noget i den Henseende, om hvilket han heller ikke erklærer sig i en ganske afgjørende Tone, men siger kun: „at han Intet havde kunnet finde, som bedre kunde tilfredsstille ham, end det.“ (See hans Fortale til første Udgave af hans førommeldte Skrift.) I mine aarlige Forelæsninger i Geometrien har jeg, som de Fleste, benyttet Euclides's Fremgangsmaade med et lidet Tillæg, hvorved jeg dog altid maa gjøre Eleverne opmærksomme paa, at den strænge Demonstration ikke har været opnaaet, hvilket ikke er efter Ønske, da Læreren ikke bør undlade at lære de Unge at kjende den strænge Demonstrationsmaade, og at vise, hvorledes Geometrien er et Mynster derpaa. Naturligviis maa ved saadan Anledning det Ønske melde sig, at Man selv kunde udfinde noget Fyldestgjørende. Saaledes er det ogsaa gaaet mig; og da jeg synes at have fundet det, hvori Vanskeligheden ligger, og en Fremgangsmaade til at forestille Theorien om parallele Linier, som jeg haaber skulde udholde Prøven, vover jeg i det Følgende at fremsætte den. Skulde der da i Tiden fremstaae Nogen, som enten med eller uden Grund vilde gjøre nogen Indvending mod Bevisernes Strænghed, nu, saa bliver min Skjebne ikke værre, end saa mange Andres, og den, der iøvrigt finder nogen Interesse i denne Sag, vil ikke fortryde, blandt de mange Forsøg af tydske og andre Landes Geometrer, ogsaa at kaste et Øie paa et Saadant fra Norge.

§ 4.

Hvad Cicero siger Offic. L. 1. C. 2: Omnis, qvæ a ratione suscipitur de aliqva re institutio, debet a definitione proficisci, er en saare vigtig Regel, grundet i den sunde Fornuftslære. Ofte fremkomme urigtige Slutninger, fordi Man har forsømt forud at give en bestemt Definition, eller den har været urigtig. Undertiden har Man og sluttet urigtig af Definitionen eller i det Mindste begaaet en Saltus i at slutte. Det forekommer mig, at det Manglende, som Man bebreider Bevisernes Strænghed i Theorien om parallele Linier, reiser sig hos Nogle af Definitionens Valg, hos Andre af dens ufuldkomne Benyttelse.

§ 5.

De Fleste pleie med Euclides antage og definere parallele Linier saaledes, at det er Linier, som ligge jevnsides i et og det samme Plan og støde ikke sammen, i hvor langt Man uddrager dem (det er at mærke, at, naar der tales om parallele Linier, tænker Man dem som liggende i samme Plan), hvorvel det er en aabenbar Sandhed og let kan bevises, at parallele Linier aldrig kan støde sammen, saa er det derfor ikke strax en beqvem Definition;

thi 1) bør Man til en Definition blandt Tingens nødvendige og særegne Egenskaber (prædicata necessaria et propria) vælge den, som giver det første og naturlige Begreb om Tingen, og ikke den, som burde bevises af det Første. Saaledes var det ikke passende at definere en retlinet Triangel ved en Figur, hvis Vinkler tilsammen gjøre 180 Grader; thi, uagtet det var en fuldkommen rigtig Sætning, var det dog ikke en beqvem Definition, da det ikke er den første væsentlige Idee, Man gjør sig om en Triangel. Saaledes er det heller ikke den første væsentlige Idee om parallele Linier, at de ikke støde sammen, da dette er Noget, Man bør udlede og bevise af deres parallele Beskaffenhed, hvilken henhører til deres hele Fortgang og Stilling mod hinanden, og deraf maa kjendes, ikke blot af deres yderste Grændse. 2) En Definition bør ikke være Nægtende, hvor den beqvemmelig kan være Bekræftende. Man definerer ikke den stumpe eller den spidse Vinkel ved den, som ikke er Retvinkel. Man spørger ei, hvad Tingen ikke er, men hvad den er, omendskjønt det nægtende Prædikat kan være baade rigtigt og nødvendigt. 3) Kunde Man og med Føie gjøre denne Indvending mod den euclidiske Definition, at den ikke med Sikkerhed lader sig simpliciter convertere, som dog er et Hovedreqvisit ved enhver Definition, da det ikke af sig selv er klarligen at indsee, at alle Linier paa samme Plan, som ikke støde sammen, i hvor langt de udtrækkes, ere parallele Linier, som have endog kun en uendelig liden Bøining mod hinanden, vilde Man ikke ansee at være fuldkommen parallele, men desuagtet, hvor skulde de løbe sammen? Det falder alt udi det Dunkle, og her er egentlig ikke eet af de Tilfælde, hvor Man, som undertiden skeer, kan acqviescere med en saare liden Forskjel eller være ligegyldig ved en uendelig liden Mangel.

§ 6.

