XXV.

Betragtning

over

uendelige Størrelser

i

forskiellige Ordener,

af

Diderich Christian Fester.

§. 1.

Er der nogen Videnskab, som af visse Lærde hoit er bleven ophoiet over andre Videnskaber, men derimod af nogle andre paa en uforstandig og ubillig Maade er forkastet; saa bliver det den Videnskab, som af Araberen **Geber** har bekommet det Navn Algebra. Visse retskafne Lærde bør man holde den liden Forfængelighed og Skrobelighed tilgode, at de føle en Fornoielse over deres egne Indsigter, som en Mængde andre deres Medskabninger intet veed af at sige. Denne Fornoielse er desto storre, jo storre og hoiere Nytte der kan flyde af disse Indsigter; jo vanskeligere saadanne Indsigter kan opnaaes; jo mindre Antallet bliver af de Mennesker, der kan besidde den samme Fuldkommenhed. Altsaa kan det ikke være saa forunderligt, at endeel Algebraister mangle Ord, for at oplofte deres Videnskab til Himmelen.

§. 2.

Paa den anden Side feiler det ei heller paa et Antal af nogle visse Lærde, som have været meget avindsyge paa denne uskyldige Videnskab. Der har enten manglet dem Evne eller Tid, Flid og Taalmodighed, til at erlange den rette Indsigt i en algebraisk Grundvold. For at skiule denne deres svage og afmægtige Side, for at giengielde den Misfornoielse, de have folet over deres egen Uformuenhed; saa bleve

ufor-

uforstandige Angreb, foragtelige og overilede Udtryk det sikkerste Middel, de vidste at gribe til. Derfor kaldes den af nogle en mørk og uforstaaelig Videnskab med uovervindelige Vanskeligheder; af andre en ganske unyttig Videnskab, som ikke tiener til andet end at udregne nogle krumme Linier; ja der har endog været nogle, som reent ud have erklæret dens Sætninger for falske og urigtige, ligesom den Blinde kan laste et Malerie, og den Døve en Musik. Man kan lettelig slutte, at disse svage Siele fuldkommen ere igiendrevne; ja det kostede vel ingen synderlig Møie at forsvare en saa vigtig og betydelig, en saa grundig og nyttig Videnskab, som uden Modsigelse er den største lysende Fakkel i Videnskabernes Rige.

§. 3.

Er der nogen Videnskab, som i den fuldkomneste Grad lærer os at tænke ordentlig og rigtig; at ordne, sammenføie og forbinde Tingene med hinanden; at vælge, antage, slutte og dømme med de modneste Overlæg; allene ved nogle simple Tegn og Bogstaver paa en liden Plads, at forestille en Mængde forskiellige Størrelser i en ordentlig Forbindelse og Sammenligning med hinanden; derved allene ved nogle faa Omflytninger og Forandringer stedse at opdage lutter Sandheds-regler og Formuler til at finde de dybeste og forborgneste Ting; da er det ganske vist og upaatvivlelig den algebraiske Videnskab frem for nogen anden. Derfor udkræver og denne dybsindige Videnskab et opvakt Genie, en sund Fornuft, en moden Dommekraft og Forstandens stærkeste Anspændelse, naar den i sin vidtløftigste Udstrækning ret skal kiendes, prøves, følges, giennemvandres og anvendes. Ved denne Videnskab kan den forskende Siel udsøge, opdage og udfinde Sandhed; derved lærer den retskafne Lærde, at kiende de Veie og Hielpemidler, hvorved man kan komme til Undersøgning og Forbedring i de mange

Slags

Slags Videnskaber, som findes i den menneskelige Kundskabs Omfang; hvorledes man maae arbeide sig igiennem moisommelige og vidtloftige Irgange, forend man sikkert kan gribe Maalet og holde fast ved samme; med Dybsindighed at forfølge enhver afsondret Tankekiede, som opblusser Videlyst; med betænkelige og varsomme Skridt at opstige paa Sandheds ophoiede Klippe; paa denne Klippe at udmerke de egentlige Steder, hvor man med fuld Dristighed tor vove en Overfart fra Formodningers Oe til Rimeligheders Land, fra Rimeligheders Land at overstige i Sandhedens Rige, og oploſte Forestillingen over alle Verdenordener indtil det Uendelige.

§. 4.

En saa dyb og skarpsindig Videnskab, som den Algebraiske, maatte ventelig i en lang Tid paa adskillige Steder være beheftet med nogle Vildfarelser, som stedse videre ere fortplantede, endog indtil de sidste Tider; men fornemmelig de Vildfarelser, som af store og beromte Mænd ere antagne og foredragne som Sandhed. Mange oprigtige Videnskabsbekiendere have den Svaghed i Sielen, at de blot forlade dem paa en beromt Mands Autoritet, ganske trohiertig folge og afskrive hans Foredrag, uden Provelse og Undersogning. Den forsigtige Videnskabsdyrker bor alletider, efter sikre og faste Grunde, noie randsage, prove, veie og bedomme Tingene fra alle Sider. Da kan han først med saadanne varsomme Skridt følge sin Dom, grundet paa egen Overbevisning om Tingenes fuldkomne Rigtighed; og med denne Forudsættelse giver han den beromte Mands Foredrag sit Bifald, og for en Sandhed ikkun antager det, som ere overeensstemmende med hans egen Overbevisning.

