IX.

Undersøgning,

hvorledes

man paa den korteste Maade kan opløse saadanne Æqvationer, som indeholde flere eller mange ubekiendte Størrelser tillige,

af

Fr. Chr. Holb. Arentz.

§. 1.

At udfinde Maader, hvorledes nyttige Problemata kan opløses, er fornøieligt, saasom man derved seer sig i Stand til at udrette noget eller at opnaae et og andet Diemerke, som man ellers maatte give Slip paa; men sæt, at de anviste Methoder enten har alt for store Vanskeligheder ved sig eller i det mindste en kiedsommelig Vidløftighed, da taber Sagen meget af sin Behagelighed, og man skal neppe paatage sig et saadant Arbeide, uden høieste Nødvendighed udfordrer det. De Problemata, som paa saadan Maade opløses, har allene dette forud for de, til hvis Opløsning ingen Methode vides, at naar man endelig ville stride igiennem og udholde al den udfordrende Møie, skulde man omsider kunne komme til sit Maal. Mig synes altsaa, at det i Videnskaberne vilde være et ganske nyttigt Arbeide i et og andet Tilfælde, at udfinde Methoder, hvorledes man paa en lettere og zirligere Maade kunde naae sit Diemerke. Een af de Opløsninger, hvis Vidløftighed ved Anledninger har forekommet mig meget kiedsommelig, er, hvor man in Analysi Algebraica ud af flere Æqvationer har at søge flere tillige ubekiendte Størrelser, saa at jeg deri adskillige gange har ønsket en kortere Vei, og saasom jeg hverken hos en Wolf, Clairaut, Euler, Segner

 eller

eller andre, som mig ere forekomne, har fundet, at nogen har været betænkt paa at angive nogen lettere Methode, end de sædvanlige, holdt jeg det Umagen værd at anvende nogen Undersøgning paa at udfinde en kortere Maade i at oplose dette Problema, som virkelig indbefatter under sig en uendelig Mængde arithmetiske Problemata, som snart ved een, snart ved en anden Leilighed kunde anvendes.

§. 2.

Lad os sætte, at vi har fire eller flere Æqvationer, og i disse lige saa mange ubekiendte Størrelser, som skal søges, hvilke vi vil kalde x, y, z, q. da er een af de sædvanlige Maader denne, at man i tvende af de fremsatte Æqvationer søger Værdien af een og den samme ubekiendte Størrelse, af hvilke man derefter gior en ny Æqvation, hvori den ene ubekiendte ikke indeholdes. Paa samme Maade udleder man af den ene Æqvation, som man allerede har brugt, tilligemed een af de andre nok en anden Æqvation, hvori ligeledes den forbemeldte ubekiendte Størrelse ikke indeholdes, hvilke Operationers Vidløftighed best sees af følgende:

a. b. c. d
e. f. g
h. i
k.

Lad a, b, c, d betegne de første Værdier, som udkomme ved det at man i enhver Æqvation søger den første ubekiendte Størrelse, hvilke hver for sig bliver = x, naar man nu fremdeles, sætter a = b, og b = c og c = d, kan derved atter udledes trende Værdier af y, som her forestilles ved Bogstaverne e, f, g. Derefter sætter man e = f og f = g, i hvilke hverken x eller y indeholdes, og kan altsaa deraf udledes h og i, som hver for sig er = z, og indeholder ikke uden en ubekiendt Størrelse,

nemlig

nemlig q. Naar da endelig h sættes = i, findes k, som bestaaer af lutter bekiendte Størrelser, og er = q. Naar man saaledes har fundet den sidste ubekiendte, sættes dens Værdie ind i een af de Værdier, som udtrykker z, for at finde denne, dernæst sættes Værdierne baade af q og z i een af de, som udtrykker y, og saa fremdeles indtil man har fundet dem alle. Af dette Schema sees ei allene en ordentlig Maade at gaae frem paa, naar man vil betiene sig af dette Slags Opløsning, men man indseer ogsaa dens Vidloftighed. Thi det Antal af Æqvationer, som man har at opløse, er Numerus Polygonus Triangularis, eller Summen af en arithmetisk Progression, som voxer ved Unitas og har saa mange Led, som der er ubekiendte Størrelser, og derved faaes endnu ikke uden den ene ubekiendte Størrelse; men det som allermeest foraarsager Vidloftighed og Bryderie, er de mangfoldige Reductioner, som tillige forefalde. Dog er herved at merke, at naar ikke alle Æqvationerne hver for sig indeholder alle de ubekiendte Størrelser, saa kan og Antallet af de Æqvationer, som maae opløses, blive mindre, og man begynder da med at bortskaffe de Størrelser, som de færreste gange forekomme.

