II.

Om de ubestemte algebraiske Æqvationer,

af

Professor og Magister
Frederik Christian Holberg Arentz,
Rector ved Cathedralskolen i Bergen,
Ridder af Dannebrogen.

§ 1.

Ubestemte Æqvationer ere de, som indeholde flere ubekjendte Størrelser, hvilke hver for sig kan tillægges forskjellige Værdier, hvoraf de Andre da ogsaa bestemmes. Disse saaledes Antagne, saavelsom de Andre deraf Beregnede, kan være Bekræftende eller Nægtende, hele Tal eller Brøk; f. Ex. $\pm ax \mp by = c$. Hvordan her x eller y antages, kan den Anden altid deraf ogsaa bestemmes ved Æqvationens videre Opløsning. Men mere speciel forstaaer Man det, at opløse en ubestemt Æqvation, saaledes, at Man skal finde alle muelige Værdier af x og y eller flere i lutter bekræftende og hele Tal. Een ubekjendt Størrelse allene i en Æqvation gjør ikke Æqvationen ubestemt; den bliver altsaa heller ikke ubestemt, om der er flere end Een, naar de Øvrige enten ved andre Æqvationer eller paa anden Maade kan bestemmes.

Anmærkn. Dette Problem pleier opløses med megen og indviklet Vidløftighed, heller ikke altid efter universelle faste Regler. Jeg vil forsøge at vise bestemte Methoder, hvorved de ubekjendte Størrelser paa en let Maade med langt mindre Vidløftighed, end sædvanlig, kan findes i hele og bekræftende Tal.

§ 2.

Naar de ommeldte tvende Betingelser skal iagttages, skeer det ofte, at Problemet er umueligt, saa at de Ubekjendte ikke lader sig bestemme i hele og bekræftende Værdier, saasom, naar Producterne af de Ubekjendte med deres Coefficienter have samme Tegn og Summen af Coefficienterne er større end Æqvationens bekjendte Sum, naar Alt Bekjendt er ført over paa den anden Side; f. Ex. $2x + 5y = 3$; her kan x og y umuelig

Begge blive Bekræftende og Hele; thi, som Hele, kan x og y hver ikke sættes mindre end 1, og da skulde $2+5=3$.

§ 3.

Ifald de ubekjendte Størrelsers Coefficienter have en fælles Divisor, da er det ogsaa umueligt, at de Begge kan blive hele Tal; thi, sæt den almindelige Æqvation $\mp abx \pm ady = c$, saa er $\pm bx \mp dy = \frac{c}{a}$, men da baade Coefficienterne og de Ubekjendte ere hele Tal, maa $\frac{c}{a}$ og være et heelt Tal, d. e. c maa være delelig med a eller $c = fa$. Nu bliver Æqvationen $\mp abx \pm ady = af$; naar saa divideres med a, faaer Man $\mp bx \pm dy = f$ og Coefficienterne ophøre at have fælles Divisor. Herved er og at mærke, at selve Coefficienterne ikke kan antages som Brøk; thi om de end vare det, kan de hæves og Æqvationen befries for al Brøk, forinden Man søger at bestemme x og y, f. Ex. $\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y = 7$; saa er $15x + 8y = 140$.

§ 4.

Naar Man i en ubestemt Æqvation lader den ene af de tvende Størrelser voxe, maa nødvendig den Anden formindskes, hvis Æqvationens Sum c skal, som den bør, blive den Samme uforandret, saaledes i foranførte Æqvation § 1, naar ax voxer, maa by formindskes og tvertimod, hvorved dog er at mærke, at, naar en nægtende Størrelse formindskes, bliver dens virkelige Størrelse at ansee som forøget og tvertimod; saaledes, -5 betragtet som Nægtende og modsat en Bekræftende er mindre end -3. Heraf følger, at, naar ax og by have forskjellige Tegn, maae de absolute Størrelser enten tillige voxe eller tillige formindskes, saa at, naar x voxer eller formindskes, maa y ligeledes, men tvertimod, har begge Størrelser samme Tegn, maa den Enes virkelige Størrelse formindskes, naar den Anden voxer.

§ 5.

Regelen, hvorefter x og y kan forøges og formindskes, er følgende: Naar den ene forøges ved den andens Coefficient, maa denne Anden altid formindskes ved den Førstes Coefficient. Saaledes, naar x i forommeldte Æqvation voxer til $x + b$, maa y formindskes til $y - a$, og naar y voxer til $y + a$, maa x formindskes til $x - b$, hvilket indsees og bevises deraf, at, naar de paa den Maade forandres, bliver Æqvationen den samme; thi $a(x \pm b) + b(y \mp a) = ax \pm ab + by \mp ba = ax + by = c$.

§ 6.

Heraf følger, at naar ax og by har forskjellige Tegn, faaer Man ved den vexelvise Forøgelse og Formindskelse to Par Rækker af Værdier for x og y, hvoraf det ene Par gaaer frem i lutter bekræftende Værdier, og det Andet i lutter Nægtende. Er derimod baade ax og by bekræftende, bliver Fortsættelsen af Værdierne i det Uendelige af den Beskaffenhed, at, naar Værdierne af x er +, blive de af y —, og tvertimod. Til Oplysning og Exempel herpaa vil jeg anføre de Værdier, som, naar de tillægges x og y, kan fyldestgjøre Æqvationen, $3x - 4y = 8$ og $3x + 4y = 8$. Rækkerne blive følgende:

I den Første:

y voxer ved at tillægge + 3 og x formindskes ved at fradrage — 4	eller y formindskes ved at fradrage + 3 og x forøges ved at faae det Tillæg — 4
$y = -2 + 1 + 4 + 7 + 10$ &c.	$y = -2 - 5 - 8 - 11 - 14$ &c.
$x = 0 + 4 + 8 + 12 + 16$ &c.	$x = 0 - 4 - 8 - 12 - 16$ &c.

