XIX.

Betragtning

over

det mechaniske Problem: naar et Kar i den muëligst korteste Tid med den muëligst største Mængde Vand udi samme af en skievliggende Flade skal opdrages udi en vis Høide, da at finde Størrelsen af den Vinkel, som den skraaliggende Flade bør giøre med Horizonten.

Med en større Nøiagtighed, end hidtil er skeet, opløst og bestemt

af

Diderich Christian Fester,

Mathematicus og Navigations-Examinator.

§. 1.

Den hele Verden, og enhver Partikel deraf er Mechanikens Gienstand, og denne Videnskab strekker sig saavel til Himmelen som Jorden. Enhver materiel Partikel i det store Verdenrum er underkastet dens Love, da alle Ting i den synlige Verden ere Materie, som have Bevægelse, og begge disses Egenskaber og Beskaffenheder ere Mechanikens Formaale. Alle Krigsmachiner, Skibe, Broer, Moller, Buer, Hvelvinger, Klokkeverker, Uhrverker, Stegevendere, Vogne &c.; ja alle Slags Haandverks-Redskaber henhore til Mechanik. Bygningskonst, Soefart, Agerdyrkning, Krigsvæsen, skylde Mechanik deres Opfindelse og Brug. Enhver Ting, som ved noget Slags konstig Maade bevæges ved Mennesker, ved Dyr, ved Vand, ved Luft, ved Ild, ved Lod, ved Fiedre, ved Strengeverk og andet mere, have altsammen Mechanik at takke for deres Tilværelse.

§. 2.

Mechanik giver os de rette Begreb om Dyrenes og enhver af deres Deles Bevægelse. Denne Videnskab lærer os Senernes, Muskernes, Benenes, Ledenes og Karrenes Brug. Den viser tydelig, at et dyrisk Legeme er intet andet end en mechanisk Sammensætning eller en Machine; og folgelig er Anatomie en af Mechanikens Formaale.

Paa Mechanik grunder sig Bevægelsen af Himmelens Kloder, deres Perioder, Tider og Omlob. Ja den sande Newtonianske Philosophie grunder sig paa Mechanik. Af nogle ved Bevægelsen foraarsagede Hovedvirkninger maae man udspore Naturens Kræfter; og af disse Kræfter bevise andre forekommende Phænomena, hvilket alt maae skee efter mechaniske Princips. Saaledes udledes Tyngdens Kræfter af de himmelske Legemers Afstand fra hinanden og deres Omlob; og af disse paa denne Maade bekiendte Kræfter uddrages Planeters, Cometers, Drabanteres og Oceanets Bevægelser, samt Bevægelsen af de Legemer der gives paa Jordens Overflade. Disse Legemer have igien et Forhold til de synlige Kloder i den udstrakte Verdenbygning.

§. 3.

Men Mechanik, uden Forbindelse med Algebra, bliver en Videnskab indsluttet inden for trange og snevre Grændser. Det er denne oploftede Videnskab, som maae udvide Mechanikens Cirkel; som maae give den sin Glands og Styrke, Hoide og Fuldkommenhed. Mechanik forbunden allene med den almindelige Algebra giver fordeelagtige Midler til vigtige Opdagelser. Derved bliver man mere bekiendt med Naturen; da kan man ret betiene sig af Naturens Love og Kræfter, af dens Virkninger og brugbare Tilegnelser, til Nytte for det borgerlige, til Hielp i det menneskelige Liv. Grændserne for det mechaniske Rige blive derved næsten utrolig udvidede, men her bliver endnu Grændser, Grændser hvor man maae standse, uden at komme videre.

§. 4.