§. 3.

En anden Maade er, at man søger en Værdie af den ene ubekiendte, og sætter denne isteden for samme ubekiendte Størrelse i alle de andre Æqvationer, hvor den forekommer, saa at man faaer een ubekiendt Størrelse mindre, saa vel som og een Æqvation mindre i Tallet, end man havde forhen. I den første eller hvilken man vil af de Æqvationer, som saaledes udkommer, søger man atter en Værdie af en ubekiendt, og substituerer samme i de følgende. Hvorved, ligesom forhen opkomme nye Æqvationer, som i Tallet er een mindre, end næst forrige og saa videre; men enhver seer letteligt, at man ogsaa her faaer en Mængde Æqvationer at behandle, hvilke udkræve moisommelige Reductioner og Multiplicationer.

§. 4.

§. 4.

Den tredie Maade vil man finde at være ligesaa vidløftig, som de to forrige. Denne bestaaer deri, at man multiplicerer den første Æqvation med den Coefficient, hvormed x er multipliceret i den anden, derimod multipliceres den anden Æqvation med den Coefficient, hvormed x er multipliceret i den første. De derved udbragte Æqvationer blive enten adderede eller subtraherede fra hinanden efter Omstændighederne saaledes, at derved udbringes en ny Æqvation, som ikke indeholder den ubekiendte Størrelse x. Paa samme Maade udleder man af første og tredie Æqvation nok en anden, som ingen x indeholder, og saa videre; altsaa tilveiebringes herved, lige som i forrige, nye Æqvationer, som altid formindskes een i Tallet, lige som man og efter hver faaer en ubekiendt Størrelse mindre. Paa denne Methode, der maaskee ikke saa sædvanlig bruges som de to foregaaende, vil jeg anbringe et Exempel, da det alligevel bliver fornødent at forestille et Exempel, beregnet efter de sædvanlige Maader, for ved sammes Betragtning at opdage en lettere og hastigere Methode.

§. 5.

De ubekiendte Størrelser vil jeg i det følgende betegne med de første Bogstaver i Alphabetet, skrevne med store Characterer, saasom A, B, C, D, &c. *) Vi vil altsaa foretage os følgende trende Æqvationer at opløse:

a A

*) At jeg herudi viger fra den sædvanlige Benævnelsesmaade, skeer formedelst en vigtig Beqvemmeligheds Skyld, som skal sees i det følgende, da jeg benævner alle Coefficienter af det ubekiendte A med et Bogstav af samme Navn, og skrevet med liden Character, nemlig a og alle Coefficienter af B og C &c. ligeledes, og continuerer saaledes fort fremad saa mange ubekiendte, som der er.

$$aA + bB + cC = m$$
$$dA + eB + fC = n$$
$$gA + hB + iC = p$$

lad den første multipliceres med d, den anden med a, saa faaes

$$daA + dbB + dcC = dm$$
$$adA + aeB + afC = an$$

$$(db - ae)B + (dc - af)C = dm - an$$

fremdeles bliver $gaA + gbB + gcC = gm$

$$agA + ahB + aiC = ap$$

$$(gb - ah)B + (gc - ai)C = gm - ap$$

sæt at, $db - ae = \alpha$ ligeledes $gb - ah = \delta$

$dc - af = \beta$ $\quad$ $gc - ai = \varepsilon$

$dm - an = \gamma$ $\quad$ $gm - ap = \xi$

hvorved faaes $\alpha B + \beta C = \gamma$ og $\delta B + \varepsilon C = \xi$

folgelig $\delta\alpha B + \delta\beta C = \delta\gamma$

$$\alpha\delta B + \alpha\varepsilon C = \alpha\xi$$

$$(\delta\beta - \alpha\varepsilon)C = \delta\gamma - \alpha\xi \text{ og } C = \frac{\delta\gamma - \alpha\xi}{\delta\beta - \alpha\varepsilon} = \eta$$

B findes ved at substituere Værdien af C, som vi har kaldet η, istedet for C, saa at

$$\alpha B + \beta\eta = \gamma, \text{ folgelig } B = \frac{\gamma - \beta\eta}{\alpha} = \vartheta$$

endelig bliver $aA + b\vartheta + c\eta = m$ og $A = \frac{m - b\vartheta - c\eta}{a}$.

§. 6.