Den simple Maade, paa hvilken disse ubestemte Æqvationer ere beregnede vil sees i det Følgende, men den fortsatte Formindskelse og Tillæg er aldeles efter foregaaende §, uagtet den bekjendte Sag, at, naar en nægtende Størrelse fradrages, bliver den Bekræftende, ogsaa her maa have sin Anvendelse. Videre er at mærke, at Man ved selve Beregningen og Jagttagelsen af § 5 altid kan mærke om Æqvationen er muelig, ogsaa under den Betingelse, at begge de Ubekjendte skal være Virkelige og Bekræftende, hvilket her ikke har Sted, naar 3 skal fradrages y, og — 4 tillægges x.

Nu den anden Æqvation $3x + 4y$:

y voxer ved at tillægge $+3$ og x formindskes ved at fradrage $+4$	eller y formindskes ved at fradrage $+3$ og x voxer ved at tillægge $+4$
$y = 2 + 5 + 8 + 11 + 14$ &c.	$y = 2 - 1 - 4 - 7 - 10$ &c.
$x = 0 - 4 - 8 - 12 - 16$ &c.	$x = 0 + 4 + 6 + 12 + 16$ &c.

Her sees, at ikke baade x og y kan blive Virkelige og Bekræftende, og at denne Æqvation altsaa under de Betingelser aldeles ikke er muelig, hvilket ogsaa strax kunde sees efter hvad der er sagt § 2.

§ 7.

Da Værdierne af x og y voxe og formindskes efter den Regel, som er viist § 5, saa er dette et vigtigt Hjelpemiddel, som kan benyttes til at forkorte saadanne Problemers Opløsning uden derved at tilsidesætte Betingelserne af bekræftende og hele Tal. I det Følgende vil sees, at Man ofte meget let kan finde en Værdie af x eller y, der er Nægtende eller endog 0, men fra disse kan Man strax efter den ommeldte Regel gaae over til bekræftende Størrelser (om saadanne ere muelige), og naar Man altsaa har fundet en eneste Værdie, hvilkensomhelst, kan Man strax ordne den hele Række af begge de Ubekjendtes Værdier.

§ 8.

For at finde bestemte Værdier af x og y, som her søges, og under de ommeldte Betingelser, maa Man efter Sædvane først gjøre Æqvationen $ax \mp by = c$ simplere ved at overføre Alt, foruden x eller y, til den anden Side. Man faaer da $x = \frac{c}{a} \mp \frac{by}{a}$, og naar c lader sig dividere og virkelig divideres med a, bliver $\frac{c}{a} = m + \frac{n}{a}$ (naar vi kalde Qvotienten m og det Overblevne n). Ligeledes kan $\mp \frac{by}{a}$ blive $= \mp f \mp \frac{g}{a}$ og $x = m \mp fy \mp \frac{gy}{a} + \frac{n}{a}$, i hvilken Æqvation m og fy ere hele Tal og

Alt kan blive hele Tal, naar Man kun kan give y saadan Bestemmelse, at de tvende Brøk $\frac{gy}{a}$ og $\frac{n}{a}$ tilsammen udgjøre enten et heelt Tal eller 0. Herpaa beroer hele Sagen, og dette er just det, som i Følgende skal vises, at kunne skee paa en kort og let Maade.

§ 9.

Naar tvende Brøk tilsammen skal gjøre een eller flere Hele, da maae deres Tællere tilsammenlagde være af lige Sum med deres fælles Nævner, naar, hvad der var blandet Brøk, ved Division var bragt til virkelig Brøk og begge vare bragte til fælles Nævner. Er derimod begge Tællerne lige store, og derhos den ene Bekræftende, den anden Nægtende, da bliver Brøken $= 0$. Heraf følger, at, naar Man i de tvende Brøk $\frac{gy}{a}$ og $\frac{n}{a}$ (§ 8) kan give y saadan Bestemmelse, at den overblevne Rest, naar gy var divideret med a, blev tilligemed n en Sum $=$ a, eller og begge tilsammen $= 0$, saa er opnaaet, hvad Man forlangte, at Brøken ophører at være Brøk, y har den antagne Værdie i heelt Tal, og x bestemmes af Æqvationen ligeledes i heelt Tal.

§ 10.

Ligesom Coefficienterne ved de ubekjendte Størrelser i Hoved-Æqvationen ikke maae have fælles Divisor eller Aliqvotdeel, saa maa heller ikke Nævneren og Coefficienten af y i den Brøk, som skal gjøres til heelt Tal, have fælles Aliqvotdeel; thi dette kunde ikke have Sted, uden den samme Divisor har været i Hoved-Æqvationen, og i Fald Man vil hæve den ved Reduction, bliver Følgen den samme, som der, fordi n maatte ogsaa her divideres. (See § 3 og 8.)

§ 11.

I den omhandlede Brøk $\frac{gy + n}{a}$ er g altid mindre end a; ligeledes er ogsaa n altid mindre end a. Vi ville kalde Forskjellen mellem g og a med det Bogstav d, saa at $g = a - d$. Hvis nu ogsaa y faaer en bestemt Værdie $= l$, saa er $gy = gl = al - dl$. Sæt, at denne divideres med a, faaer Man Qvotienten $= l$ og det Overblevne $= - dl$. Sæt dernæst, at Man ogsaa dividerer dl med a, bliver Qvotienten $= o$, men det Overblevne er $= + dl$. Heraf sees, at den overblevne Rest bliver den samme i begge Tilfælde, saavidt den absolute Størrelse angaaer, men med forskjellige Tegn, dog naar dette gjøres med Tal, maa Coefficienten g ligeledes udtrykkes i dette $a - d$, hvoraf følger, at, naar Man vil finde hvad Rest der bliver tilovers, efterat have divideret gy med a, kan Man efter Beqvemmelighed multiplicere enten g eller d med den antagne Værdie af y og derefter dividere Producten med a.