Man har og defineret parallele Linier saaledes, at, naar tvende Linier i samme Flade, saasom AB og CD (Fig. 1) efter deres Natur ere perpendiculære paa en Tredie EF, saa ere de Parallele (Justitsraad Bugges Geometrie § 59). Men det tillades mig ogsaa her at yttre, hvad mig synes, der kan indvendes mod den Definition. Her antages i Definitionen det, som burde bevises, da det langtfra ikke er det første simple Begreb om parallele Linier, hvoraf deres samtlige Egenskaber, hvoriblandt ogsaa denne skulde udledes og bevises, uden hvilket Man ogsaa her kunde synes at savne den strænge mathematiske Fremgangsmaade. Imidlertid kan Man af den Egenskab hos parallele Linier baade let og rigtig bevise de øvrige Egenskaber hos dem, naar Man forud har beviist: 1) at, naar to Linier ere Parallele, og den Linie, som overskjærer dem, gior en Retvinkel med den Ene, maa den ogsaa giøre Retvinkel med den Anden; 2) at, naar den overskjærende Linie gjør rette Vinkler med dem Begge, saa ere Linierne parallele, hvilket og i det Følgende skal vises.

§ 7.

Der ere ogsaa de, som have valgt det Begreb, at Linien AB er parallel med CD (Fig I), naar den overalt har samme Afstand fra CD; saasom Geheimer. Wolf (Element. Geometr. § 81) og Professor de la Caille (Lection. mathemat. §§ 429, 430, 431), hvilken Sidste dog tillige refererer sig til Euclides's Definition eller Liniernes Overskjærelse. Men her kommer det videre an paa, hvad Begreb Man gjør sig om en Linies Afstand fra en Anden. De la Caille synes at sætte dette deri, at Linien AB fra en Punkt E henimod A ikke helder mere eller mindre mod Linien CD, med hvilken den skal være parallel, end den anden Deel fra E henimod B helder mod den; men hans Demonstrationer og Fremgangsmaade synes at have mindre Tydelighed og Nøiagtighed end den hos Euclides. Den Førstmeldte, nemlig Wolf, har i ovenmeldte § ikke givet nogen Definition paa en Linies Afstand fra en Anden, men har dog længer hen (§ 225) sagt, hvad derved bør forstaaes og (§ 226) anvendt dette paa den hele Linie. Af dette Begreb troer jeg, at Theorien om parallele Linier bør udledes, hvilket ogsaa den berømte Wolf har gjort, men vel ikke overalt med den fuldkomne mathematiske Strænghed, hvilket maa have været Aarsagen til, at de, der senere have behandlet denne Materie, heller ikke have anseet hans Fremgangsmaade som aldeles fyldestgiørende; thi ellers kunde de ligefrem have fulgt ham i deres Lærebøger, uden endnu at yttre nogen Tvivl om, at den mathematiske Nøiagtighed i denne Sag var opnaaet, hvorom mere i det Følgende.

§ 8.

Efter min Overbeviisning, hverken er eller kan der være noget rigtigere Begreb og Definition paa parallele Linier, saasom AB og CD (Fig. 1), end at alle Puncter i AB have lige stor Afstand fra Linien CD, og at dette bestemmes ved de Liniers Ligestorhed, som fra enhver Punkt i AB drages perpendiculære ned paa CD. Dette Begreb er Bekræftende og aldeles overeensstemmende med Talebrug, og det er den første Forestilling Man gjør sig, naar Man vil tænke og forestille sig, hvad parallele Linier ere. Hvis Een spadserer mellem to Rader Træer og mærker, at Raderne fort frem staae ligelangt fra hinanden, siger han strax, at de Rader ere parallele, uden at see eller undersøge deres yderste Grændser, og hvis den Ukyndige, som ikke forstod sig paa det optiske Bedrag, indbildte sig, at Rækkerne langt henne havde mindre Afstand fra hinanden, endog de ikke viste sig som sammenstødende, vilde han troe, at de ikke vare fuldkommen parallele. Denne Definition lader sig ogsaa ligefrem convertere; thi Ingen vil nægte, at jo den Linie, som overalt har lige Afstand fra en Anden, er parallel med denne. At den perpendiculære Linie fra en Punct til og paa en given Linie er den Korteste, og altsaa Puncternes Afstand fra Linien, behøver jeg ikke her at bevise, da jeg i denne Afhandling overalt sætter forud, hvad der i Geometrien pleier bevises, førend der handles om parallele Linier; thi at anføre de Satser med deres Beviser blev her kun en ufornøden Vidløftighed.

Coroll. 1. Da enhver propositio universalis affirmativa, som tillige er sand, lader sig convertere per Contrapositionem, saa følger af den anførte Definition og dens converterede Sætning tvende andre Sætninger: 1) Linier, som ikke overalt have samme Afstand fra hinanden, ere ikke parallele; 2) Linier, som ikke ere parallele, have heller ikke samme Afstand fra hinanden. Da disse Satser ogsaa af sig selv uden videre Beviis ere indlysende og overeensstemmende med den almindelige Forestilling og Talebrug, saa er ogsaa det et Mærke paa Definitionens Rigtighed.

Coroll. 2. Parallele Linier kan ikke støde sammen, da de overalt skal have lige Distance fra hinanden.

Coroll. 3. Linier, som overskjære hinanden, kan ikke være parallele, efter som deres Afstand fra hinanden forandres og i Overskjærings-Puncten er = 0.

Coroll. 4. De Perpendiculærer, som vise Puncternes Afstand fra en Linie til en Anden, saasom fra AB til CD (Fig. 1) maae falde paa samme Side af AB og ligeledes til samme Side af CD, naar Linierne skal være parallele; thi skulde Nogen falde til den anden Side af CD, maatte AB allerede have overskaaret CD, saasom i Fig. 9; Perpendiculærerne PQ og LM, hvor LM ikke kunde falde paa den anden Side af CD, medmindre AB havde overskaaret CD, saa at Puncterne i AB vare komne til at ligge paa den anden Side af CD, hvilket var imod foregaaende Coroll.