Paa saadan Maade har vi, uagtet med temmelig Vidløftighed, udbragt de tre ubekiendte Størrelser og udtrykket dem i saadanne, som ere bekiendte, da vi derved har anbragt de Forkortelser og Fordele, som i slige Tilfælde pleier at bruges, men med denne Forkortelsesmaade er man kun lidet hiulpen; thi enten har man en enkelt Casum at beregne, og da skulde det være neppe, at man behøvede den, saasom man da giorde bedre fra først af at betiene sig af Tal, hvorved man undgaaer en Mængde Substitutioner, og kan efter hvert reducere enhver Coefficient til det simpleste Udtryk, eller man har til Øiemerke at udbringe almindelige Formuler, som udtrykke de ubekiendte Størrelser; men da er man endnu lidet tient med at have bragt det dertil, som i foregaaende §. er viist, og det kiedsommeligste og meest indviklede Arbeide staaer endnu tilbage ved at forandre de antagne Bogstaver til de, hvoraf Æqvationerne egentlig fra først af har bestaaet. Imidlertid er dette noget, som man ofte ønsker, nemlig at see de ubekiendte Størrelser udtrykkede i Almindelighed ved de Størrelser, som indløbe i Æqvationerne, og af følgende sees, at jeg endogsaa til mit nærværende Øiemerke ikke kan være tient med de Udtryk, som ere udbragte i foregaaende §.

§. 7.

Naar vi altsaa igien nødsages at bortskaffe de antagne Størrelser, som her ere betegnede med græske Characterer, er det best at man først beregner alle Facta, saasom $\delta\gamma$, $\alpha\xi$, $\delta\beta$, $\alpha\varepsilon$, og deraf sammensætter Værdien for C eller η, og tillige reducerer den til sit simpleste Udtryk, med hvilke saavel som følgende vidløftige Regninger jeg har taget i Betænkning at bemøie Læseren, da det er mere vidløftigt, end vanskeligt; det bliver til vort nærværende Øiemerke allene fornødent at anføre,

hvad

hvad derved udbringes, nemlig

$$C = \frac{anh - aep + dpb - ngb + egm - dmb}{afh - aei + dib - fgb + egc - dch}$$

ligeledes, naar B søges, bestemmes først $\beta\eta$ ved Hielp af det allerede fundne η, og efterat den fornødne Reduction er skeet, bliver ϑ eller

$$B = \frac{fap - nai + dmi - dcp + cng - mfg}{afh - aei + dib - fgb + egc - dch.}$$

Endelig, naar man paa samme Maade betiener sig af η og ϑ, findes $A = \frac{bni - fbp + cep - nch + mfh - mei}{afh - aei + dib - fgb + egc - dch.}$

§. 8.

Da nu disse Værdier af A, B, C paa den sædvanlige Maade ere fundne, vil vi af dem betiene os for at udfinde en langt kortere og zirligere Maade at gaae frem paa. Betragte vi for det første den Nævner, som blev funden for C, nemlig $\delta\beta - \alpha\varepsilon$, saavel som Tællerne (§. 5), da merkes lettelig, at i de tvende foregaaende Æqvationer $\begin{matrix}\delta\alpha B + \delta\beta C = \delta\gamma \\ \alpha\delta B + \alpha\varepsilon C = \alpha\xi\end{matrix}$ kunde man med lige saa stor Føie have subtraheret den første fra den sidste, som den sidste fra den første, hvorved alle Signa eller Tegn i det Udtryk for C saavel i Nævneren som Tælleren havde blevet forandrede, hvorved dog den absolute Størrelse af C ingen Forandring havde faaet. Heraf følger, at, naar man siden, som i næst foregaaende §. er skeet, substituerer de egentlige Bogstaver, som Æqvationen tilhører, da kunde alle Termini eller Led saavel i Tælleren som Nævneren omskifte deres Tegn, og de selv samme Led maatte enten alle have — eller alle +, og de andre tvertimod. Lige det samme maatte have Sted i Henseende til Værdierne af de andre ubekiendte Størrelser.

§. 9.

End videre merkes: 1) At i den fælles Nævner, saavelsom enhver Tæller kommer ikkun tre Bogstaver for i ethvert Led eller Facto, det er just saa mange, som der i Æqvationerne ere ubekiendte Størrelser, (dog sættes her forud, at Æqvationerne ere bragte til sin behørige Form, hvorom i det følgende videre skal tales). 2) I Nævneren forekommer ingen af de Størrelser, som udtrykkede den bekiendte Deel af Æqvationerne; det er at sige, hverken m, n eller p, derimod kommer her alle de ubekiendte Størrelsers Coefficienter for paa en ordentlig Maade, hver lige mange gange med afvexlende Tegn. 3) I hver Tæller derimod forekommer alle de bekiendte Størrelser, som udgiorde den bekiendte Deel Æqvationer i samme Orden, som de øvrige Coefficienter af de ubekiendte; men i det Sted udelukkes alle de Coefficienter, som har multipliceret just den ubekiendte Størrelse, hvis Værdie søges.