§ 12.

Af det, som nu i alle foregaaende §§ er beviist, kan Man let, undertiden med et Øiekast, give y en Bestemmelse, hvorved Brøken $\frac{gy + n}{a}$ bliver et heelt Tal og følgelig ogsaa x faaer en dertil varende Værdie i heelt Tal. Man vælger enten g eller d. Disse multiplicerer Man for det meste i Hovedet og dividerer Producten med a. Hvis den overblevne Rest bliver enten $= n$ eller lige med Forskjellen mellem n og a (hvilken vi ville kalde k), saa er det Tal, hvormed Man har multipliceret, en Værdie af y, med hvilken g multipliceres, og dertil lægges eller fradrages n (§ 9), hvilket letteligt kan sees, hvad der af disse to skal gjøres. F. Ex. Vi ville bringe $\frac{15y + 8}{17}$ til heelt Tal. Her er $d = 2$ og beqvemmere bruges med det større Tal 15 eller g. Naar dette Tal 2 multipliceres, seer Man strax, at $2 \times 4 = 8 = n$, men 8 divideret med 17 giver en Rest $= 8$; altsaa er 4 den Værdie, som gives y; hvortil føies $n = 8$ og Man faaer et heelt Tal; thi $\frac{15 \times 4 + 8}{17} = 4$. Et andet Exempel $\frac{5y + 13}{19}$; her er d betydelig større end g; altsaa benyttes $g = 5$. Her er $k = 6$. Hvis Man nu giver y Værdien 5 og multiplicerer denne med g og dividerer med $a = 19$, bliver den overblevne Rest $= 6 = k$; følgelig er $y = 5$, hvorved Brøken bliver et heelt Tal; thi $\frac{5 \times 5 + 13}{17} = 2$.

§ 13.

Efter Foranførte bliver n snart at addere til Producten gy, snart at subtrahere, for at bringe Brøken til et heelt Tal, hvilket for det meste strax viser sig; dog kan Man ogsaa letteligt lægge Mærke til, at, hvor Producten er tagen ved g, bliver den overblevne Rest, efter Divisionen med a, altid nægtende (§ 11) og, hvis den da er $= n$, bør n subtraheres, men, hvis $-k$ var den overblevne Rest, maa n, som fylder den til en Heel, adderes, efterdi k ligger da allerede forhen i Producten og var et Overskud over et Heelt. Tvertimod har Man faaet Producten ved at multiplicere d og derefter dividere den med a, bliver den overblevne Rest bekræftende, og følgelig, ifald det er n, maa den lægges til Producten gy, men er den overblevne Rest $= k$, som da burde adderes, kan i det Sted dennes Complement til en Heel, nemlig n, subtraheres fra gy; thi k var da Noget, som manglede paa det Hele; tager Man da dens Complement n derfra, saa mangler (saa at sige) en Heel paa Hele, hvorved ogsaa noget Heelt maa blive tilbage.

Til fuldstændigere Oplysning vil jeg anføre følgende Exempel $\frac{3y + 1}{5}$ og deri benytte baade g og d, hvor $g = 3$, $d = 2$ og $n = 1$; $k = 4$

$g \times y : a$	Rest		n	$d \times y : a$	Rest		n
$3 \times 2 : 5$	1	Subtr.	1	$2 \times 2 : 5$	4	Subtr.	1
$3 \times 3 : 5$	4	Add.	1	$2 \times 3 : 5$	1	Add.	1
$3 \times 7 : 5$	1	Subtr.	1	$2 \times 7 : 5$	4	Subtr.	1
$3 \times 8 : 5$	4	Add.	1	$2 \times 8 : 5$	1	Add.	1
$3 \times 12 : 5$	1	Subtr.	1	$2 \times 12 : 5$	4	Subtr.	1

Heraf sees den korte Regel, at, hvor den overblevne Rest er $= n$, skal denne i første Fald subtraheres, i andet Fald adderes, men bliver den $= k$, da skal n i første Fald adderes, i andet Fald subtraheres (see de Exempler i forrige §).

§ 14.

Her kunde maaskee Nogen ville giøre den Indvending, at i disse Maader at bringe en Brøk til heelt Tal, har Man stedse anseet gy og n, som Størrelser uden Hensyn til deres enten bekræftende eller nægtende Beskaffenhed, saa at de enten Begge maatte ansees som Bekræftende eller Nægtende, da der dog kunde indtræffe $\frac{-gy+n}{a}$ eller $\frac{gy-n}{a}$, men da her kun handles om at give y en Bestemmelse, hvorved Brøken kan blive et heelt Tal, kan Man gjerne give den enten en bekræftende eller nægtende Betydning, naar det Forlangte derved opnaaes. Det staaer desuagtet altid i vor Magt at skaffe begge Størrelserne gy og n samme Tegn ved den Forandring, Man kan give y. Dette skader heller ikke Hoved-Problemet, hvorom her handles, hvor een af Betingelserne er, at y altid skal være Bekræftende; thi Problemet lettes og forkortes just ved, at jeg efter min Plan kan ogsaa antage $-y$, eftersom Man strax kan gaae over til $+y$, det kommer kun an paa at finde en Værdie af y (§ 7).

§ 15.