Disse Grændser maatte nedbrydes, borttages og reent forsvinde, da Differential- og Integralregningen kom frem; da disse tvende store Lys paa Alteret i Videnskabernes Tempel af en Newton og Leibnitz vare antændte, saa blev det mechaniske Rige overalt klart, lyst, aabent, ube-

ubegrændset. Mechanik forbunden med denne høiere Algebra, bliver Noglen til den hele Natur. Ved denne herlige Forbindelse fandt Newtoner, Leibnitzer, Bernoullier, Eulere en aaben Mark, et uindskrænket Rige, hvor deres forskende Siele i den fuldkomneste Grad kunde øve sig, deres skarpe Begreber udvikle sig, deres udmerkede Duelighed vise sin Kraft, deres dybe Skarpsindighed ytre sin Styrke. Ved denne Forbindelse har den grundige og retskafne Videnskabsdyrker en Forsigtigheds Toile, som afholder ham fra alle daarlige Udsvævelser, som holder ham inden for Grændserne af de ægte Forskandsninger, som styrer hans Gang paa de ordentligste Løbebaner; og de, som forøde Tiden ved unyttige Arbeider paa et Perpetuum mobile, blive i hans Oine ikke andet end Grillenfængere, Drømmere og mechaniske Fanatiker.

§. 5.

Sporger man, om Størrelsen af den Vinkel, under hvilken enhver Mollevinge paa Axlen bor være boiet imod Vinden, som en af de betydeligste Hovedposter ved en Veirmolle, da Vingen alletider bor staae perpendikular paa Axlen, og i denne perpendikulare Stilling være saaledes omdreiet, at Vinden derpaa kan ytre den største Kraft til at sætte Mollen i Gang; om den rette Dannelse af en Bielke, udhuggen af en given rund Tømmerstok, at den udi en Bygning skal kunne bære den største Byrde, som er muelig efter Tømmerstokkens Tykkelse; om Skikkelsen af et cylindrisk Bæger, hvis cubiske Indhold er given, for at anvende det mindst udfordrende Guld til dets indvendige Forgyldning, samt mange flere overmaade nyttige Bestemmelser; da er Mechanik og Geometrie, allene forbunden med almindelig Algebra, hertil ganske utilstrækkelig. Slige Spørsmaale maae nodvendig fremstilles for

Differentialregningens Domstol, og den vigtige Lære angaaende de krumme Liniers største og mindste Applikater bør affige Dommen.

§. 6.

Det Problema, som jeg her har foretaget mig at betragte, henhører til den samme Domstol. Problemet er dette: at finde Størrelsen af den Vinkel, som en skievliggende Flade bør at giøre med Horizonten, for at lade et Kar i den muligst korteste Tid med den muligst største Mængde af Vand udi samme, opdrages af den skraaliggende Flade udi en vis Høide. Udi Krafts mechaniske Verk findes en algebraisk Beregning angaaende dette Problema, anført i hans Forelæsninger over Hydrostatik, hvor der udkommer 24 Grader 21 Minuter til Størrelsen af den begierte Vinkel. Hos Belidor og andre flere berømte Mænd angives denne Vinkel af den samme Størrelse; men ved nøiagtig Undersøgning finder jeg, at Størrelsen af denne Vinkel bør være 24 Grader 26 Minuter; og en Irring af 5 Minuter bliver dog efter mine Tanker ikke ligegyldig at ansee i denne Sag, eller noget umerkeligt, især udi store Vandmachiner, hvor dette Tilfælde finder Sted. Store Vandmachiner, ved hvilke det bliver en Hovedegenskab, at opføre den muligst største Mængde af Vand til en bestemt Høide, i den muligst korteste Tid paa skraaliggende Flader, maae nødvendig erlange en større Fuldkommenhed, naar en Irring af 5 Minuter i Fladernes Hælding mod Horizonten bliver hævet. Denne liden Betragtning bliver da ikke unyttig eller frugtesløs, naar jeg ved Problemets nøiagtige Opløsning fuldkommen kan gotgiøre og bevise, at 24 Grader 26 Minuter bør være Størrelsen af den Vinkel, som den skraaliggende Flade skal formere med Horizonten, og ikke 24 Grader 21 Minuter, som den hidtil af Mathematikerne er bleven bestemt.

§. 7.

§. 7.