§. 5.

Den Lære, som angaaer de negative eller nægtende Størrelser, bliver et tydeligt Exempel paa den Nodvendighed, at giøre sig rette og sande Begreber om Tingene og deres Forbindelser, forend man vil bruge Tegn. Hos nogle Algebraister bliver det en meget uegentlig Talemaade, naar de sige, at nægtende Størrelser ere mindre end Intet. Dette uegentlige Udtryk har forledet endog berømte Mænd til merkelige Vildfarelser, at angive de negative Størrelser for falske; at udstøde dem af de sande Størrelsers Classe; og ikke at tage dem i Betragtning, naar de forekomme som Rodstørrelser af Ligninger. Kæstner anseer det som en Ydmygelse for den menneskelige Forstand, at Philosopher, som en Cartesius og Wolff, allene af et uegentligt Udtryk ere forførte til saadanne Vildfarelser.

§. 6.

Det bliver og et urigtigt Udtryk hos Wolff, Wiedeburg og andre flere udi den Lære, som angaaer Ligningers Natur, naar det heder: udi enhver Ligning ere saa mange positive Rodstørrelser, som der findes Tegnenes Afvexlinger; men der er en negativ Rodstørrelse i Ligningen for hver Gang et og det samme Slags Tegn følger næst efter hinanden. Da derimod det egentlige rette og bestemte Udtryk bliver dette: En Ligning kan have saa mange negative Rodstørrelser, som der ere Følger af et og det samme Slags Tegn udi samme; og den kan have saa mange positive Rodstørrelser, som der findes Tegnenes Afvexlinger. Ved denne Irring har jeg forandret de Ord, sande og falske Rødder, som de bemeldte Autorer bruge til positive og negative Rodstørrelser; thi da denne Vildfarelse for nylig er anmerket, saa holdt jeg det for tydeligst her at udelukke den første berørte Irring, at den anden desto bedre kunde merkes.

§. 7.

§. 7.

Ved de umuelige eller indbildte Størrelsers Multiplicationer og Divisioner med hinanden, have de fleste Algebraister angivet en urigtig Product og Qvotient. Berømte Mænd, saasom en Wolff, Hell, Clem og flere, ere endog i dette Antal. De paastaae, at tvende med hinanden multiplicerede umuelige Størrelser maae give en umuelig Product; og tvende med hinanden dividerede umuelige Størrelser give en umuelig Qvotient. Den berømte Euler har nøiere prøvet denne Sag, og givet Producterne samt Qvotienterne, der udkomme af de med hinanden multiplicerede, og af de med hinanden dividerede umuelige Størrelser, en fuldkommen Borgerret i Muelighedernes Rige; og Herr Professor Bugge har herpaa anført et net og artigt Beviis i den udkomne første Deel af hans mathematiske Haandbog.

§. 8.

I det allerstørste Antal af de algebraiske Lærebøger om Differentialregningen heder det: at Tangenten har tvende Punkter tilfælles med den krumme Linie, som den berører, hvilket er en aabenbar Urigtighed; thi naar den rette Linie skal have tvende virkelig forskiellige Punkter tilfælles med den krumme, saa bliver det en Secant, og ingen Tangent. En urigtig Forestilling angaaende Differentialet af Abscisser og Semiordinater har formodentlig forledet til dette falske og urigtige Udtryk. Man kommer Sandheden nærmere, naar man med den berømte Karsten udtrykker sig saaledes: Tangenten har paa det Sted, hvor den berører den krumme Linie, tvende tilsammengaaende Punkter, tilfælles med den krumme Linie; endskiønt det egentlig bør hede, tvende tilsammengangne Punkter, det er ikkun en eneste Punkt tilfælles, efter den yderste Skarphed. Slige Vildfarelser i den herligste og dydsindigste Videnskab kan ikke være overeensstemmende med Mathematikens sande Evidenz; og for en Eulers, Kæstners og Karstens skarpe og regelmessige Tænkeorden ikke kunde forbigaaes, uden at blive anmerkede som falske skyggende Pletter, der burde borttages af det i Sandhedens Rige saa stærk lysende algebraiske System.

§. 9.