§. 10.

Hvis man altsaa adskillede Æqvationerne fra hinanden efter Numere, saa man kaldte Een den første, den dernæst den anden, den derefter den tredie o. s. v., og udtrykkede alle Coefficienter af den ubekiendte Størrelse A, (som vi just for den Skyld saaledes har benævnet), med Navn af samme Lyd; men betegnet med liden Character, saasom a, da vidste man, at a var just den som overalt skulde udelukkes i Tælleren for den ubekiendte A, ligeledes b i Tælleren af B og saa videre; men for at have et beqvemt Merke, hvorved man kunde skille Coefficienterne i første Æqvation fra dem i anden, da kunde saadant skee, ved at sætte et lidet Tal under Bogstaverne, saasom $\overset{1}{a}$, $\overset{1}{b}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{2}{b}$, og saa videre, saa at Coefficienten af A i første Æqvation bliver $\underset{1}{a}$, i anden $\underset{2}{a}$ og saa videre, og ligedan omgaaes med de andre ubekiendte og deres Coefficienter.

cienter. *) De Størrelser, som ere den bekiendte halve Deel af hver Eqvation, vil vi kalde M, saaledes at M_1 hører til første Eqvation, M_2 til anden o. s. v. I Følge heraf bliver udi de fremsatte Eqvationer:

$$a = a_1 \quad b = b_1 \quad c = c_1 \quad m = M_1$$
$$d = a_2 \quad e = b_2 \quad f = c_2 \quad n = M_2$$
$$g = a_3 \quad h = b_3 \quad i = c_3 \quad p = M_3$$

§. 11.

Efter denne Maade at betegne de bekiendte Størrelser i de Eqvationer, vi forhen har behandlet, bliver den fælles Nævner $= a_1 b_3 c_2 - a_1 b_2 c_3 + a_2 b_1 c_3 - a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_1$, fremdeles er Tælleren

$$\text{i } A = M_1 b_3 c_2 - M_1 b_2 c_3 + M_2 b_1 c_3 - M_3 b_1 c_2 + M_3 b_2 c_1 - M_2 b_3 c_1$$
$$\text{i } B = a_1 M_3 c_2 - a_1 M_2 c_3 + a_2 M_1 c_3 - a_3 M_1 c_2 + a_3 M_2 c_1 - a_2 M_3 c_1$$
$$\text{i } C = a_1 b_3 M_2 - a_1 b_2 M_3 + a_2 b_1 M_3 - a_3 b_1 M_2 + a_3 b_2 M_1 - a_2 b_3 M_1$$

Saasnart man kaster Øinene herpaa, sees, at enhver af de tre Bogstaver a b c indtreffer i ethvert Led i den fælles Nævner, dernæst at Indices ere just de tre Tal 1, 2, 3, hvilke paa alle muelige Maader

 omsættes

*) Man kunde vel ogsaa, om nogen fandt deri mere Behag, betegne disse forskiellige Coefficienter paa følgende Maade, $\overset{I}{a}, \overset{II}{a}, \overset{III}{a}$ eller $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$; men i første Fald skulde disse Streger let kunde confunderes med hinanden, især naar de bleve mange, og tog et stort Ruum ind, desuden var den Betegnelse ikke saa beqvem for de Tavler, som siden skal indrettes. Den anden Maade at sætte Indices eller Tal oven over Bogstaverne, kunde frygtes at foraarsage en Confusion i Henseende til at forskiellige Digniteter just paa den Maade pleier at betegnes.

omsættes med hinanden efter de derom bekiendte Regler, og hvad Signa angaaer, kunde de selv samme Led, som nu har +, havt — og tvertimod efter det som blev viist §. 8.

Betragte vi videre alle Tællerne, see vi, at de samme Tegn og de samme Omsættelser af Tallene 1, 2, 3, har Sted allene med den Forandring, at, naar A søges, sættes M isteden for alle a, og det med samme Indices som ellers a skulde havt, og naar B søges, udelukkes alle b, og sættes M isteden med samme Indices og samme Signis, og saa fremdeles.

§. 12.