Lad L M N O forestille den skraaliggende Flade, A B F G et cubiskdanned Kar, R O den Hoide, udi hvilken Vandet i Karret skal oploftes, L R en Grundlinie parallel med Horizonten, og B K en af de fire Sider til Grændserne af Vandets Superficie udi Karret, hvilken Linie B K maae altsaa være parallel med Grundlinien L R. Det er klart, at Karret A B F G, naar det settes paa en skievliggende Flade, ikke kan indeholde saa meget Vand, som naar det staaer paa en Flade der er horizontal; og Vandets Mængde maae blive alt mindre og mindre, jo større Vinklen O L R bliver, som den skievliggende Flade gior med Horizontallinien L R. Derimod, jo mindre Vinklen O L R bliver, desto mere Vand kan der være i Karret A B F G; men desto længere bliver og den skievliggende Flade L O, førend den perpendikulare Hoide R O kan erlanges; følgelig udkraves der og en desto større Tid, førend Kraften ved P efter en Direction P S, parallel med den skievliggende Flade L M N O, kan opdrage Karret udi den begierte Hoide R O, naar Hastigheden er den samme. Ved Problemets Oplosning maae man altsaa have Hensigt til en Forbindelse imellem den største Mængde Vand, som kan være udi Karret A B F G, og det korteste Rum, som det bemeldte Kar har at giennemvandre, indtil den begierte Hoide R O kan erlanges.

§. 8.

For det første, hvad Vandets Mængde udi Karret anbelanger, da kan samme alletider bedømmes efter Størrelsen af det Trapezium A B K H; thi da Linien B K bestandig bliver horizontal, enten den skievliggende Flade gior en større eller mindre Vinkel med Horizonten, nemlig Punkten K falder alt nærmere og nærmere imod Punkten H, jo steilere den skievliggende Flade bliver; saa er Vandets Mængde udi

Karret,

Karret, efter forskiellige Vinkler, som den skraaliggende Flade kan giore med Horizonten, at betragte, som forskiellige Prismer, alle af en og den samme Hoide, med ulige store Trapezier til Grundplaner, af hvilke det Trapezium A B K H bliver Grundplanen af Prismet A B I G, der forestiller Vandets Mængde, som svarer til Vinklen O L R. Men Storrelsen af de ommeldte Trapezier maae dependere af Storrelsen til den Linie K H; thi naar man drager Linien A K, saa bliver det Trapezium A B K H inddeelt udi tvende Triangler A B K og A K H, af hvilke den Triangel A B K beholder stedse en uforanderlig Storrelse, enten der er lidet eller meget Vand udi Karret, saasom dens Grundlinie A B stedse bliver den samme, og Punkten K, nemlig Trianglens Spidse, stedse forbliver udi den med A B parallele Linie E H; men den anden Triangel A K H bliver stedse forandret udi Storrelsen, naar Vinklen O L R forandres, og da A H, som dens Grundlinie, er stedse den samme, saa forandres dens Storrelse, ligesom dens perpendikulare Hoide K H enten aftager eller tiltager. Altsaa folger, at Vandets Mængde udi Karret alletider kan bedommes efter Storrelsen af den Linie K H.

§. 9.

For det andet, i Hensigt til den korteste Tid, udi hvilken Kraften P kan opdrage Vandet fra L til O, da dependerer samme af Længden paa det giennemvandrede Rum, eller paa Sinus af Vinklen O L R; thi jo mindre at denne Sinus bliver i Sammenligning med Sinus totus, jo nærmere falder Punkten K imod Punkten E, og jo nærmere Punkten K falder imod E, desto mere Vand kan der være udi Karret, men det giennemvandrede Rum bliver desto længere. Derimod, jo storre at den bemeldte Sinus bliver imod Sinus totus, jo mindre Vand kan der være udi Karret, men desto mindre Tid udfordres der og til at opdrage Vandet udi Hoiden R O. Da nu den storste Mængde Vand depen-

derer

derer af Størrelsen paa den Linie K H, og det korteste Giennemvandringsrum, eller den korteste Tid beroer paa Størrelsen til Sinus af Vinklen O L R; saa bør man søge den største Product iblant alle de mulige Producter, som fremkomme af disse tvende Linier, multiplicerede med hinanden.

§. 10.