I Overeensstemmelse med foranførte Betragtninger kan nu de mere specielle Regler deraf udledes:

1) Hvis $n = 0$, d. e. der er ingen n, sees strax, at Brøken kan blive $= 0$, hvis y sættes $= 0$, hvorfra Man, som før er viist, kan gaae over til virkelige Værdier, eller Man kan give y en Værdie $= a$, da Brøken $\frac{gy+0}{a}$ maa blive $= g$ og altsaa et heelt Tal. Men dette er og en Følge af den foranførte Theorie (§ 12); thi, naar Man har divideret med a, bliver den overblevne Rest $= n = 0$.

2) Hvis Coefficienten g er en Aliqvotdeel af n og den anden Aliqvotdeel da kaldes e, kan Man sætte y = denne og subtrahere n, som da er $= ge$; thi $\frac{gy+n}{a} = \frac{ge+ge}{a}$, følgelig $ge - ge = 0$. Dette er ogsaa en Følge af foranførte Theorie; thi $gy = ge = n$ er altid mindre end a, og,

naar da $ge - n$ divideres med a, bliver den overblevne Rest $= n$, i hvilket Tilfælde Brøken kan ophæves (§ 12). F. Ex. $\frac{23y + 161}{145}$. Lettelig sees, at 161 lader sig dividere med $g = 23$, da Qvotienten bliver $= 7$, men $\frac{23 \times 7 - 7 \times 23}{a} = 0$.

3) Hvis g er en Aliqvotdeel af det, som fylder n til a eller Complementet $k = a - n$, kan y ogsaa antages ligemed den anden Aliqvotdeel af k er $= \frac{a - n}{g}$. Naar denne substitueres for y i Brøken $\frac{gy + n}{a}$, faaer Man $\frac{\frac{ga - gn}{g} + n}{a} = \frac{a - n + n}{a} = \frac{a}{a} = 1$. Den overblevne Rest, naar gy divideres med a, bliver her $- n$ og følgelig anviser, at Brøken paa denne Maade kan bringes til et Heelt; thi $\frac{gy}{a} = \frac{a - n}{a}$, hvorved den ommeldte Rest $- n$ udkommer. F. Ex. $\frac{8y + 7}{55}$. Her er $k = 55 - 7 = 48$, hvoraf $g = 8$ er en Aliqvotdeel, men den anden aliqvote Deel $= 6 = y$. Brøken bliver da $= \frac{8 \times 6 + 7}{55} = 1$.

4) Hvis d er en Aliqvotdeel af n, kan y sættes lige med den anden aliqvote Deel og n adderes. Lad den anden aliqvote Deel kaldes h, saa bliver $\frac{gy + n}{a} = \frac{gy + dh}{a}$, og, da $a = g + d$, men $y = h$, bliver $\frac{gy + dh}{a} = \frac{gh + dh}{g + d} = h$; altsaa et heelt Tal. Vil Man ogsaa her finde den Rest, som kommer ud efter at gy er divideret med a, saa mærkes, at $h = \frac{n}{d}$; altsaa $\frac{gy}{a} = \frac{\frac{gn}{d}}{a} = \frac{\frac{gn}{d}}{g + d}$; (naar Divisionen skeer) bliver $- n$ tilovers, som atter viser, at Brøken ved den Værdie af y bliver et heelt Tal. F. Ex.

$\frac{19y+20}{23}$. Her er $d = 4$, som er en Aliqvotdeel af $n = 20$; den anden aliqvote Deel er $= 5 = 9$, som giver et heelt Tal $\frac{19 \times 5 + 20}{23} = 5$.

5) Hvis d er en Aliqvotdeel af k eller af det, som fylder n til a, kan y ligeledes sættes $=$ den anden aliqvote Deel, som vi vil kalde h, da n subtraheres fra gy. I den oftommeldte Brøk $\frac{gy+n}{a}$ bliver $a = g + d$, $k = h + d$, $n = g + d - dh$, $y = h$, naar Man da subtraherer n fra gy, bliver Brøken ved den behørige Substitution $= \frac{gh - g - d + dh}{g + d} = h - 1$; altsaa et heelt Tal. Hvis Man ogsaa her dividerer $gy = gh$ med $a = g + d$, bliver den overblevne Rest $= - hd = - k$, som ligeledes viser, at Brøken bliver et heelt Tal; thi subtraherer Man tillige n, faaer Man $-\frac{k}{a} - \frac{n}{a} = -1$ (§ 8. 9); f. Ex. $\frac{47y+39}{51}$, hvor $d = 4$, $k = 12$, $h = 3$, $y = 3$; $\frac{47 \times 3 - 39}{51} = 2$.

6) Naar de givne Størrelser g, n, a ikke ere høie Tal, d. e. ikke over 10 à 12, hvilket vel som oftest er Tilfælde, kan y overmaade let og i en Hast bestemmes ved efterhinanden i Hovedet at multiplicere g mod 1, 2, 3 ꝛc., dertil addere eller subtrahere n, og ligeledes i Hovedet forsøge, om det lader sig dividere med a. Skulde Man finde, at $+ n$ burde subtraheres, eller $- n$ adderes, kan Man desuagtet opfylde Hensigten, som er Brøkens Ophævelse, ved at give y en nægtende Bestemmelse, hvorved gy forandres fra Nægtende til Bekræftende og fra Bekræftende til Nægtende, naar dette skulde være fornødent til ommeldte Hensigt. Man kan og ved de Bestemmelser, Man giver y, forsøge strax at dividere gy med a; hvis den overblevne Rest bliver enten n eller k, seer Man strax, at den Værdie, Man har givet y, er den, som kan gjøre Brøken til et heelt Tal (§ 12). Den første Værdie af y, Man finder at kunne ophæve Brøken, antages, den maatte saa være Bekræftende eller Nægtende eller 0; f. Ex. $\frac{7y+9}{12}$. Strax seer Man,