I den høie Lære angaaende de uendelige Størrelser møde store og betydelige Vanskeligheder; Vanskeligheder, som maatte betage Mathematikens høieste og herligste Deel sin Glands og rette Evidenz, naar man ikke ved grundige Betragtninger kunde glimte Aabninger og Udgange af denne dunkle Labyrinth. Vi lære i Differentialregning, at en uendelig liden Størrelse, som et Differential af en given endelig Størrelse, er en saa liden Deel af denne endelige Størrelse, at den med samme ikke kan sammenlignes; at den uendelige liden Størrelse er som intet at regne imod den endelige Størrelse; at en uendelig liden Størrelse kan hverken formere eller formindske en endelig Størrelse. Herved har Wolff i en Anmerkning giort denne Erindring: at omendskiønt en uendelig liden Størrelse i Hensigt til en anden endelig er at regne for intet; saa maae den i sig selv dog blive noget. Han gior den Forestilling, at man var i Arbeide med at maale Høiden af et Field; at Vinden under denne Maaling bortblæste et Sandkorn fra Fieldets høieste Top eller Spidse; at Fieldets Høide derved blev saa meget mindre end tilforn, som Størrelsen af Sandkornets Diameter bedrager sig; at Udmaalingen af et Fields Høide dog er af den Beskaffenhed, at Høiden bliver befunden en og den samme, enten Sandkornet bliver liggende, eller det under Maalingen bortblæses af Vinden; og at Sandkornets Diameter paa saadan Maade er for intet at regne mod Fieldets Høide, samt i Betragtning af dette kan holdes for en uendelig liden Størrelse.

§. 10.

§. 10.

Men dette er en meget ubestemt, urigtig og forkeert Forklaring, ganske stridig mod Begrebet om en uendelig liden Størrelse. I Calculationer, hvor der maae handles med Elementer eller Differentialer, kan Sandkorn og deres Bortblæselse af Vinden ikke have det mindste Sted. At et Fields Høide, udmaalet ved de nøiagtigste Instrumenter, bliver befunden at være en og den samme, enten det øverste Sandkorn bortblæses eller ikke, det er vel en Sandhed; thi til denne Finhed og Nøiagtighed kan vi vel ikke komme i de trigonometriske, meget mindre i de geometriske Udmaalinger. Men efter den yderste Skarphed, da maae dog et Sandkorn paa Fieldets øverste Spidse virkelig forøge den perpendikulaire Høide saa meget, som Sandkornets Diameter er stor; thi Sandkornets Diameter, et vist endelig Antal Gange tagen, kan udgiore Fieldets hele Høide. En Størrelses Differential kan da ikke være af en saadan Beskaffenhed; thi Differentialet er jo som intet at regne mod den endelige Størrelse, hvilket ei engang kan siges om Sandkornets Diameter, sammenlignet med Saturni Distance fra Solen. Den berømte Euler, som ikke kunde give en saa urigtig Forklaring Bifald, har derfor sat Differentialet, eller den uendelige liden Størrelse = 0. Men herved møde og Vanskeligheder. Summen af en Rekke Nuller fra Jorden til Hundestiernen kan dog ikke blive andet end 0, naar de samme slet hen betragtes uden Hensigt og Forbindelse til adskillige Regningsmaader, ved hvilke Nuller kan fremkomme. Differentialet bliver dog i visse Maader at ansee som en Spire, hvoraf Linier, Flader og Legemer kan fremkomme, alt efter en Forskiellighed af Differentialer; og Linier, Flader, Legemer kan dog ikke fremkomme af et absolut Intet. I disse Dunkelheder har endnu ingen hidtil antændt et klarere Lys, end Professor Karsten. Efter mine Tanker, da har denne berømte Mand herudi givet den antageligste Forklaring, og fremsat den meest fyldestgiørende Udvikling. Han skal i dette Tilfælde være min Ledsager, og hans sikre Ledesnoer vil jeg følge.

§. 11.

Mange ere af den Mening, at ingen arithmetiske Operationer kan foretages med o; men derved overskieres Knuden, uden at blive opløst. Den Division $\frac{0}{0}$ kan ikke være nogen Chimære; thi lige frem betragtet, da er $\frac{0}{0} = 1$. Det er vel en Sandhed, at der ved arithmetiske Operationer med o forekomme Vanskeligheder, hvor man ved en løselig Betragtning ikke indseer paa hvad Maade, at samme kan hæves; men ved en dybere Prøvelse aabnes dog Udgange af denne Labyrinth. I Følge Begrebet om Division, da er $1 : \frac{0}{0} = 0 : 0$, og da $0 = 0$, saa bliver $\frac{0}{0} = 1$. Her kan nu spørges, naar $\frac{0}{0} = 1$, hvorledes kan da $\frac{0}{0}$ være liig enhver anden Størrelse? I Almindelighed maae det tilstaaes, at alle Nuller ere hinanden lige; og naar man da ikke andet veed, end at Divisor $= 0$, ligeledes Dividendus $= 0$, uden Kundskab om de arithmetiske Operationer, ved hvilke de ere blevne o, saa sluttes med Ret at $\frac{0}{0} = 1$.

§. 12.

Men er man bekiendt med den arithmetiske Operation, ved hvilken Dividendus er bleven $= 0$; saa blev det en overilet Slutning, om man da satte $\frac{0}{0} = 1$. Multiplicerer man det Tal 3 med o, saa er $3 . 0 = 0$; og naar man igien paa begge Sider dividerer med o, saa er $\frac{3.0}{0} = \frac{0}{0}$. Men naar en Product igien divideres med Multiplicator, saa udkommer Multiplicandus til Qvotient; og altsaa maae heraf videre følge, at $\frac{3.0}{0} = 3$. Er da $\frac{3.0}{0} = 3$, og $\frac{3.0}{0} = \frac{0}{0}$, saa er og $3 = \frac{0}{0}$. Er det nu Sandhed, at man kan multiplicere ethvert Tal med o; er det Sandhed, at Producten da alletider er = o, Multiplicandus maae være hvad for et Tal man vil; er det Sandhed, efter Begrebene om Multiplication og Division, at disse Operationer saaledes ere hinanden modsatte, at Multiplicandus alletider maae igien fremkomme, naar Producten divideres med Multiplicator; saa maae det og være Sandhed, at ei allene Eenhedens Forhold til ethvert Tal, men og det Forhold, som enhver af tvende andre Tal have til hinanden, kan udtrykkes ved $\frac{o}{o}$.