Giøres O V = R O, og V Y drages parallel med L R; saa følger, efter den almindelige Geometrie, at de tvende Triangler V O Y og L O R ere lige skikkede med hinanden, og naar V O antages for Sinus totus, da bliver V Y Sinus af Vinklen V O Y eller L O R, samt O Y Sinus af Vinklen O V Y eller O L R. Men da Linien B K er parallel med L R, og B E parallel med L O; saa ere og de tvende retvinklede Triangler B E K og L R O lige skikkede med hinanden; følgelig er Trianglen V O Y lige skikket med Trianglen B E K.

§. 11.

Sætter man B E = E H = 1, O R = O V = a, og O Y = x; saa er V Y = $\sqrt{a^2 - x^2}$, og da Trianglen V O Y er lige skikket med Trianglen B K E, saa er V Y : Y O = B E : E K, det er $\sqrt{a^2 - x^2} : x = 1 : \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Derfore er E H — E K = K H = $1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, og K H · O Y = $x - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, hvilket differentieret giver os $dx - \frac{2x\,dx\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2}$.

§. 12.

Eftersom dette er Differentialet af en Product, som er den største iblant alle mulige Producter, fremkomme ved at multiplicere K H og

O Y med hinanden, efter den Størrelse, enhver af disse Linier i Forbindelse med hinanden maae tilkomme, formedelst alle muelige forskiellige Vinkler, som den skraaliggende Flade kan giøre med Horizonten; saa er

$$dx - \frac{2x\,dx\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = 0,$$

det er $a^2 - x^2 - 2x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0,$

altsaa er $\frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 2x\sqrt{a^2 - x^2} = x^2 - a^2,$

det er $\frac{2a^2x - x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x^2 - a^2.$ (dette qvadreret,)

$\frac{x^6 - 4a^2x^4 + 4a^4x^2}{a^2 - x^2} = x^4 - 2a^2x^2 + a^4.$ (multipl. med $a^2 - x^2$,)

$x^6 - 4a^2x^4 + 4a^4x^2 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6,$

det er $2x^6 - 7a^2x^4 + 7a^4x^2 = a^6.$ (divid. med 2,)

$x^6 - \frac{7}{2}a^2x^4 + \frac{7}{2}a^4x^2 = \frac{1}{2}a^6,$

altsaa er $x^6 - \frac{7}{2}a^2x^4 + \frac{7}{2}a^4x^2 - \frac{1}{2}a^6 = 0.$

Sætter man $x^2 = ay$, nemlig $\frac{x^2}{a} = y$, da er

$a^3y^3 - \frac{7}{2}a^4y^2 + \frac{7}{2}a^5y - \frac{1}{2}a^6 = 0.$ (divider. med a^3)

$y^3 - \frac{7}{2}ay^2 + \frac{7}{2}a^2y - \frac{1}{2}a^3 = 0$, og naar a antages $= 10$, da haves følgende cubiske Ligning: $y^3 - 35y^2 + 350y - 500 = 0.$

§. 13.

Sættes nu videre $y = z + \frac{35}{3}$, da er $y^2 = z^2 + \frac{70}{3}z + \frac{1225}{9}$, og $y^3 = z^3 + 35z^2 + \frac{1225}{3}z + \frac{42875}{27}$.

Altsaa

Altsaa er

$$\begin{array}{rcl} y^3 & = & z^3 + 35z^2 + \frac{1225}{3}z + \frac{42875}{27}, \\ -35y^2 & = & -35z^2 - \frac{2450}{3}z - \frac{42875}{9}, \\ +350y & = & +350z + \frac{12250}{3}, \\ -500 & = & -500 \\ \hline y^3 - 35y^2 + 350y - 500 & = & z^3 - \frac{175}{3}z + \frac{11000}{27} = 0. \end{array}$$

§. 14.