at $y = 1$ eller $= 2$ ikke opfylder Hensigten, men sættes den derimod $= 3$ og gjøres Nægtende, udkommer der et heelt Tal $\frac{7 \times -3 + 9}{12} = -1$. Hvis Man i $\frac{9y+10}{11}$ antager $y = 5$, bliver $\frac{9 \times 5 + 10}{11} = 5$. Hvis Man i Brøken $\frac{9y+13}{17}$ sætter $y = 8$, faaes $\frac{9 \times 8 + 13}{17} = 5$. I dette Exempel er $n = 13$, $k = 4$, naar Man i Tankerne multiplicerer 9 med 1, 2, 3 ꝛc. og uden at addere eller subtrahere $n = 13$, strax dividerer med 17, seer Man at 9×8, divideret med 17, efterlader en Rest $= 4 = k$, og at 8 er den rette Værdie; hvilken Fremgangsmaade er den nemmeste og hurtigste.

7) Uagtet nu den i forrige § angivne Maade (især, naar Man benytter den, som tilsidst blev nævnt, at dividere blot gy med a) let og hastig opfylder hvad der forlanges, kunde dog indtræffe, at de Tal g, n og a vare saa høie, at det endnu vilde koste nogen Umage at finde den fyldestgjørende Værdie af y og hvor heller ikke nogen af de foregaaende Nummere kunde benyttes, da først var det fornødent, at tage sin Tilflugt til det Middel, at sætte den givne Brøk = et andet heelt Tal og at finde dette Tals Værdie, men ved Hjelp af Foranførte behøves heller ikke da den Vidløftighed, som sædvanligen bruges. Man kan standse, hvor en ny udbragt Brøk giver nye g, n, a, som lade sig behandle efter No. 6. Fra den sidste Ubekjendte, som da findes, gaaer Man over til de Forrige ved at substituere de fundne Værdier, hvilket ved et Exempel bedst sees.

Lad den givne Brøk være $\frac{47y+39}{52}$. Denne sætter Man $= p$, som et heelt Tal. Heraf følger videre: $47y = 52p - 39$, $y = p + \frac{5p - 39}{47}$. Sæt $\frac{5p-39}{47} = r$, $5p = 47r + 39$, $p = 9r + \frac{2r+4}{5} + 7$. Efter No. 2 eller 6 kan r antages $= -2$, hvorved Brøken $= 0$ og $p = -18 + 7 = -11$, $y = -11 - 2 = -13$. Naar denne

Værdie substitueres i den første givne Brøk, faaer Man $\frac{47 \times -13 + 39}{52}$ $= -11$. Vilde Man havt en bekræftende Værdie, kan let sees, at i Ovenstaaende kunde Man ogsaa antaget $r = 3$, hvorved $p = 36$ og $y = 39$, hvilket gjør $\frac{47y + 39}{52} = 36$.

§ 16.

Efter at have viist, hvorledes en Brøk af den givne Form med en ubestemt Størrelse kan ved dennes Bestemmelse gjøres til et heelt Tal, kommer vi nu tilbage til Hoved-Problemet, hvilket derved kan ansees som opløst. Man søger nu ogsaa Værdien af x i den Æqvation, som fremstiller den i bekjendte Størrelser i Forbindelse med den nu ogsaa bekjendte y (§ 8). Naar da baade x og y har faaet deres første Bestemmelser, fortsættes de videre efter § 5, og det viser sig da af sig selv, om to bekræftende Værdier kan faaes, een for hver, og hvormange saadanne Par der gives. Med Flid vil jeg vælge et Exempel af den Vidløftighed, at de første sex Nummere i forrige § ikke strax med Lethed lader sig anvende, men Man maa tregange tage sin Tilflugt til No. 7, men er desuagtet langt lettere afgjort end sædvanlig.

Sæt, at Een eier 19135 Spec. Disse tænker han at anvende paa at kjøbe to Sorter Varer; hvert Stykke af det ene Slags koster 254 Spec., af det Andet 323. Spørges, hvormange kan kjøbes af hver Sort? Antallet af det første Slags kalde vi x, af det Andet y. Hoved-Æqvationen bliver $254x + 323y = 19135$. Efter § 8 søges $x = 75 - y - \frac{69y + 85}{254}$. Her er den Brøk, som skal blive heelt Tal. Sæt $-\frac{69y + 85}{254} = p$, saa er $-69y = 254p - 85$ og $y = -3p - \frac{47p + 16}{69} + 1$; sæt $-\frac{47p + 16}{69}$ $= q$, saa er $-47p = 69q - 16$ og $p = -q - \frac{22q + 16}{47}$; sæt endelig $-\frac{22q + 16}{47} = r$, saa er $-22q = 47r - 16$ og $q = -2r$

$-\frac{3r+16}{22}$. Her sees strax efter § 15 No. 6, at r kan antages $= -2$, hvoraf følger ved behørig Substitution, at $q = 4+1$, $p = -5-2$, $x = 75 - 27 - 7 = 41$, $y = 21 + 5 + 1 = 27$.

Vil Man nu fortsætte disse Værdier af x og y ved at lade den Ene vore, den Anden formindskes efter § 5, sees, at de ikke Begge kan blive Bekræftende og at de Fundne altsaa ere de Eneste.

§ 17.