§ 9.

Blandt de flere geometriske Satser, hvilke her forudsættes, som bekjendte og beviste, er ogsaa, at fra enhver given Punct kan til enhver given Linie (naar denne forlænges, om det gjøres førnøden) drages en Perpendiculær, men heller ikke kan der fra samme Punct til samme Linie drages mere end een Perpendiculær; ligeledes, at der fra enhver Punct i en Linie kan oprettes en Perpendiculær, men heller ikke mere end Een. At drage en ret Linie fra en Punct til en Anden ansees som et Postulat. Hvad en ret Linie er, kunde ogsaa her forudsættes. Mig synes, at den tydeligst kan defineres saaledes, at den er og kan kaldes Ret, naar og for saavidt, som dens Dele i deres Fortgang sigte til samme Punct.

§ 10.

Hvis der paa en ret Linie, som CD (Fig. 2), og paa samme Side af denne ere stillede tvende ligestore perpendiculære Linier, som EF og GH, og der fra hvilkensomhelst Punct i samme Linie CD og paa samme Side oprettes een eller flere Mindre, som IK, eller større som LM, end de to første EF og GH, saa kan de Linier, der sammenbinde Puncterne FKH, saavelsom de, der sammenbinde Puncterne FMH ikke gjøre hele rette Linier fra F til H. Ligeledes, naar der fra en anden Punct i CD paa hiin Side af E eller G, saasom i O, oprettes en Perpendiculær paa samme Side og større eller mindre end de forommeldte EF og GH, saasom OP og OQ, kan de Linier HQ og HP ikke gjøre rette Linier med FH.

Beviis: Da KI er mindre end FE og HG, saa maa Linien FK nærme sig til CD, men naar den saa gaaer videre frem til H, afviger den igjen fra samme Linie; den sigter altsaa i sin Fortgang til forskjellige Puncter og gjør i det Hele ingen ret Linie (§ 9). Ligeledes FM og MH, da ML er større end FE og GH. Videre, hvis Perpendiculæren PO er større, eller LO mindre end FE og HG, saa maa Linien HP afvige mere, og HQ mindre fra CD end FH og altsaa kan FHP ikke være en ret Linie, heller ikke FHQ.

Coroll. Da nu en Linie, som FH, ikke kan være en ret Linie, saasnart som nogen af dens Puncter vare enten nærmere eller længere borte fra en given Linie CD, end Puncterne F og H, som have lige stor Afstand fra bemeldte Linie, saa følger, at, naar en ret Linie skal tænkes at være mellem to saadanne Puncter, maae ogsaa alle øvrige Puncter i samme Linie have samme Afstand fra CD, som de førstmeldte F og H.

§ 11.

Naar tvende Puncter i en ret Linie, som AB (Fig. 2), have samme Afstand fra en Linie CD, Begge paa samme Side, da er AB parallel med CD.

Beviis. Lad Puncterne F og H have lige Afstand fra CD, det er: Perpendiculærerne FE og HG ere indbyrdes lige store, nu vælges en anden Punct i AB, hvilkensomhelst Man vil, og derfra lader falde en Perpendiculær paa CD; hvis denne blev mindre eller større end FE og HG, blev AB ikke en ret Linie (§ 10), hvilket var imod Hypothesen; følgelig maae alle Perpendiculærer fra AB paa CD, under den fremsatte Betingelse, være lige store (Coroll. § 10), og AB parallel med CD (§ 8).

§ 12.

Igjennem et Punct, som A (Fig. 3), kan altsaa trækkes en Linie GAE parallel med en anden given Linie, som HF, men heller ikke mere end Een.

Beviis: 1) Fra den givne Punct A tænker Man sig en Linie AB perpendiculær paa HF. Sæt nu at Linien AB i samme perpendiculære Stilling paa HF og stedse i samme Plan bevæger sig til begge Sider langs henefter BF og HB, saa maa dens øverste Punct A beskrive Linierne AE og AG, i hvilke alle Puncter som GIACE have samme Afstand fra Linien HF, og der beskrives altsaa en Linie, der baade er ret og parallel med HF (§ 10 Coroll. og § 8). 2) Hvilken anden Linie Man vilde tænke sig at gaae igjennem A, saasom MAL, maatte en Deel af samme ligge ovenfor Linien AE, og den anden Deel nedenfor AG eller omvendt. De Perpendiculærer fra AL blive større, og de fra AM blive mindre end AB; thi CD, som en Deel af LD, men = AB, er mindre end LD, og MK, som en Deel af IK, er mindre end IK, som og er = AB. Den Linie ML kan altsaa ikke være parallel med HF (§ 8 Coroll. 1.)

§ 13.

Naar mellem tvende Linier, saasom CD og EF (Fig. 4), stilles en Linie som AB, der efterat været stillet perpendiculær, og den der gjør en Retvinkel paa den ene Linie EF i B, ikke tillige bliver perpendiculær paa den Anden CD i A, saa maae de Perpendiculærer, der oprettes paa den Side, hvor AB gjør en Stumpvinkel med CD, vexelviis dragne fra denne til den anden Linie, saasom AI, IK, KL, LN o. s. v. blive alt større og større; derimod paa den anden Side, hvor AB gjør en Spidsvinkel med CD, blive de Linier BG, GH, HM, MO o. s. v., som Man vexelviis lader falde fra den ene Linie til den Anden, alt mindre og mindre.