Efter Cardani Regel for den cubiske Lignings Rod i dette Tilfælde, veed man nu, at $z = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} - \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}$; og Formulen anvendt her paa dette Exempel, da bliver $p = \frac{175}{3}$, og $q = \frac{11000}{27}$. Derfore er da $-\frac{1}{2}q = -\frac{5500}{27}$, $\frac{1}{4}q^2 = \frac{30250000}{729}$, og $-\frac{p^3}{27} = -\frac{5359375}{729}$. Folgelig er $z = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} - \frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{30250000}{729} - \frac{5359375}{729}} - \frac{5500}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{5500}{27} - \sqrt{\frac{30250000}{729} - \frac{5359375}{729}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{24890625}{729}} - \frac{5500}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{5500}{27} - \sqrt{\frac{24890625}{729}}} = \sqrt[3]{\frac{4989}{27} - \frac{5500}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{5500}{27} - \frac{4989}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{511}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{10489}{27}} = -\frac{799}{300} - \frac{2188}{300} = -\frac{2987}{300}$. Derfore bliver $y = z + \frac{35}{3} = -\frac{2987}{300} + \frac{35}{3} = \frac{3500}{300} - \frac{2987}{300} = \frac{513}{300} = \frac{171}{100}$; men $x^2 = ay = \frac{171}{10}$, og folgelig $x = \sqrt{\frac{171}{10}}$.

Derfore er

$$a : x = 10 : \sqrt{\tfrac{171}{10}};$$

$$\text{men } 10 : \sqrt{\tfrac{171}{10}} = 100000 : 10000\sqrt{\tfrac{171}{10}};$$

altsaa er $a : x = 100000 : 10000\sqrt{\frac{171}{10}} = 100000 : \sqrt{100000000 \cdot \frac{171}{10}} = 100000 : \sqrt{1710000000} = 100000 : 41352$; og altsaa bliver da Sinus af den Vinkel, som den skraaliggende Flade i dette Tilfælde bør giøre med Horizonten 41352. Udi Sinustavlerne finder man den Sinus, der svarer til 24° 26′ at komme nærmest overeens med 41352, saa den forlangte Størrelse til Vinklen OLR, bliver 24 Grader 26 Minuter.

§. 15.

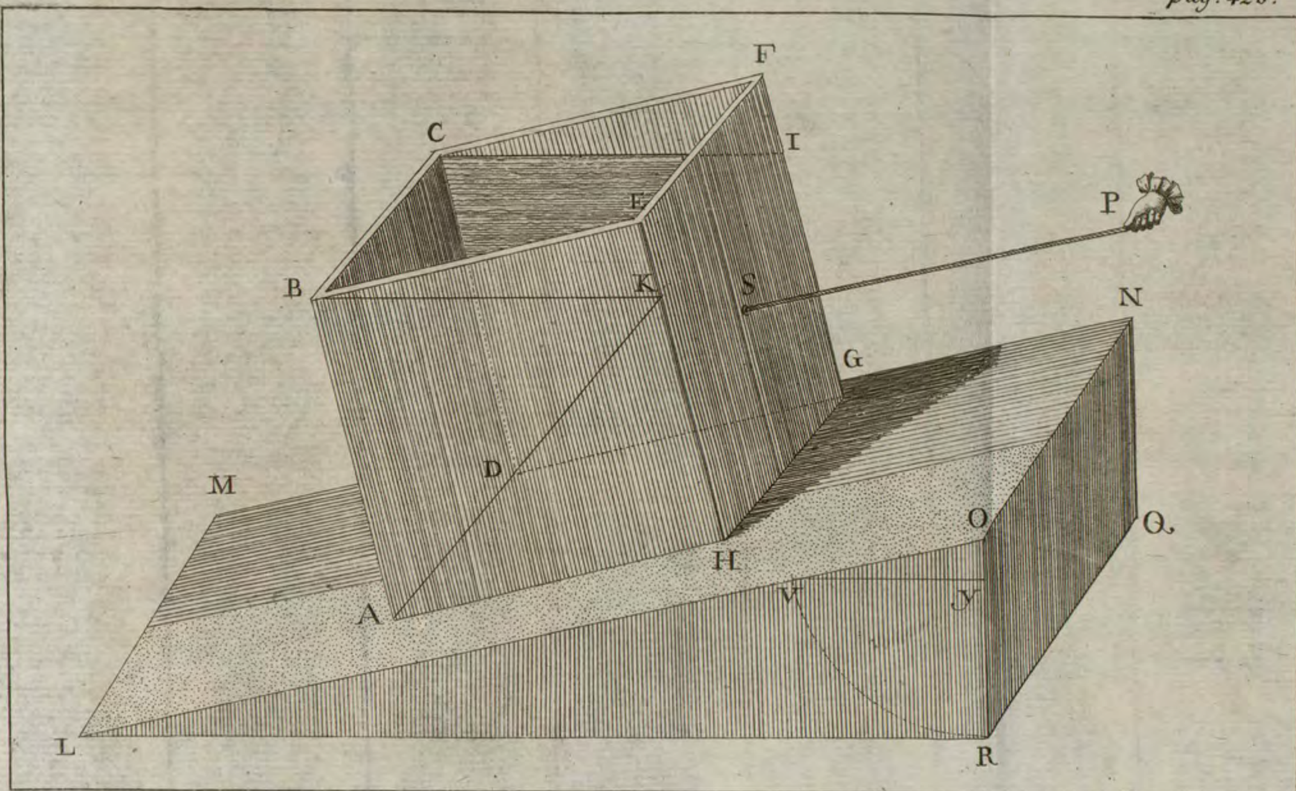
§. 15.