Hensigten af nærværende ringe Afhandling har deels været at give en almindelig Theorie om denne Sag, deels ogsaa at vise, hvorledes Problemet om de ubestemte, eller som Nogle kalde det, halv-ubestemte Æqvationer langt lettere end sædvanlig kan opløses. De Exempler, som videre skulde tjene til at oplyse, hvad som desangaaende er sagt, bør lettest være de samme, som af Andre forhen ere brugte for at vise deres Maade i at beregne dette Slags Problemer. Saasom: af 864 Centner Metal skal støbes to Slags Kanoner. Enhver Kanon af det ene Slags skal veie 5 Centner, hver af det Andet 12 Centner, spørges, hvormange Kanoner kan der faaes af hvert Slags? Antallet af det Første kaldes x, af det Andet y. Hoved-Æqvationen bliver $5x + 12y = 864$, og $x = 172 - 2y - \frac{2y+4}{5}$. Efter No. 2 saavelsom No. 6 i § 15 sætter jeg strax $y = 2$, hvorved x tillige er bestemt $= 168$, hvorefter begge Rækker fortsættes ved Addition og Subtraction, som før er meldt.

$$y = 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \ldots\ldots\ 67,\ 72,\ 77$$
$$x = 168,\ 156,\ 144,\ 132,\ \ldots\ldots\ 12,\ 0,\ -12$$

Da 0 og — efter Betingelserne ikke antages, bliver $y = 67$ og $x = 12$ det sidste Par, som kan bruges. De samme Værdier af x og y, som her ere beregnede, har Professor Bugge udbragt ved en vidløftig Regning paa halvanden Side (see hans Algebra Cap. 8 § 163).

Et andet Exempel af samme Auctor: En Kiøbmand skylder den Anden 1200 Rd., som skal betales ved at levere to forskjellige Sorter Klæde. Den ene Sort koster 5, den Anden 7 Rd. Alnen. Spørges, hvormange Alen skal leveres af hver Sort? Naar de kaldes x og y, bliver Æqvationen $5x + 7y = 1200$, $x = 240 - y - \frac{2y}{5}$. Her behøver Man kun efter No. 1 i § 15 at sætte $y = 0$ eller $= 5$. I første Fald bliver $x = 240$ og i andet Fald $= 233$, og Rækkerne fortsættes efter § 5.

$$y = \quad 0, \quad 5, \ 10, \ 15, \ 20, \ \ldots\ldots \ 170$$
$$x = 240, 233, 226, 219, 212, \ \ldots\ldots \quad 2$$

Samtlige hos bemeldte Auctor anførte Exempler kan efter § 15 ligesaa let beregnes.

§ 18.

Endnu maa jeg anføre et lidet forskjelligt Exempel af en anden Auctor (Leonard Eulers Anleitung zur Algebra 2ter Theil 2ter Abschn. § 14).

At finde et Tal N, som divideret med 39 efterlader en Rest $= 16$, men divideret med 56 efterlader en Rest $= 27$. Qvotienten ved første Deling kalde vi x, den ved anden Deling y. Nu bliver $N = 39x + 16 = 56y + 27$ og $39x - 56y = 11$, $x = y + \frac{17y + 11}{39}$. Sæt $\frac{17y + 11}{39} = p$, saa er $17y = 39p - 11$ og $y = 2p + \frac{5p - 11}{17}$. Efter No. 6 § 15 sees strax at 5×9 divideret med 17 efterlader 11, følgelig er $p = 9$ og $y = 2p + \frac{5p - 11}{17} = 18 + 2 = 20$ og $N = 56y + 27 = 1147$. Da y voxer ved 39 (§ 5), maa N ligeledes voxe ved $39 \times 56 = 2184$, hvorved en Række af N dannes $= 1147, 3331, 5515$ ꝛc., som alle opfylde Betingelserne. Af ovenstaaende Æqvationer sees, at $x = 29$. Denne voxer ved 56, og naar x behandles efter samme Regler, som y, faaes de samme Bestemmelser for N, som de, der fandtes ved y.

Anmærkn. Ligesom ikke alle ubestemte Æqvationer kan opfylde Betingelserne, saa bliver heller ikke dette Problem altid muligt. De givne Divisorer blive her Coefficienter ved Qvotienterne x og y; naar altsaa disse Divisorer have fælles Aliqvotdeel, kan, som før er viist, x og y ikke findes i hele Tal. Saaledes er der intet Tal, som divideret med 9 skulde efterlade 5 og divideret med 15 skulde efterlade 7; thi da blev $9x + 5 = 15y + 7$, $9x = 15y + 2$, $x = y + \frac{6y+2}{5}$, hvilken Brøk ikke lader sig omdanne til heelt Tal ved nogen Bestemmelse af y (§ 10). Hvis derimod den ansatte Rest efter begge Divisioner er af den Beskaffenhed, at deres indbyrdes Forskjel giver et Tal, der har samme Aliqvotdeel, som Coefficienterne ved x og y, bliver Problemet muligt, saasom i foranførte Exempel, hvis Tallet divideret med 15 havde efterladt 8; thi nu bliver $9x + 5 = 15y + 8$, $x = y + \frac{6y+3}{9} = y + \frac{2y+1}{3}$, y bliver $= 1$; $x = 2$ og $N = 23$, hvilket Tal har de forlangte Betingelser.

§ 19.