Jeg vil ikke opholde Læseren med at anstille Betragtninger over flere Exempler, hvor der skulde forekomme flere ubekiendte Størrelser; thi enhver, som vilde giøre Forsøg at udføre disse vidløftige Regninger, skulde dog altid befinde, som og af Sagens Beskaffenhed er noksom klart, at de Regler, vi have udledet af dette ene Exempel, ere almindelige, naar kun Æqvationerne have samme Form. Men da man for at benytte sig af disse almindelige Anmærkninger, behøver til Oplosningen for Æqvationer af tre ubekiendte alle muelige Omsættelser af Tallene 1, 2, 3, til Æqvationer af fire ubekiendte alle muelige Omsættelser af 1, 2, 3, 4 o. s. v., saa for at lette dette Arbeide vil jeg ei allene vise, hvorledes samme findes paa hastigste Maade, men endog anføre alle muelige Omsættelser for de naturlige Tal fra 1 til 6, hvilket er skeet i den tilsidst anbragte Tavle, hvilken enhver lettelig fremdeles paa samme Maade kunde udvide til endnu høiere Tal. Sammensættelsens Maade er denne: De Romerske Tal, som staae ved Siden for sig selv, betegne, hvor mange Tal der omsættes med hinanden, og følgelig give tilkiende, for hvad Slags Æqvationer disse Sammensættelser gielde, saasom for Æqvationer af 2, 3, 4 2c. ubekiendte Størrelser. Man begynder med at sætte I, dernæst i den Afdeling, hvor ved Siden

staaer

staaer II, sættes det Tal 2 for og efter 1. Ligeledes i den Afdeling, som ved Siden har III, sætter man 3 baade for, midt i og bag efter 2, 1 og 1, 2, hvorved der i denne Afdeling komme to Columner. De Tal, som høre til No. IV, og komme paa samme Maade ved at sætte det Tal 4 paa alle muelige Maader ind i de Tal, som ere udbragte i den tredie Afdeling, og skrives saaledes, at af hver Linie i tredie Afdeling kommer en heel Columne i 4de, og af hver Columne i tredie kommer en Linie af Columnen i 4de, hvilke Linier ved en enkelt Streg skilles fra hinanden. De Tal, som henhøre til No. V, faaes ligeledes ved at sætte det Tal 5 ind paa alle muelige Maader i 4de Afdeling. Af hver Linie giøres her ligeledes en Columne, og af hver Columne en Linie eller Række af Columner, som adskilles fra hinanden ved en enkelt Streg, og naar man har fuldført en saadan Deel, som i 4de Afdeling er adskilt ved en enkelt Streg, bliver det alt, som derved er udbragt, i femte Afdeling adskilt ved en dobbelt Streg. Maaden at gaae frem paa til de følgende Numere, hvorlangt man end vil continuere, bliver altid den samme, allene man for Tydeligheds Skyld indretter det saaledes, at naar en Deel under et foregaaende Numer eller Afdeling har været adskilt med een, to, tre eller flere Streger, da bliver det, som i følgende Afdeling af samme genereres, bemerket eller adskilt med en Streg mere. Oven over hver Columne sættes de første Bogstaver i sin naturlige eller sædvanlige Orden a, b, c, d &c. saa mange, som der behøves.

§. 13.

Saaledes kan man paa en ganske hurtig Maade sammensætte disse Tavler, og de Jagttagelser i Henseende til Liniernes og Delenes Adskillelses-Merker ere ikke saa aldeles fornødne, at man vel og kunde gaae den forbi, men samme tiene dog til en tydelig Orden, og paa en zirlig Maade at forestille, hvorledes det ene Tal frembringer det andet, og

hvorledes

hvorledes een Afdeling fremkommer af den anden. Det har og sin Nytte i Henseende til at bestemme Tegnene; thi da vi i det foregaaende har seet (§. 8.) at den halve Deel af Ledene har Signum +, og den anden halve Deel har —, og at dette kan omvexles, saa følger derudaf, at just de Tal i enhver Afdeling eller Classe, som ere hinanden modsatte, maae ogsaa have modsatte Tegn; følgelig, naar man træder over fra et Led til et andet, fra en Columne til en anden, fra en Samling af Columner til en anden af samme Rang, blive de Signa, hvormed man begynder, bestandig omvexlede, og det var da lige meget, med hvad Tegn man bemerkede det allerførste Led i enhver Hovedafdeling, og derefter kunde alle de følgende hastig og lettelig fastsættes. Men vil man undvære at give Agt paa de hinanden modsatte Dele i enhver Classe, og af den foregaaende Classe bestemme Tegnene i den efterfølgende, ligesom Tallene selv genereres og frembringes af de foregaaende, behøver man kun, at begynde enhver Columne med det samme Signum, som det Tal har havt i den foregaaende Classe, hvoraf bemeldte Columne dannes; men i Columnen selv omvexles Signa, saalænge den varer, saa at Tegnene endog paa denne Maade meget let kan tilsættes, efter hvert man sammensætter Tallene selv, hvilket altsammen ganske tydelig indsees af forommeldte Tavle.