§. 13.

Den Brok $\frac{m}{n}$ udtrykker det Forhold, som de tvende Tal m og n have til hinanden. Multiplicerer man Tælleren m med o; saa er Producten $\frac{m.o}{n} = o$. Multiplicerer man og Nævneren n med o, saa bliver just ved denne Multiplication den Brok $\frac{m.o}{n}$ igien divideret med o; og altsaa maae Multiplicandus $\frac{m}{n}$ være Qvotienten, saa den Brok $\frac{m.o}{n.o}$ er $= \frac{o}{o} = \frac{m}{n}$. Sætter man $n = 1$; da er $\frac{m.o}{n.o} = \frac{m.o}{1.o} = \frac{o}{o} = \frac{m}{1} = m$. Er da et Tal P multipliceret med $dx = o$, saa er vel $Pdx = o$; men dog forholder sig $dx : Pdx = 1 : P$, fordi $\frac{Pdx}{dx} = \frac{Pdx}{1.dx} = \frac{P}{1.}$ Af dette kan sluttes, at omendskiønt ethvert to Nuller ere hinanden lige; saa maae de dog i det Tilfælde, da de ere fremkomne ved tvende Tal multiplicerede med o, udtrykke disse tvende Tals Forhold til hinanden. I Calculationer kan de da ikke saa lige frem sættes for hinanden; thi dette kan forlede til falske Slutninger, og kan give Anledning til at falde paa Urimeligheder.

§. 14.

§. 14.

Multipliceres ethvert især af de tvende Tal 3 og 9 med 0; saa er $3 \cdot 0 = 0$, og $9 \cdot 0 = 0$. Vilde man nu saa lige frem sige, at $0 = 0$, og deraf slutte, at $3 \cdot 0 = 9 \cdot 0$; saa maatte og følge, at $\frac{3 \cdot 0}{0} = \frac{9 \cdot 0}{0}$, det er $3 = 9$, hvilket er umueligt. Antager man, at det 0, hvormed 3 er multipliceret, er liig det 0 hvormed 9 er multipliceret; saa kan de Producter $3 \cdot 0$ og $9 \cdot 0$ ikke forvexles med hinanden. De forholde sig mod hinanden som 3 til 9, omendskiønt det Modsatte synes at have Sted, da de begge ere $= 0$. Kan da et Nul være 3 Gange større end det andet? Denne Sætning bør vel lige frem benægtes; men i Calculationer maae dog noget saadant antages.

§. 15.

Naar tvende Personer fra et og det samme Sted, begge gaae fort fra Østen mod Vesten, den ene 3 Skridt og den anden 9. Naar de derpaa begge vende om og gaae tilbage, den første 3, den anden 9 Skridt; saa ere de begge igien paa det Sted, hvor de først havde været, de ere begge komne lige langt; men naar de begge paa ny gaae frem ad den Vei, fra hvilken de ere komne tilbage, saa er den ene kommen 3 Gange saa langt som den anden. For det første, da var de tvende Personers Vei multipliceret med 0, og derved tilintetgiort. Derefter blev den igien divideret med 0, hvorved der ikke udkom lige Qvotienter; men da Veien, som enhver allerede tilforn havde lagt tilbage, skulde igien fremstilles, saa maatte den ene nu være 3 Gange længere borte end den anden.

§. 16.

Adskillige berømte Mathematiker tilstaae, at et 0 kan være to Gange, tre Gange o. s. v. større end det andet. De sige, tvende Nuller ere alletider i en Liigheds arithmetiskt Forhold, da deres Difference

bestandig

bestandig er = o; men de ere ikke alletider i en Ligheds geometriske Forhold, fordi o divideret med o, ikke bestandig er = 1. Men dette synes noget at afvige fra Mathematikens Evidenz. Naar A har 100 Rdlr. og udgiver dem alle, saa er hans Eiendeel bleven = o. Naar B har 1 Rdlr. og udgiver den, saa er og hans Eiendeel = o; og man kan sige, at begge have lige meget, da de begge have intet. Det blev altsaa en Urimelighed om nogen vilde sige, at A endnu havde hundrede Gange saa meget som B. Men det er et ganske andet Spørsmaal: Naar enhver igien bekommer saa meget som han har havt, om de endnu begge have lige meget? Dette maae man besvare med Nei og sige, at A igien har hundrede Gange saa meget som B. Derfor behøver man ikke at giore sig Betænkning i at paastaae, at ei allene tvende Nullers arithmetiske Forhold, men og deres geometriske Forhold er et Ligheds Forhold; og at det Forhold (m.o) : (n.o) ikke er et Forhold af de tvende Producter m.o og n.o, men et Forhold af de tvende Tal m og n, hvilke ved Multiplicationen med o vel ere tilintetgiorde, men tillige, naar man dividerer med o, igien maae fremkomme. Det bliver og af denne Grund en vis Slutning, at Producterne m.o og n.o i Calculationer ikke kan holdes for at være et og det samme.