Det i foregaaende § hos Euler fremsatte Problem kunde fortjene en mere udstrakt Betragtning og Opløsning, nemlig, at finde det Tal, som divideret med et større Antal givne Divisorer maatte ved hver Division efterlade en bestemt Rest; f. E. at finde et Tal N, som divideret med 9 efterlader 3, divideret med 7 efterlader 4, med 2 efterlader 1. Beregningsmaaden er denne: Saa mange Divisorer og overblevne Tal, der gives, saa mange Æqvationer faaes i ubestemte Tal, saasom her: $N = 9x + 3$, $N = 7y + 4$, $N = 2z + 1$. Da tre Størrelser kan combineres, to og to, paa tre Maader, saa bliver heraf tre ubestemte Æqvationer, nemlig: $9x + 3 = 7y + 4$, $9x + 3 = 2z + 1$, $7y + 4 = 2z + 1$, men det er nok, at een sættes i Forbindelse med de to Andre for at finde en Værdie af den, saasom x, eller hvilken af dem det var, som blev den Samme i begge Æqvationer; thi enhvers Værdie maa bestemmes af den Relation, som den har til alle de Andre. Af den saaledes fundne x eller y &c. findes det søgte Tal N i den dertil hørende Æqvation, og da N i alle Æqvationerne er den samme, behøver Man ikke at giøre den Operation med mere end een af de Ubestemte, hvilket let fuldføres ved den i § 15 anviste Methode. Til fuldstændigere Forklaring herpaa vil jeg her anføre de tre Par Rækker, som i det ommeldte Exempel kunne beregnes:

I. $9x+3 = 7y+4$, $9x = 7y+1$, $x = \frac{7y+1}{9}$
$y = 5, 14, 23, 32, 41$ ꝛc.
$x = 4, 11, 18, 25, 32$ ꝛc.

II. $9x+3 = 2z+1$, $2z-9x = 2$, $z = 4x+\frac{x+2}{2}$
$x = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ꝛc.
$z = 10, 19, 28, 37, 46, 55$ ꝛc.

III. $7y+4 = 2z+1$, $2z = 7y+3$, $z = 3y+\frac{y+1}{2}+1$
$y = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ ꝛc.
$z = 5, 12, 19, 26, 33, 40, 47$ ꝛc.

Den Værdie 4 træffes i de to Rækker, hvori x forekommer. Den er altsaa anvendelig, og $N = 9x+3 = 39$, som har de forlangte Egenskaber; y findes i dens tvende Rækker $= 5$, og z findes $= 19$, hvilke afgive samme N, som ogsaa forestilles ved en Række; thi den maa voxe ved et Product af samtlige Divisorer, saasom her: $9 \times 7 \times 2 = 126$; altsaa $N = 39\ 165\ 291\ 417\ 543$ ꝛc.

§ 20.

Vil Man forestille denne Sag mere almindelig, og finde et Tal N, som divideret n Gange med ligesaa mange givne Divisorer, hvis overblevne Tal ogsaa gives, bliver Æqvationernes Antal lige med Summen af samtlige Combinationer, naar de forskjellige Udtryk af N combineres, to og to, med hinanden $= n\frac{(n-1)}{1\times 2}$, af hvilke Man dog ikke behøver at beregne flere end $n-1$, de nemlig, hvori x eller y ꝛc. forbindes med enhver af de Andre. Den Værdie af x eller y ꝛc., som findes at være den samme i alle Rækker, er den, hvorved N bestemmes; f. Ex. Man vil finde det Tal, som, naar det divi=

deres med 9, 7, 5, 4, efterlader i samme Orden 7, 2, 4, 3. Her bliver N $= 9x + 7 = 7y + 2 = 5z + 4 = 4v + 3$, hvoraf faaes $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ Æqvationerne, hvoraf $n - 1 = 3$ benyttes for at beregne tre Rækker, som forestille Værdierne af x eller y ꝛc., saasom i dette Exempel: $x = 3, 8, 13$ ꝛc. $x = 4, 8, 12$ ꝛc. Af disse kan ikke benyttes Andre end 8, eller hvilken Værdie, der i Rækkernes Fortsættelse fandtes at være den samme i alle tre; altsaa $N = 9 \times 8 + 7 = 79$. Denne kan fortsættes ved et Tillæg af Producten $9 \times 7 \times 5 \times 4 = 1260$, hvorved faaes følgende $N = 79, 1339, 2599, 3859$ ꝛc.

§ 21.

Et andet Slags ubestemte Æqvationer, hvor der er flere end to ubekjendte Størrelser, men ikkun een Æqvation, saa at de mange Ubekjendte ikke ved flere Æqvationer lade sig reducere til to, saasom $ax + by + cz$ ꝛc. $= f$. Disse kan beregnes paa følgende Maader:

1) Da Man kun forlanger, at x, y, z ꝛc. skal bestemmes i Værdier, som udtrykkes i hele og bekræftende Tal, kan disse vælges indtil to, som efterlades ubestemte, men ogsaa bestemmes i hele Tal paa den Maade, som er viist, allene, at Man ikke tillægger dem, hvis Værdie Man efter Behag antager, en saadan Sum, at det, som bliver tilovers for at fordeles paa de to Sidste, enten ikke er tilstrækkeligt, eller ikke i hele Tal kan fordeles paa dem, hvilket strax vil vise sig, naar den Æqvation, som de for sig allene da afgiver, behandles og opløses.

2) Man kan og, uden at vælge nogen Bestemmelse forud, under eet paa eengang opløse og beregne den hele Æqvation med alle dens Ubekjendte, naar Man i Æqvationen beholder kun een Ubekjendt paa den ene Side og overfører alle de Andre paa den anden Side tilligemed den bekjendte Sum. Derpaa divideres Alt med den Enes Coefficient. De forskjellige Brøk, som derved fremkomme, i hvis Tællere ere y, z ꝛc., omdannes til hele Tal, hvorved den korte Maade, som er viist § 15, gjør god Tjeneste. Saa-

ledes bliver samtlige Ubekjendte fundne og bestemte i hele Tal. Begge Maader vises ved et Exempel i følgende §§.

§ 22.