§. 14.

Alt dette forudsat, har vi en ny og behændig Maade at finde de ubekiendte Størrelser af første Dignitet i flere Æqvationer, som kortelig er denne: Den første Coefficient af A sættes $= a_1$, den anden $= a_2$, den tredie $= a_3$ og saa videre, ligeledes den første Coefficient af B $= b_1$, den anden $= b_2$ o. s. v. Derefter søges den fælles Nævner allerførst saaledes: Lad for Exempel være fire ubekiendte Størrelser, som skal findes.

I den Classe eller Afdeling af Tavlen, som hører til fire ubekiendte, substitueres Valores eller Værdierne af a_1, a_2, a_3, a_4, saa og af b_1, b_2, b_3, b_4, ligeledes c_1, c_2, c_3, c_4 og d_1, d_2, d_3, d_4, (i hvilken Henseende Bogstaverne ere overskrevne enhver Columne i Tavlen). Foran sættes de Signa, som Tavlen udviser, dog saa ofte der blant de substituerede Bogstaver forekommer et ulige Tal af Negatives Størrelser, bliver det Signum, som staaer i Tavlen, forandret, nemlig + til — og — til +. Naar den fælles Nævner saaledes først er fastsat, bliver det siden en let Sag at faae alle Tællerne efter det, som allerede er viist §. 9. og 10. Hvad Signa her angaaer, anmerkes allene, at hvis M_1 eller M_2 ꝛc., som kan komme istedden for a_1, a_2, eller b_1, b_2 i Nævneren, har et andet Signum, end den Størrelse, i hvis Sted den sættes, da bliver Signum i Tælleren tvertimod det, som samme Led har i Nævneren, i øvrigt bliver de altid de samme. Hvorledes alt dette paa letteste og ordentligste Maade kan udrettes, skal tydeligere vises i et Exempel, som tilsidst efter denne Methode skal beregnes.

§. 15.

Det som herved maatte falde nogen ind, skulde maaskee være, at denne Maade ikke er almindelig, og kunde ikke have Sted, uden hvor Æqvationerne vare fuldstændige, og i alt havde den Skikkelse, som den i 5te §. anførte. Jeg vil altsaa vise, hvorledes denne her anførte Methode kan blive almindelig for alle de Æqvationer, som indeholde flere ubekiendte Størrelser af første Dignitet, de maae forresten see ud, hvordan de vil. Hele Sagen bestaaer deri, at man bringer de givne Æqvationer til deres behørige Form, hvortil udfordres tvende Ting: 1) at alle de ubekiendte Størrelser A, B, C ꝛc. skal forekomme i hver Æqva-

 tion,

tion, og det ikke mere end engang hver. 2) At alle de Størrelser, som ikke multiplicere en ubekiendt, blive bragte paa den ene Side for sig selv i enhver Eqvation, og hvis der ingen er, det er, i Fald alle Led i en Eqvation ere multiplicerede med ubekiendte Størrelser, da bliver den ellers bekiendte Deel af Eqvationen $= 0$. Herforuden er det ogsaa got, at man seer til, at der ei indløber megen Brøk, hvilken let kan hæves enten ved at multiplicere Eqvationen, eller ved at benævne saavel Tæller som Nævner, med een Bogstav. Den anden Regel kan ikke behøve nogen videre Oplysning, og den første opfyldes og letteligt, fornemmelig ved at sammenstøbe flere Coefficienter til een, og ved at erstatte de manglende Terminos i at anføre dem, men derhos sætte deres Coefficienter $= 0$, hvilket kan sees af følgende Exempler:

1) Sæt, at den Eqvation $a^2 b A - b B + d g C = f^2$ er en blant fire Eqvationer, hvor den fierde ubekiendte Størrelse heder D, da erstattes den manglende Terminus ved at sætte: $a^2 b A - b B + d g C + 0 D = f^2$.

2) Hvis en Eqvation af tre ubekiendte Størrelser har følgende Skikkelse, $a b A + b c B - d^2 A - f C = g$, kan man, som strax sees, i den Sted skrive: $(a b - d^2) A + b c B - f C = g$.

3) $(a b - d) + (A + B) - d A + g C = m$, forandres til $(a b - 2 d) A + (a b - d) B + g C = m$.