Beviis. Da Vinkelen CAB er en Stumpvinkel (efter Hypothesen), ligger Perpendiculæren, som oprettes i A, paa den Side af AB, som vender mod C, og Vinkelen AIB < R, da der i en Triangel ikke kan være to rette Vinkler; Linien AI er altsaa > AB, da den staaer mod den større Vinkel. Paa samme Maade kan bevises, at IK > AI, KL > IK, LN > KL o. s. v. Paa den anden Side af AB, hvor Vinkelen BAD er spids, maae Perpendiculæren BG falde paa den Side af AB mod D; thi faldt den paa den anden Side, dannedes derved en Triangel, som havde en ret og en stump Vinkel, hvilket var umuligt; BG bliver da < AB, eftersom den staaer mod den mindre Vinkel. Ligeledes bliver GH < GB, HM < HG, MO < HM o. s. v.

§ 14.

Hvis to rette Linier, som CD og EF (Fig. 4), ligge i samme Plan og overskjæres af en tredie AB, saaledes, at denne er perpendiculær paa den Ene, saasom i B, men ikke paa den Anden i A, saa kan Linien CD ikke være parallel med EF.

Beviis. Da der i forrige § er beviist, at Puncterne i CD faae forskjellig Afstand fra Linien EF under den anførte Betingelse, saa følger, at CD da ikke kan være parallel med EF (§ 8 Coroll. 1).

§ 15.

Hvis to rette Linier AB og CD (Fig. 5) i samme Plan kan overskjæres af en tredie EF saaledes, at den staaer perpendiculær paa dem Begge og gjør rette Vinkler baade ved E og F, saa ere Linierne parallele.

Beviis. Den Ene kan altid antages at være perpendiculær, saasom ved F (§ 9). Sæt nu, at den paa den anden Side ved E ikke tillige er perpendiculær, saa kan Linierne ikke være parallele (§ 14), men da der dog igjennem Puncten E altid kan trækkes en Linie parallel med CD (§ 12), og Vinkelen ved E maa enten være ret eller ikke ret, saa følger, at Linien AB da er parallel med CB, naar Vinkelen ved E ogsaa er ret, det er: naar de Begge ere rette.

Denne vigtige Sætning i Theorien om parallele Linier kan og bevises paa følgende Maade: Sæt (Fig. 5) at Linien EF er perpendiculær paa CD og at Man igjennem Punctet E drager en Linie AEB, ligeledes perpendiculær paa EF, saa bemærkes allerførst, at enhver Punct i Linien AB, ihvorlangt den paa begge Sider fra E uddrages, maa ligge paa samme Side af CD, som E; thi skulde nogen Punct i AB ligge paa den modsatte Side, maatte den i sin Fortgang have overskaaret CD, og der blev da en Triangel paa Linien EF, i hvilken begge Vinkler ved E og F vare rette Vinkler (efter Constructionen), men dette er umueligt, altsaa ligge alle Puncterne i AB paa den ommeldte Side. Man vælge da, hvilken Punct Man vil, i Linien AB, saasom G, og fra samme lader Man falde en Perpendiculær GH paa CD. Denne GH maa da enten være mindre eller større eller lige saa stor som EF. Er den mindre, kan den forlænges til I saavidt, at IH bliver = EF; var derimod GH større end EF, kunde Man afskjære et Stykke KH = EF. Naar Man nu videre fra E trækker Linierne EI og EK, kan Ingen af dem kan være perpendiculære paa EF, da EG (efter Constr.) er perpendiculær fra samme Punct og paa samme Linie, hvoraf følger, at heller ikke Nogen af dem kan være parallel med CD (§ 14); men da IH eller KH tillige antages at være = FH, har Man her to lige store Perpendiculærer fra EI paa FH paa samme Side af FH, nemlig EF og IH eller EF og KH, hvoraf maatte følge, at EI eller EK er parallel med FH (§ 11), men efter Foregaaende skulde de ikke være parallele med den; altsaa kan ingen Punct i AB have større eller mindre Afstand fra CD end EF, og bliver AB saaledes parallel med CD.

Coroll. Da de samme Beviis kan føres for Linien CD i Henseende til Linien AB (Fig. 5), uden i mindste Maade at forandre disse Liniers Stilling imod hinanden, saa er derved ogsaa beviist, at naar en Linie AB er parallel med en anden CD, saa er ogsaa denne Sidste parallel med den Første, hvilket vel i sig selv er meget indlysende, men kan heller ikke ansees som et fuldkomment Axiom.

§ 16.

Naar tvende Linier, saasom AB og CD (Fig. 5), ere parallele, og Man lader en tredie Linie EF stilles mellem dem eller overskjære dem, saaledes, at den gjør en Retvinkel med den Ene, maa den ogsaa gjøre en Retvinkel med den Anden.

Beviis. Sæt, at den er perpendiculær ved F paa CD, ikke ved E paa AB, saa kunde Linien AB ikke være parallel med CD (§ 14), hvilket altsaa var imod Hypothesen; da nu enhver Vinkel enten maa være ret eller ikke ret, saa følger, at Vinkelen ved E ogsaa maa være en Ret, eller, naar den ene er en Retvinkel, maae Begge være det.

§ 17.