§. 17.

De Vanskeligheder, som synes at forekomme ved Multiplication og Division med o, bragte Herr Professor Karsten først paa de Tanker, at holde disse Operationer med det egentlige o for umuelige. Han har ytret denne Mening i en Recension, udi det 22de Stykke af de Rostokkiske lærde Efterretninger for Aaret 1756. Deels de Forklaringer over Multiplication og Division af tvende givne Størrelser, at finde den tredie ꝛc.; deels den Følge, at et o kan være større end et

 andet

andet, forte ham til at paastaae: Naar man vilde multiplicere eller dividere med o; saa maatte man antage o for en uendelig liden Størrelse. Han holdte de uendelige smaae Størrelser for at være virkelige Størrelser; og saaledes syntes ham alle Vanskeligheder at forsvinde. Men Herr Professor Karsten har dog efter den yderste Strenghed sat $dx = o$, og ikke troer, at dx er en virkelig Størrelse i det Tilfælde, naar man ved et Verkstykkes Opløsning anvender den egentlige Differentialregning. Den største Evidenz hersker ved alle Verkstykker, som ved Differential- og Integralregningen blive opløste, naar man efter den yderste Skarphed sætter $dx = o$. Ved denne Forudsætning har man da ikke nødig i den høiere Geometrie at holde de krumme Linier for en Sammensætning af smaae rette Linier; man har ikke nødig at antage en liden Deel af Tangenten at falde tilsammen med den krumme Linie; man har ikke nødig i Mechanik at antage den ueensdanne Bevægelse i meget smaae Tider at være eensdan. Kort, man har da i den hele Differentialregning ikke nødig, at melde det mindste om uendelige smaae Størrelser. Vil man endelig beholde det Udtryk, uendelige smaae Størrelser, saa maae det Ord Størrelse her tabe sin Betydning; thi en uendelig liden Størrelse kan ikke være nogen anden end den, som efter den yderste Skarphed er $= o$.

§. 18.

Begrebet om en Størrelse, som er uendelig stor, bliver et sandt og rigtigt Begreb. Et Tal er uendelig stort, naar det ikke kan fremkomme af Eenheden, hvor ofte den endog tilsættes; og enhver Qvotient, som udkommer, naar et Tal divideres med o, er et saadant uendelig stort Tal. Dividerer man det Tal n med o; saa er efter Begrebet om Division $o : 1 = n : \frac{n}{o}$, det er, $\frac{n}{o}$ skal saaledes fremkomme af n, som

1 af o. Men nu kan 1 ikke fremkomme af o, hvorofte man endog tilsætter o; og følgelig maae $\frac{n}{0}$ være et Tal, som ikke kan fremkomme af n, hvor ofte man endog vil tilsætte n. Derfor kan $\frac{n}{0}$ ikke være andet, end et uendelig stort Tal.

§. 19.

Man kan beholde det sædvanlige Tegn ∞, til at udtrykke et uendelig stort Tal; og det indsees da lettelig, hvad Værdien er af den Qvotient $\frac{n}{\infty}$. Af den Ligning $\frac{n}{0} = \infty$ er det klart, at $\frac{n}{\infty} = 0$. Det samme følger og af Begrebet om Division; thi $1 : \infty = \frac{n}{\infty} : n$, saa at n skal saaledes fremkomme af $\frac{n}{\infty}$, som ∞ af 1. Men nu kan ∞ aldrig paa nogen Maade fremkomme af 1, følgelig ei heller n af $\frac{n}{\infty}$; og altsaa er man nødsaget at sætte $\frac{n}{\infty} = 0$. Thi man maae sætte for $\frac{n}{\infty}$ et Tal, saa lidet som man vil; saa bliver det dog alletider muelígt, at n af det samme kan fremkomme, hvilket ved o ikkun er umueligt. Vil man for Lighedens Skyld, da $\frac{n}{0}$ kaldes et uendelig stort Tal, kalde den Brok $\frac{n}{\infty}$ et uendelig lidet Tal; saa er vel dette vilkaarligt, dog maae man saaledes ved det Udtryk Størrelse ikke lade sig forføre, og tænke, at $\frac{n}{\infty}$ er en Størrelse. Det er virkelig slet ingen Størrelse. Det fortiener endnu at anmerkes, at af den Ligning $\frac{n}{0} = \infty$ følger endnu denne, $\infty . 0 = n$, hvorudi ligger den Proportion $1 : 0 = \infty : n$; thi ligesom 1 aldrig kan fremkomme af o, saaledes kan ei heller ∞ paa nogen Maade fremkomme af o, man maae for n antage hvad for et Tal man vil.

§. 20.