En har 500 Spec., ved hvilke han vil kjøbe tre Sorter Kornvarer, saasom Hvede, Rug og Byg. En Tønde Hvede kan faaes for 13, Rug for 9 og Byg for 7 Spec. Naar Tøndernes Antal af hver Sort kaldes x, y, z, bliver $13x + 9y + 7z = 500$. Kjøberen finder det beleiligt at kjøbe 12 Tønder Hvede, saa at $x = 12$ og $500 - 12 \times 13 = 344$, for hvilke de to andre Sorter skal kjøbes; altsaa $7z + 9y = 344$, $z = 49 - y - \frac{2y+1}{7}$. Her sees strax, at y kan ansættes $= -3$; thi $\frac{-2(-3)+1}{7} = 1$, hvorved z findes at være $= 53$, og Rækkerne blive følgende:

$$y = -3, +4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 \text{ ꝛc.}$$
$$z = 53, 44, 35, 26, 17, 8, -1, -10 \text{ ꝛc.}$$

Af disse vælger han hvilket Par af de Bekræftende, han vil, og f. Ex. kjøber 12 Tønder Hvede, 25 Rug og 17 Byg.

Sæt, at han af Hveden ønsker 36 Tønder $= x$, saa bliver $7z + 9y = 32$ og $z = 4 - y - \frac{2y+4}{7}$ og $y = 2 + 9$, $z = 2 - 7$. Her bliver altsaa ikkun een Bestemmelse muelig, nemlig $x = 36$, $y = 2$, $z = 2$. Sættes derimod $x = 35$, saa er $7z + 9y = 45$, $z = 6 - y - \frac{2y+3}{7}$,

$$y = -2, +5, 12 \text{ ꝛc.}$$
$$z = +9, 0, -9 \text{ ꝛc.}$$

Her kan Betingelserne ikke opfyldes formedelst nægtende Størrelser eller 0, som forbindes med de Bekræftende.

Enhver seer at her er Anledning til mangfoldige forskjellige Bestemmelser for samtlige Ubekjendte ved at give dem selvvalgte Bestemmelser, større og mindre, nær paa de to, dernæst ved at omskifte disse to og lade snart et Par, snart et Andet være ubestemt for at beregnes.

§ 23.

Til at vise den anden Maade, hvorledes alle de Ubekjendte findes, uden i Forveien at vælge Nogles Bestemmelse, vil vi bruge samme Exempel og Æqvation $7z + 9y + 13x = 500$. Man fører Alle, foruden Een, paa den anden Side, og derefter dividerer med dennes Coefficient, saasom $7z = 500 - 9y - 13x$, $z = 71 - y - \frac{2y + 3}{7} - x - \frac{6x}{7}$. De to, eller flere Brøk, som her indtræffe, gjøres til hele Tal efter § 15, hvorved y findes $= 5$, $x = 7$. Begge lader Man voxe ved Coefficienten af $z = 7$, hvorved Man faaer følgende Rækker:

$$y = 5, 12, 19, 26 \text{ &c.}$$
$$x = 7, 14, 21, 28 \text{ &c.}$$
$$z = 52, 30, 8, -14 \text{ &c.}$$

Z bestemmes af Æqvationen, naar x og y først ere bestemte, men dens Formindskelse skeer ved Summen af de andre ubekjendte Størrelsers Coefficienter, saasom her $13 + 9 = 22$. Denne Formindskelse kan ogsaa findes paa den Maade, at Man af Værdierne i det andet Nummer for y og x nemlig 12 og 14 søger, hvad der kan komme paa z; saaledes er $z = 500 - \frac{9 \times 12 - 13 \times 14}{7} = 30$, som er 22 mindre end 52.

Her aabnes ogsaa en Vei til at finde mange forskjellige Bestemmelser for de Ubekjendte, af hvilke der efter Behag kan vælges; thi 1) kan Man paa foranførte Maade, ligesom der gjordes ved z, benytte samtlige Ubekjendte, den Ene efter den Anden, hvorved nye Rækker vil fremkomme; 2) i de adskillige Brøk, som derved opstaae, kan Man benytte snart een, snart en anden Værdie af x, y &c., hvorved Brøken forvandles til heelt Tal, hvilket strar gjør Forandring i den hele Æqvation og giver forskjellige Rækker af de til hinanden svarende Værdier, saasom, naar vi i ovenanførte Æqvation $z = 71 - y - \frac{2y + 3}{7} - x - \frac{6x}{7}$ antog $y = 5$ og $x = 7$, udbragtes ganske andre Værdier af y, x, z end om Man begyndte med $x = 0$. Ved Beregningen kommer da

$$y = 5,\ 12,\ 19,\ 26$$
$$x = 0,\ 7,\ 14,\ 21$$
$$z = 65,\ 43,\ 21,\ -1$$

hvor baade 12, 7, 43 og 19, 14, 21 kan benyttes som Værdier af y, x, z; thi $9 \times 19 + 13 \times 14 + 7 \times 21 = 500$.

Anmærkn. I dette Slags Æqvationer, hvor der er flere end to Ubekjendte, kan Samtlige findes og bestemmes i hele Tal, om endog deres Coefficienter have fælles Divisor, naar der kun er Een, som undtages derfra. Dette er en Følge af de Opløsnings-Maader, som ere viste i § 21; thi kan Man vælge Bestemmelser for samtlige, nær paa to, kan den, som ikke har fælles Divisor, være Een af de To. Benytter Man derimod den anden Methode, kan Man vælge just den, som ikke har fælles Divisor, at sættes allene paa den ene Side af Æqvationen for at overføre alt det Øvrige, eller Man kan vælge den til at forbindes med det, som er tilovers, naar Æqvationens bekjendte Sum er divideret, efterdi alle de øvrige Brøk faaer den Form $\frac{ay}{b}$, hvilken altid kan blive et heelt Tal, omendskjøndt a og b have fælles Divisor (§ 15 No. 1).