Hvis to Linier, saasom AB og CD (Fig. 6), overskjæres af en tredie EF, pleie de Vinkler, som den overskjærende Linie gjør med de to, som overskjærer, at benævnes paa følgende Maade: 1) Vexelvinkler kaldes de to, som ligge paa forskjellige Sider af den overskjærende Linie, Een ved den Ene, den Anden ved den Anden af de overskaarne Linier, og enten Begge indenfor eller Begge udenfor de overskaarne Linier, saasom indenfor: o og n eller p og r; udenfor: m og s eller q og t. 2) Udvendig og indvendig Modsatte kaldes de, som ligge paa samme Side af den overskjærende Linie, saaledes, at den Ene ligger uden for den Ene af de overskaarne Linier, den Anden inden for den Anden, saasom m og n, t og p, q og r, s og o. 3) De to Indvendige kaldes de, som Begge ligge paa samme Side af den overskjærende Linie og inden for begge de Overskaarne, saasom p og n, o og r. Hvoraf reiser sig sex bekjendte Theoremer, eller, om Man heller vil kalde dem to, eftersom de tre have fælles Hypothes, og naar Eet er beviist, følge de to Andre deraf; de tre Andre have fælles Sats, og naar denne er beviist af den ene Hypothes, følger den og af de Andre. Disse Theoremer udgjøre det Vigtige i den Lære om parallele Linier og have overalt Anvendelse baade i Geometrie og andre mathematiske Videnskaber. Naar bemeldte Theoremer med mathematisk Nøiagtighed ere beviste, saa er i denne Sag opnaaet, hvad Man ønsker, og dette haaber jeg nu at kunne skee ved at benytte de Sætninger, som allerede ere beviste.

§ 18.

Naar Linien AB er parallel med CD (Fig. 7), og Linien IK overskjærer dem, det er: naar to parallele Linier overskjæres af en Linie, saa er: 1) Verelvinklerne, saasom m og n, lige store. 2) Den udvendige Vinkel o lige stor med den indvendige n. 3) De to Indvendige, p og n, ere tilsammen saa store som to Rette.

Beviis. 1) Man lader en Perpendiculær falde fra G til H paa Linien CD. Ligeledes oprettes en Perpendiculær FE fra F til AB, paa hvilken den da ogsaa bliver perpendiculær, efterdi AB er parallel med CD (§ 16). Paa Grund af, at Linierne ere parallele, maa ogsaa Linien EF være $= GH$, da de, som Perpendiculærer bestemme Puncternes Afstand i AB fra CD. Videre er i Triang. EFG og GFH, Vinkelen $E = H$ og $FG = FG$; de Triangler ere altsaa lige store og Vinkelen $m = n$, det er: Verelvinklerne ere lige store.

2) $m = o$, men $m = n$ (No. 1), altsaa ogsaa $o = n$, det er: den udvendige og indvendige Vinkel ere lige store.

3) $m = n$, læg p til dem Begge, saa er $m + p = n + p$, men $m + p = 2R$; altsaa er $n + p$, d. e. de to Indvendige, $= 2R$.

Anmærkn. Euclides har beviist denne Sætning (Proposit. 29 i 1ste Bog), men slutter, at hvis Verelvinklerne ikke vare lige store, maatte deraf følge, at de to indvendige Vinkler paa een af Siderne da blive mindre end to rette Vinkler, hvoraf videre efter hans 11te Axiom skulde følge, at Linierne maatte støde sammen. Her er just den Sætning, som ikke synes at kunne antages som Axiom. Maaskee har Euclides forestillet sig, at, naar Vinklerne vare mindre end to Rette, var det uden Beviis klart, at Linierne efterhaanden maatte nærme sig til hinanden og saaledes omsider løbe sammen, men har dette været hans Idee, synes han at have havt i Tankerne den sande Definition over parallele Linier, som overalt vil have lige Distancer mellem Linierne. Efter den mathematiske Strænghed manglede dog her Beviis: 1) At, naar de to indvendige Vinkler vare mindre end to Rette, Distancerne da efterhaanden maatte formindskes; 2) at, naar de formindskedes, Linierne da maatte løbe sammen. Vel kan Man fra Puncterne F eller G (Fig. 7) drage Linier til ethvert givet Punct i de modsatte Linier GB og FD, og derved frembringe sammenløbende Linier i de Triangler, som derved fremkomme og hvori to Vinkler altid ere mindre end to Rette, men dette er ikke saa klart, naar Vinklerne tænkes, paa et uendeligt Lidet nær, at være = 2R, og Man forestiller sig Linier at gaae fort uden at have Grændse. Mere herom § 20.

§ 19.

Hvis to Linier, som AB og CD (Fig. 7), overskjæres af en Tredie, som IK, og 1) Vexelvinklerne ere lige store; 2) den udvendige Vinkel er ligesaa stor som den Indvendige; 3) de to Indvendige ere tilsammen saa store som to Rette, saa ere de Linier, som overskjæres, parallele.