Det Spørsmaal, om alle uendelig store Tal ere hinanden lige, bør ikke forbigaaes. Saavel ved det bekræftende, som ved det benægtende Svar, vise sig Vanskeligheder. Fastsætter man dette, at alle uendelig store Tal ere hinanden lige, og slutter fort saaledes: $\frac{1}{0} = \infty$, og $\frac{2}{0} = \infty$, følgelig $\frac{1}{0} = \frac{2}{0}$, videre $1 = 2$; saa er her en Urimelighed. Heraf er det klart, at udi Calculationer kan $\frac{1}{0}$ og $\frac{2}{0}$ ikke substitueres for hinanden. Efter Begrebet om Division, er $1 : 0 = \frac{1}{0} : 1$, $1 : 0 = \frac{2}{0} : 2$; og følgelig $\frac{1}{0} : 1 = \frac{2}{0} : 2$, eller $\frac{1}{0} : \frac{2}{0} = 1 : 2 = \infty : \infty$. Den sidste uendelig store Størrelse synes man, at maatte antages dobbelt saa stor som den første. Men det synes tillige, at de Proportioner $1 : 0 = \frac{1}{0} : 1$ og $1 : 0 = \frac{2}{0} : 2$, ei heller skulde blive urigtige, naar man saavel for $\frac{1}{0}$ som for $\frac{2}{0}$ sætter en og den samme ∞; thi lige saa lidet som 1 kan fremkomme af o, lige saa lidet kan ∞ fremkomme af 1 eller af 2, eller af ethvert andet Tal.

§. 21.

Her seer man en stor Lighed imellem de Vanskeligheder, som de arithmetiske Operationer med o foraarsagede, og de, hvorpaa man ved disse Operationer med ∞ kan anstøde. Den Brøk $\frac{0}{0}$ kan man ikke alletider saa lige fremsætte $= 1$, som er klart af det foregaaende; og af lige lignende Aarsager kan man ei heller saa lige frem antage den Brøk $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Den Brøk $\frac{0}{0}$ udtrykker egentlig det Forhold, som de Tal have til hinanden, hvilke ved Multiplication med o blive tilintetgjorde; og ligeledes kan man sige, at den Brøk $\frac{\infty}{\infty}$ udtrykker det

For-

Forhold, som de Tal have til hinanden, hvilke ved Division med o blive uendelige. Man har f. Ex. $\frac{m}{o} = \infty$, og $\frac{n}{o} = \infty$; saa er $\frac{m:o}{n:o} = \frac{m}{n} = \frac{\infty}{\infty}$.

§. 22.

Mange holde det urimeligt at man vil paastaae, et uendelig-stort Tal kan være større end det andet. De synes, at man allerede sætter et Tal sine Grændser, naar man kan angive et Tal som er større, og et andet, som er mindre end det samme. Lad os sætte, at n betegner ethvert endeligt Tal, ∞ et uendelig stort Tal, og $n\infty$ et andet uendelig stort Tal. Man sætter da videre, at $n\infty > \infty$; og da $n < \infty$, saa kan man angive et Tal der er større, og et andet der er mindre end det Tal ∞. Derfor maae det Tal ∞ have sine Grændser, hvilket dog er imod Begrebet om et uendelig stort Tal. Omendskiønt dette uden Modsigelse maae tilstaaes; saa kan dog ikke alle uendelig store Tal i Calculationer sættes for hinanden. I det foregaaende maatte man tilstaae, at alle Nuller ere hinanden lige; og dog kan man i Calculationer ikke uden Forskiel sætte alle Nuller for hinanden; thi omendskiønt $n.o = o$, og $m.o = o$; saa er dog $\frac{n.o}{o} = n$, og $\frac{m.o}{o} = m$. Ligeledes er det beskaffent med de uendelig store Tal; thi omendskiønt $\frac{m}{o} = \infty$ og $\frac{n}{o} = \infty$, saa er dog $\frac{m}{o}.o = m = \infty.o$, og $\frac{n}{o}.o = n = \infty.o$.

§. 23.

Man overiler sig i Slutningen, naar man tænker, at $\infty.o = o$, fordi 1 Gang $o = o$, 2 Gange $o = o$, 3 Gange $o = o$, v. s. v., følgelig og uendelig mange Gange $o = o$. Man maae vide, hvilket endeligt Tal det er, som ved Division med o er blevet uendeligt, naar den egentlige Værdie af $\infty . o$ skal bestemmes; thi just det samme Tal, som ved Division med o er blevet uendeligt, maae igien ved Multiplication med o fremstilles. Er $\frac{m}{o} = \infty$, da er $\infty . o = m$; men naar nu ligeledes $\frac{n}{o} = \infty$, saa er her $\infty . o = n$ og ikke $= m$, folgelig $\frac{\infty . o}{\infty . o} = \frac{m}{n} = \frac{\infty}{\infty}$. Ligesom det da tilforn er beviist, at ikke alle Nuller med hinanden kan forvexles, saasom de forestille Forholdet af de Tal, som ved Multiplication med o ere tilintetgiorde, og ved Division med o igien fremstilles; saa er det og her klart, at udi Calculationer kan ikke alle uendelig store Tal saa lige frem sættes for hinanden, saasom de forestille Forholdet af de Tal, som ved Division med o ere blevne uendelig store, og ved Multiplication med o igien fremstilles.