4) $\frac{A + d B + a C - g A + m}{a f} = n a$, forandres først til $A + d B + a^2 f C - a f g A + a f m = f n a^2$, og denne videre til $(1 - a f g) A + D B + a^2 f C = f n a^2 - a f m$.

5) $\frac{C - a + g}{A + C} = f$ (hvor B fattes) forandres til $C - a + g A + g C = f A + f C$, og denne igien til $(g - f) A + 0 B + (1 + g - f) C = a$.

6)

6) Hvis en ubekiendt Størrelse er Nævner af en Brøk, saasom $\frac{a}{B}$ eller $\frac{d}{A+g}$ og samme, hvor den kommer for, altid haves under samme Form, saaledes at man overalt kan udtage en Brøk, hvis Tæller er 1, og Nævneren enten den samme ubekiendte allene, eller forbunden med andre bekiendte Størrelser, dog altid de samme, da kan man sætte $\frac{1}{B}$ eller $\frac{1}{A+g} = T$, eller og man betiener sig af samme Maade, som i foregaaende Numer blev brugt, saafremt der ved Multiplicationen ikke skulde frembringes saadanne Termini, som indeholdte Facta af to ubekiendte.

7) Er Æqvationen $dA + acB = fC$, sættes i den Sted $dA + acB - fC = 0$. Af disse Exempler sees noksom, hvorledes man skal tilberede Æqvationerne, i Fald de ikke har den behørige Form, og uagtet man skulde synes undertiden at forøge Arbeidet ved at giøre Æqvationerne fuldstændige, og at indføre i dem flere Led, end som der var fra først af, saa er det dog ingen Forøgelse af Arbeidet i Henseende til den Maade, som herved bruges, efterdi, naar man siden efter Tavlen skal sammensætte de ubekiendte Størrelsers Værdier, gaaer man alle de Led i Tavlen forbi, hvor man merker, at nogen af Factores vil blive o. *)

*) Heraf kan ogsaa udledes følgende, som efter vor Maade at opløse disse Slags Æqvationer, strax falder i Øinene, (see tillige den 9, og 10. §) nemlig hvis alle Æqvationerne ere af den Beskaffenhed, at de i alle deres Terminis har en ubekiendt Størrelse, da blive alle de bekiendte Dele af Æqvationerne $= 0$, naar de ere reducerede til deres behørige Form, hvoraf videre følger, at alle Tællerne i de Værdier, som udtrykke de ubekiendte Størrelser, ogsaa bliver $= 0$, og i Fald man kalder den fælles Nævner Z, er enhver af

§. 16.

Eftersom Arbeidets Vidløftighed saavel i de almindelige Methoder, som i denne her anviiste, er saa meget større, jo flere Eqvationer man har at opløse, og disses Tal igien hænger af Antallet af de ubekiendte Størrelser, som altid udfordre et lige stort Tal af Eqvationer, hvis de skal være bestemte, saa vilde Arbeidet i enhver Slags Methode, ogsaa derved lettes, i Fald man kunde lave det saa, at Antallet af de ubekiendte Størrelser paa nogen Maade kunde indskrænkes. I den Henseende finder jeg fornødent at giøre nogle faa Anmerkninger, og allerførst at inddele deslige Eqvationer i tvende Slags, nemlig Afhængende eller Uafhængende. De første kalder jeg saadanne, hvor een eller flere af de foresatte Eqvationer ikke for sig selv kan fuldkommen opløses; men behøver at forbindes med de andre, i Fald deres ubekiendte Størrelser skal kunne udfindes i lutter bekiendte. Derimod kalder jeg de Uafhængende, hvis ubekiendte Størrelser kan blive fuldkommen bekiendte uden Hielp af andre Eqvationer, som dog selv kan

være

af de ubekiendte, som man havde at søge, $= \frac{0}{Z} = 0$, saafremt alle Coefficienterne ere saa beskafne, at ikke Z selv bliver $= 0$; thi hvis dette skeer, da er hver af de ubekiendte $= \frac{0}{0}$, det er at sige, aldeles ubestemte, og i Almindelighed, hvis de bekiendte Størrelser i Eqvationerne har saadant Forhold indbyrdes, at den fælles Nævner bliver $= 0$, da kan ingen af de ubekiendte, som søges, være bestemt i endelige Størrelser; thi enten blive de $= \frac{0}{0}$, det er ubestemt, eller (hvis Tællerne kaldes N,) kan de blive $= \frac{N}{0} = \infty$ eller uendelig.