Beviis 1. Sæt, at Vexelvinklerne m og n ere lige store. Hvis hver af dem er en Retvinkel, saa ere ogsaa deres Nabovinkler rette og Linierne parallele (§ 15); men hvis de ikke ere rette Vinkler, saa bliver det ene Par stump- og det andet Par spidsvinklet. Nu lader Man fra begge de stumpe Vinklers Spidse falde Perpendiculærer, fra G til H paa Linien CD og fra F til E paa Linien AB. Da Vinklerne m og n ere spidse, kan Puncten E ikke ligge paa den Side af FG mod B, heller ikke H paa den Side af FG mod C; thi derved vilde dannes Triangler, som hver havde baade en Stump- og en Retvinkel. I Trianglerne GEF og GHF er Vinkelen m = n (efter Hypoth.), E = H (efter Construct.) og GF = GF. Disse to Triangler ere altsaa lige store og EF = GH, Vinkelen EFG = FGH og den hele Vinkel EGH = EFH. Disse maae da enten Begge være rette Vinkler eller ikke. Sætter vi, at de ikke ere rette, saa maae (efter § 13) de Perpendiculærer, som falde fra Linien EG ned paa CD, enten blive alt mindre og mindre eller alt større og større fra E henimod G og ligesaa fra G henimod E. Linien EG maatte altsaa i dens Mellempuncter enten nærme sig eller afvige fra Linien FH mere end dens yderste Puncter E og G, og kunde aldeles ikke være en Retlinie, hvilket vel er klart i sig selv, men er og beviist (§ 10). Da nu

EG er en ret Linie (efter Hypoth.), kan Vinkelen EFH ikke være enten stump eller spids, men ret, og EF saaledes perpendiculær paa CD. Da det altsaa er beviist, at EF og GH baade ere lige store og perpendiculære paa CD, saa er AB og CD parallele (§ 11 og 15).

2. Hvis den udvendige Vinkel er lige med den Indvendige, saasom o = n, saa er m = o = n; men, naar Verelvinklerne ere lige store, saa ere Linierne parallele (No. 1), altsaa ere de ogsaa parallele, naar den udvendige Vinkel er lige stor med den Indvendige.

3, Sæt, at de to Indvendige, saasom p + n, ere = 2R, saa ere de ogsaa = p + m; tag p bort fra dem Begge, saa er m = n; men, naar Verelvinklerne ere lige store, ere Linierne parallele (No. 1); altsaa ogsaa, naar de to Indvendige ere saa store som to Rette.

Denne vigtige Sætning kan og paa følgende Maade let bevises, naar Man først har beviist (som er skeet i § 15), at to Linier ere parallele, saasnart som den, der overskjærer Begge, er perpendiculær paa dem Begge.

Lad EF overskjære AB og CD (Fig. 8). Man dele Linien KL i to lige store Dele i Puncten G. Fra G lader Man falde en Perpendiculær GH paa AB, og forlænge HG til I. I Trianglerne HGK og LGI er o = p (som Verticalvinkler), m = n som Verelvinkler (efter Hypoth.) og GK = GL. Trianglerne ere altsaa lige store, og Vinkelen GIL = GHK = R; men, naar de Begge ere Retvinkler, saa ere Linierne parallele. Det Øvrige bliver alt som No. 2 og 3 i forrige Beviis.

Anmærkn. 1. Euclides demonstrerer dette Theorem (Propos. 27 og 28 1ste Bog) paa følgende Maade: hvis AB (Fig. 7) ikke blev parallel med CD, naar Verelvinklerne m og n sættes at være lige store, saa maatte Linierne AB og CD paa en af Siderne støde sammen, hvorved der dannedes en Triangel, hvor m blev den udvendige Vinkel og maatte blive større end n, hvilket var imod Hypothesen o. s. v.; men da denne Demonstration grunder sig paa en Definition, som har betydelige Feil (§ 5), kan den ikke ansees som ganske fyldestgjørende.

Anmærkn. 2. Geheimer. Wolf har beviist foranførte Sætning (Element. Geometr. § 255) og det af den her antagne Definition, at Linierne ere parallele, naar de overalt have lige Afstand fra hinanden; men Afstanden og Parallelismen sluttes deraf, at Perpendiculærerne FE og GH (Fig. 7) ere lige store, endog de her ikke Begge vare dragne fra samme og til samme Linie, heller ikke var beviist, at EF ogsaa er perpendiculær paa CD. Perpendiculære Liniers Ligestorhed mellem to andre Linier beviser ikke i alt Fald, at Linierne overalt ere lige langt fra hinanden i alle Puncter, ja ikke engang, om de drages fra Puncten i een og den samme Linie til den samme Linie. Lad AB og CD (Fig. 9) overskjære hinanden i E. Man gjør EK = EL. Fra K lader Man falde en Perpendiculær og ligesaa fra L til M; da Vinkelen F = M, o = p og EK = EL, saa er Triangelen EFK = EML og KF = LM. Lad ligeledes afskjæres EG = EH og fra de Puncter H og G i samme Linie CD opreises perpendiculære Linier HI og GN, hvor Puncterne I og N ligge i samme Linie AB. Triangelen EHI bliver ogsaa her = EGN og Perpendiculæren NG = IH; ja, naar Man gjør EP, ER, EK og EL alle lige store, og fra P, R, K, L lader falde Perpendiculærer, faaer Man fire lige store Distancer PQ, KF, RS, LM mellem de tvende Linier AB og CD, men disse blive derved ikke parallele, eftersom Perpendiculærerne ikke staae paa samme Side af den Linie fra hvilken de opreises (§ 8, Coroll. 4), heller ikke gjøre rette Vinkler med begge Linierne (§§ 11, 14. 15). — Videre synes ogsaa dette at mangle i den Wolfiske Demonstration, at der uden Beviis antages, at naar Verelvinklerne ere lige store, maae de perpendiculære Linier (Fig. 7) fra F til E og fra G til H altid falde, den Ene paa den ene Side, den Anden paa den anden Side af den overskjærende Linie IK, hvorpaa vel ogsaa kunde forlanges Beviis, endog det synes at være klart uden Beviis. Det Foranførte, især det Første, har maaskee været Aarsagen, hvorfor den Wolfiske Fremgangsmaade ikke har fundet fuldkommen Bifald til Efterfølgelse.