§. 24.

Naar Beskaffenheden af de Verkstykker, paa hvilke Differential- og Integralregning anvendes, udfordre, at en foranderlig Størrelses Differential dx er $= o$; saa maae og den anden Værdighed dx^2, den tredie Værdighed dx^3, og overhoved enhver Værdighed dx^n af dx være $= o$, naar Exponenten n er positiv. Folgelig er og ethvert Factum $adx^n = o$; og ligesom $x + adx = x$, saa er og $x + adx^n = x$. Herved begaaes ingen Feil, fordi $adx^n = o$, efter den yderste Strenghed; og ingen kan nægte, at jo $x + o = x$. Naar dx heder en uendelig liden Størrelse; saa kalder man dx^2 en uendelig liden Størrelse af den anden Orden, dx^3 en uendelig liden Størrelse af den tredie Orden o. s. v. Man gior i Almindelighed den Regel: en uendelig liden Størrelse af en høiere Orden, i Hensigt til en uendelig liden Størrelse

af

af en ringere Orden, er $= o$, eller for intet at regne imod samme. Altsaa er $dx + dx^2 = dx$, $dx + dx^3 = dx$, $dx^2 + dx^3 = dx^2$ o. s. v.

§. 25.

Alle disse Ligninger maae nu have sin Rigtighed; thi ingen kan nægte, at $o + o = o$. Men Herr Professor Karsten vil ikke bifalde den Mening, at dx^2 skal være uendelig mange Gange mindre end dx; og denne dybtænkende Mand har fuldkommen Ret. Hvorledes kan et o være uendelig mange Gange mindre end det andet? Alle Nuller ere hinanden lige, baade naar de forestilles i et arithmetisk og i et geometrisk Forhold, som tilforn er beviist. Ved den modsatte Mening maae uden Tvivl lægges til Grund, at o er en Størrelse; men dette bliver alt for vanskelig at gotgiøre og paastaae. Imidlertid har det i Calculationer sin store Nytte, naar alle forskiellige Værdigheder af o nøie anmerkes og adskilles, omendskiønt o^n hverken er større eller mindre end o i sig selv. Derved hersker den største Evidenz, naar Sagen kun forestilles i den rette Orden paa den behørige Maade.

§. 26.

Det kan nu antages som en beviist Sandhed, naar man i Calculationer undertiden treffer paa den Brok $\frac{o}{o}$, at samme da alletider udtrykker et vist Forhold af tvende Tal, som ved arithmetiske Operationer ere tilintetgiorte, og ved modsatte Operationer igien blive fremstillede. Af disse tvende Tal kan det ene være endeligt, og det andet uendelig stort. Lad os sætte det Forhold $\frac{\infty}{m}$, udi hvilket $\infty = \frac{n}{o}$, og multiplicere begge Led med o; saa har man $\frac{\infty}{m} = \frac{\infty . o}{m . o} = \frac{n}{o}$. Ved denne Operation bliver det ene Led $= o$; men det andet bliver et endeligt Tal; thi et endeligt Tals Forhold til o er virkelig liigt et uendelig stort Tals

Forhold

Forhold til et endeligt Tal. Vil man nu have, at Tælleren af den Brøk $\frac{n}{o}$ skal og være $= o$, saa skeer vel dette ved at multiplicere Tælleren med o; men naar Broken skal beholde sin Værdie, da maae og Nævneren multipliceres med o, og man bekommer $\frac{n}{o} = \frac{n.o}{o.o} = \frac{\infty.o^2}{o^2} = \frac{o}{o^2} = \frac{o}{o}$. Denne Brøk $\frac{o}{o}$ udtrykker da det Forhold, som tvende Tal have til hinanden, hvilke ved to Gange igientagen Multiplication med o ere tilintetgiorte, og ei anderledes igien kan fremstilles, end ved to Gange igientagen Division med o.

§. 27.

Det er tillige heraf klart, at den Brøk $\frac{n.o}{o^2}$ har en ganske anden Værdie end den Brøk $\frac{n.o}{o}$, eller $\frac{n.o^2}{o^2}$, eller og $\frac{n.o^2}{o}$. Er o^2 en Factor, saa er det alletider et Kiendetegn paa en igientagen Multiplication med o; men er o^2 en Divisor, saa er det et Beviis, at og Division med o endnu een Gang er igientagen. Altsaa er $\frac{n.o}{o^2} = \frac{n}{o} = \infty$, $\frac{n.o}{o} = n$, $\frac{n.o^2}{o^2} = n$, $\frac{n.o^2}{o} = n.o = o$.

§. 28.

Den Brøk $\frac{o}{o^2}$ udtrykker et endeligt Tals Forhold til et uendelig stort Tal, eller hvilket er det samme, et Forhold af o til et endeligt Tal. Dette Forhold kan man kalde et uendeligt Forhold. Efter dens Art og Beskaffenhed kan man forestille sig samme dupleret, tripleret, firefoldigt o. s. v.; ja de uendelige Forhold kan forbindes og sammensættes paa den samme Maade, som de endelige Forhold behandles. Saaledes er da f. Ex. det Forhold $o : \infty$ allerede et dobbelt uendeligt Forhold.