Den berømte Belidor har i hans ypperlige hydrauliske Verk anført en algebraisk Beregning, angaaende det bemeldte Problema; men efter hans Operation, da udkommer den forlangte Størrelse til Vinklen O L R, med 24 Grader 21 Minuter. Aarsagen til denne Difference imellem Belidors og min Beregning, ligger i den Nøiagtighed, med hvilken man i den cubiske Ligning $y^3 - 35y^2 + 350y - 500 = 0$, søger Størrelsen af y. Belidor anfører ikke Operationen for at finde y; men allene melder, at man efter de almindelige Regler finder $y = \frac{17}{10}$. Jeg har her i Opløsningen, efter Cardani Regel, fundet $y = \frac{171}{100}$.

§. 16.

Det kan letteligt undersøges, hvilken af disse tvende forskiellige Størrelser $\frac{17}{10}$ og $\frac{171}{100}$ der kommer Sandheden nærmest; thi da $y^3 - 35y^2 + 350y - 500 = 0$, saa er $y^3 + 350y = 35y^2 + 500$. Var $\frac{17}{10}$ den fuldkomne og ganske nøiagtige Størrelse af y, da blev $(\frac{17}{10})^3 + 350 \cdot \frac{17}{10} = 35(\frac{17}{10})^2 + 500$; men imellem $(\frac{17}{10})^3 + 350 \cdot \frac{17}{10}$ og $35(\frac{17}{10})^2 + 500$, bliver en Difference af $\frac{1237000}{1000000}$. Var $\frac{171}{100}$ den fuldkomne og ganske nøiagtige Størrelse af y, da blev $(\frac{171}{100})^3 + 350 \cdot \frac{171}{100} = 35(\frac{171}{100})^2 + 500$; men imellem $(\frac{171}{100})^3 + 350 \cdot \frac{171}{100}$ og $35(\frac{171}{100})^2 + 500$, bliver en Difference af $\frac{1156711}{1000000}$. Da nu $\frac{1156711}{1000000}$ er en mindre Difference end $\frac{1237000}{1000000}$; saa sees det klarlig, at $\frac{171}{100}$ bliver en nøiagtigere Størrelse af y, end $\frac{17}{10}$, og saa meget som den Brøk $\frac{80289}{1000000}$ bedrager sig, maae jeg da her i dette Tilfælde komme Sandheden nærmere end Belidor. Altsaa følger, at den efter min Beregning udkomne Størrelse af 24° 26′ for Vinklen O L R, bliver rigtigere og nøiagtigere end 24° 21′. Store Vandmachiner, ved hvilke dette Tilfælde finder Sted, maae da unægtelig gives en større Grad af Fuldkommenhed, naar de skraaliggende Flader udi samme giøre Vinkler af 24 Grader 26 Minuter med Horizonten, end naar disse Vinkler blive Størrelser af 24 Grader 21 Minuter, efter den hidtil vedtagne Bestemmelse.

XX.


F
C
I
E
P
B
K
S
N
G
D
M
O
Q
H
V
Y
A
L
R