Anmærkn. 3. Det vilde være overflødigt ogsaa at vise, hvorledes det samme, som i disse to sidste §§ er sagt og beviist, ogsaa kan siges og bevises om de adskillige andre Par af Verelvinkler, Indvendige og Udvendige, de to Indvendige, som ere ommeldte i § 17, da de indsees strax af det, som er beviist, ved at Nabovinkler ere = 2R og at Verticalvinkler ere lige store.

Coroll. Af de i forrige to §§ anførte Theoremer følger ogsaa umiddelbar per Contrapositionem: 1. Naar Verelvinklerne eller den udvendige og modsatte indvendige Vinkel ikke ere lige store, eller de to Indvendige tilsammen ikke ere saa store som to Rette, da ere Linierne ikke parallele. 2. Naar Linierne ikke ere parallele, saa ere Verelvinklerne ikke lige store; saa er den udvendige Vinkel ikke saa stor som den indvendige Modsatte, og da ere heller ikke de to Indvendige tilsammen saa store som to Rette.

§ 20.

Uagtet de Ideer, at være parallel og ikke støde sammen, ei kan converteres eller omverles med hinanden (§ 5), synes dog det, at Linier løbe sammen eller ikke løbe sammen, at have megen Relation til Ideen om Parallelisme. I § 8, Cor. 2 er og viist, at parallele Linier ikke kan støde sammen; men, da deraf ikke følger, at Linier, som ikke ere parallele, maae løbe sammen, saa kunde endnu spørges: under hvilke Betingelser to Linier paa et Plan maatte løbe sammen ved efter Fornødenhed at forlænges? Der gives og de Tilfælde, hvor Man behøver at bevise Liniers Sammenstød, saasom, naar Man skal beskrive en Cirkel igjennem tre givne Puncter, maa Man bevise, at Linierne virkelig støde sammen i en Punct, som bliver den, der angiver Centret. Euclides har, som før er anmærket, i 11te Axiom antaget, at to Linier maae støde sammen, naar de med den overskjærende Linie paa samme Plan gjøre de to indvendige Vinkler paa een af Siderne mindre end to rette Vinkler. Denne Sætning troer jeg kunde fremsættes og benyttes med en tilføiet Indskrænkning saaledes: Naar to Linier overskjæres af en Tredie saaledes, at de to indvendige Vinkler blive mindre end to Rette, Lidet eller Meget, indtil paa et uendelig Lidet nær, maae de to overskaarne Linier, naar de efter Fornødenhed uddrages, støde sammen.

Beviis. Igjennem Puncten E (Fig. 10) tænker Man en Linie AB parallel med CD. Naar disse overskjæres af EF, blive de indvendige

Vinkler EFD og FEB tilsammen saa store som to Rette (§ 18); hvis nu ikke Begge ere rette, men een af dem spids som EFD, den Anden stump som FEB, og omvendt paa den anden Side af EF, kan utallige Linier drages fra E til FD, som EG, EH, EI ꝛc., hvorved ligesaa mange Triangler fremkomme, i hvis Spidser G, H, I ꝛc. altid to Linier støde sammen, og, da Vinklerne BEG, BEH, BEI o. s. v. blive alt mindre og mindre, saa maa den tilsidst blive uendelig liden, og de to indvendige Vinkler blive saaledes, paa et uendelig Lidet nær, tilsammen saa store, som to Rette. Linierne EG, EH, og saa fort frem, kan da bestemme alle mulige Tilfælde af de to indvendige Vinklers Størrelse, naar den Vinkel de gjør med EF lægges til den, som samme EF gjøre med FD indtil den uendelig liden Forskjel fra to rette Vinkler. Linien EI kunde da ikke naae sammen med FD, førend i det Uendelige, og hvor var det? Angiver Man en Punct, hvor de skulde løbe sammen, kunde Man altid tænke en Punct længer hen, og Vinkelen BEI paa ny deelt. En Triangel af uendelige Linier kan heller ikke tænkes; thi Spidsen kunde altid tænkes længer udflyttet. Af Foranførte følger, at naar det der mangler paa, at de to indvendige Vinkler ikke ere saa store, som to Rette, eller Vinkelen BEI er noget uendelig Lidet, da har Man det Tilfælde, hvor de overskaarne Liniers Sammenstød med mathematisk Nøiagtighed og Klarhed ikke lader sig bevise, fordi det tilsigtede Sammenstød da ikke kan opnaaes eller blive muligt.