Thi lad os sætte det Forhold $o:m$ tilsammen med det Forhold $m:\infty$; saa har man $(o.m):(m.\infty)=o:\infty$. Ligeledes kan et saadant af flere lige uendelige Forhold sammensat Forhold, lade sig udtrykke ved tvende Nuller. Thi naar $o:o^2$ udtrykker et uendeligt Forhold; saa maae, naar $o:o^2$ sammensættes med $o:o^2$, $o^2:o^4$ eller $o:o^3$, udtrykke det uendelige Forhold $o:o^2$ dupleret, ligesom af lige lignende Grunde $o:o^4$ forestiller et tripleret, $o:o^5$ et firefoldigt o. s. v. uendeligt Forhold. Alle de Forhold $\frac{o}{o^2}, \frac{o^2}{o^3}, \frac{o^3}{o^4}, \frac{o^4}{o^5}$ o. s. v. ere hinanden lige, naar $\frac{o}{o}=1$; thi ethvert af de samme er da liigt det uendelige Forhold $\frac{1}{o}$.

§. 29.

Deraf indsees da lettelig, at i den Rekke o, o^2, o^3, o^4, o^5 maae ethvert Led med det umiddelbar følgende udtrykke et uendeligt Forhold; at tvende Led, naar der imellem samme befindes et Led, udtrykke et dupleret uendeligt Forhold; at trende Led, naar der imellem samme befindes to Led, udtrykke et tripleret uendeligt Forhold o. s. v.; og altsaa overhoved udtrykker $\frac{zo^n}{o^{n+1}}$ et enkelt uendeligt Forhold, $\frac{zo^n}{o^{n+2}}$ et dupleret uendeligt Forhold, $\frac{zo^n}{o^{n+3}}$ et tripleret uendeligt Forhold, $\frac{zo^n}{o^{n+4}}$ et firefoldig uendeligt Forhold o. s. v.

§. 30.

Ligeledes udtrykker $\infty:1$ et enkelt uendeligt Forhold; og naar det Forhold $\infty:1$ sammensættes med det Forhold $\infty:1$, saa udtrykker $\infty^2:1$ et dupleret uendeligt Forhold; men naar det Forhold $\infty^2:1$ igien sammensættes med det Forhold $\infty:1$, da fremstiller $\infty^3:1$ et tripleret uendeligt Forhold o. s. v. Altsaa er $\frac{zo^n}{o^{n+1}}=\frac{z}{o}=\frac{\infty}{1}=\infty$,

$\frac{zo^n}{o^{n+2}}=\frac{z}{o^2}=\frac{\infty^2}{1}=\infty^2$, $\frac{zo^n}{o^{n+3}}=\frac{z}{o^3}=\frac{\infty^3}{1}=\infty^3$

$\frac{zo^n}{o^{n+4}}=\frac{z}{o^4}=\frac{\infty^4}{1}=\infty^4$, o. s. v. Heraf opvoxer en ny Rekke $\infty, \infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^5$ o. s. v, som med den forrige o, o^2, o^3, o^4, o^5 o. s. v, derudi

derudi kommer overeens, at og her twende umiddelbar paa hinanden følgende Led, følgelig overhoved $\frac{z\infty^{n+1}}{\infty^n}$, udtrykker et uendeligt Forhold; men Forskiellen bliver denne, at de Forhold $o:o^2$ o. s. v. ere Uligheds faldende Forhold $= \infty : m$, og de Forhold $\infty : \infty^2$ o. s. v. ere Uligheds stigende Forhold $= m : \infty$; og altsaa er da $\frac{z\infty^{n+1}}{\infty^n} = \frac{zo^n}{o^{n+1}}$. Fremdeles udtrykker $\frac{z\infty_n{}^{+2}}{\infty^n}$ et dupleret, $\frac{z\infty^{n+3}}{\infty^n}$ et tripleret, $\frac{z\infty^{n+4}}{\infty^n}$ et firefoldig ꝛc. uendeljgt Forhold, saa at $\frac{z\infty_n{}^{+2}}{\infty^n} = \frac{zo^n}{o^{n+2}}$, $\frac{z\infty^{n+3}}{\infty^n} = \frac{zo^n}{o^{n+3}}$ o. s. v. Det Tegn ∞^n udtrykker da alletider det Forhold $1:\infty$, n Gange tagen, ligesom det Tegn o^n udtrykker, at det Forhold $\infty : 1$, er n Gange bleven sammensat. Saaledes har den beromte Herr Professor Karsten forestillet sig de forskiellige Ordener af uendelige Størrelser, og derved banet Veien til at bedømme Differentio-Differentialregningens Grundsætninger. Det bliver det egentlige rette og sande Begreb, man bør have om denne høie og dybsindige Lære, naar man i Calculationer og en virkelig Udøvelse ikke skal falde paa urimelige og falske Slutninger.