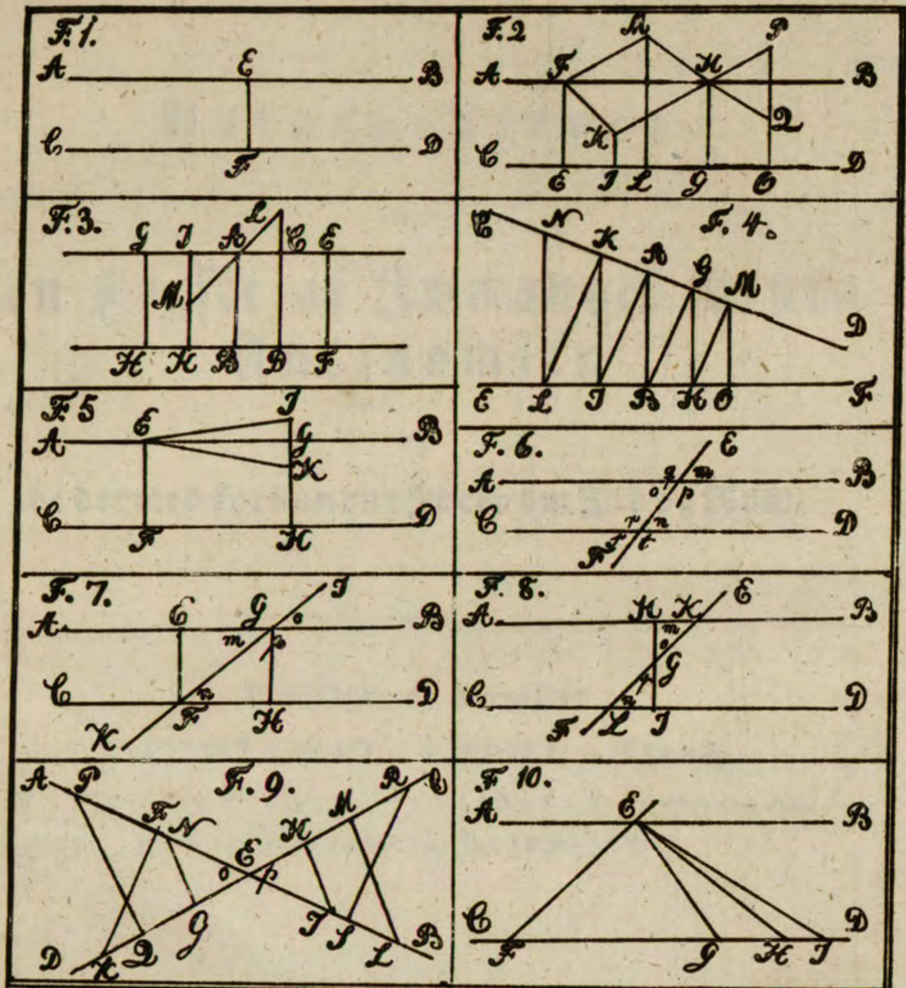
Anmærkn. 1. Naar der altsaa forlanges, at bevise to Liniers Sammenstød, er det tilstrækkeligt at bevise, at de to indvendige Vinkler ved den overskjærende Linie ere mindre, end to Rette. Vilde Man sige: hvad, om Forskjellen da var uendelig liden? Ja vel, men da paastaaer Man heller ikke, om saa var, at de kunde løbe sammen, heller ikke at de derved bleve fuldkommen parallele; ligesom Man da heller ikke kunde paastaae, at det, som af deres Sammenstød skulde bevises, da havde fuldkommen Sted. Saaledes bliver derved heller ikke nogen Mangel tilbage i den fuldkomne Theorie om parallele Linier;

thi der kan ikke forlanges, at det Umuelige skal bevises, nok, at Alt, hvad der virkelig henhører til parallele Liniers Egenskaber, hvorpaa saa meget videre skal bygges, er tilstrækkelig beviist.

Anmærkn. 2. Efterat Alt, hvad der henhører til Begrebet om parallele Linier og deres Hoved-Egenskaber, er, som jeg haaber, med mathematisk Strænghed fremsat og beviist, haaber jeg ogsaa, at det ikke skulde være fornøden i den elementare Underviisning, at forestille det, som Noget, der skulde trænge til en fuldkomnere mathematisk Demonstration og Behandling. Maaskee endog nogle af de her beviste Sætninger kunde været antagelige, som Axiomer uden Beviis, saasom, at, naar en ret Linie i to Puncter og paa samme Side har lige Afstand fra en anden Linie, da maae ogsaa alle dens øvrige Puncter have samme Afstand fra den, og at den hele Linie saaledes i Følge Definitionen blev parallel med den Anden (§ 10. 11); saa og at der igjennem en given Punct kan altid tænkes een og ikke flere parallele Linier med en given Linie i samme Plan (§. 12). Fremgangsmaaden, som her er brugt, er simpel og heller ikke vidtløftig. Det Væsentlige i Foredraget vilde kortelig blive følgende:

1. Maatte den rigtige Definition (§ 8) lægges til Grund og forklares saavelsom de dertil hørende Termini (§ 17).
2. Bevises, at, naar Man fra en Linie i en Plan lader falde en Perpendiculær paa en anden Linie, og den da ikke tillige bliver perpendiculær paa den Første, kan disse to, hvorimellem den er dragen, ikke være parallele (§ 13. 14).
3. Bevises, at, naar to rette Linier overskjæres af en ret Linie i samme Plan saaledes, at begge Vinkler ere rette, saa ere Linierne parallele og omvendt. Naar Linierne ere parallele og den ene Vinkel ved den overskjærende Linie gjøres til en ret Vinkel, saa maa den Anden ogsaa blive en Ret (§ 15. 16).
4) Af disse foregaaende Sætninger følge og bevises de fex vigtige Sætninger om parallele Linier (§18. 19).

Anmærkn. 3. Hvad der videre var at sige og demonstrere om parallele Linier, vilde her blive det samme og overeensstemmende med, hvad der haves i samtlige geometriske Lærebøger, og derfor forbigaaes, som Noget, der ikke henhører til Hensigten af denne liden Afhandling.



- 1817 -

L. Klüwer fc.