være Afhængende af disse. Sæt for Exempel, at vi har fire ubekiendte Størrelser i de fire følgende Eqvationer:

$$dA - abB + fC = g$$
$$cA + fB - eD = h$$
$$bcA + fD = m$$
$$d^2D - faA = n$$

Blant disse Eqvationer ere de to første Afhængende af de to sidste, aasom hines ubekiendte Størrelser ikke kan findes uden ved disse sidstes Hielp, derimod ere de to sidste Uafhængende af de første, da de for sig selv kan opløses, og A og D allene af dem kan blive bekiendte; det vilde altsaa blive en Fordeel, at, hvor det skulde treffe, at een eller flere Eqvationer vare Uafhængende af de andre, man da først opløser de, som uden Hielp af de andre kan opløses, siden sætter de fundne Værdier ind i de andre afhængende Eqvationer; thi derved fik vi et mindre Antal af ubekiendte at behandle paa engang.

§. 17.

End videre, da een af de ubekiendte, især, naar samme ikke kommer for i mere end tvende Eqvationer, og ikke har alt for meget indviklede Factores, med liden Møie kan bortskaffes; men dette hielper igien dertil, at man efter vor Methode kan betiene sig af en Classe i Tavlen, som er en Grad lavere, og hvori der altsaa er et anseeligt Tal mindre Termini, saa kan det ofte være tienligt, at man først seer til at bortskaffe den ene ubekiendte Størrelse, og saaledes fremdeles præparerer Eqvationerne til at opløses efter den kortere Methode blant de Maader, paa hvilke den ene ubekiendte kan bortskaffes; er denne særdeles beqvem, at man multiplicerer een med den andens Factor, og siden subtraherer eller adderer, ligesom vi giorde i 4de og 5te §.

§. 18.

Ligesom der kunde søges en Forkortelse eller Lettelse i at man først bortskaffede een af de ubekiendte, saa kunde det og hænde, at man med Fordeel indtil videre kunde ansee een af dem som bekiendt, og derved gaae een af Æqvationerne forbi, indtil man paa den anviste Maade havde fundet et Udtryk for hver af alle de andre Størrelser, hvilke Udtryk da kom til at bestaae af bekiendte Størrelser tillige med den ene ubekiendte, som imidlertid var antaget som bekiendt. Ved at substituere disse Udtryk i den Æqvation, som var tilovers, vilde man faae en Æqvation, som havde ikkun een ubekiendt Størrelse, som altsaa lettelig kunde udfindes. *)

§. 19.

Nok en anden Forkortelsesmaade kunde undertiden treffes deri, at man kunde finde Leilighed til med Fordeel at sætte en ubekiendt isteden for flere, saasom i følgende Exempel:

$$b\,x - b\,y + f\,z = h$$
$$a^2 x - a^2 y - d\,z = m$$
$$g\,x + c\,z \qquad = n$$

Her

*) Den Fordeel, som kunde ventes af at iagttage denne og foregaaende §, har egentlig kun Sted, naar man betiener sig af den Methode, som i nærværende Afhandling er forestillet; thi i de sædvanlige Maader bærer man sig omtrent saaledes ad alligevel, eller det kan ansees, som den letteste Deel af de sædvanlige Methoder, og naar de bekiendte Størrelser vare formeget sammensatte og indviklede, vilde man komme fortere til Ende med Regningen ved slet hen at betiene sig af vor Methode, allermindst vilde det i sidste §. anførte skaffe nogen Forkortelse, dog har man villet nævne de forskiellige Maader, paa hvilke man kunde gaae frem, og som efter Omstændighederne kunde anvendes.

Her sætter jeg $x - y = A$, og x allene $= B$ og $Z = C$, og faaer derved følgende Æqvationer:

$$bA + oB + fC = h$$
$$a^2 A + oB - dC = m$$
$$oA + gB + eC = n$$

Efter denne Tilberedelse kan de tre ubekiendte Størrelsers Værdier, nemlig A, B, C, efter Tavlen under No. III. strax udtages, og det med stor Forkortelse, saasom de trende Led har o til Coefficient, og naar saaledes $A = x - y$ er bleven bekiendt saavel som $B = x$, er derved ogsaa y uden Møie bekiendt. Man merker ellers strax at A, som skal sættes istedet for x og y, maae kunne forestille enten Summen eller Differencen af bemeldte x og y, hvilken under eet er multipliceret, enten med Unitas eller en anden Factor. Dernæst udfordres, at een af samme Størrelser maae desuden forekomme; thi kommer ingen af dem for under nogen anden Form, da er Problema ikke fuldkommen bestemt, og det blev da allene Summen eller Differencen af x og y, som skulde kunne findes; komme de derimod begge for under anden Form, end den under hvilken de kan støbes sammen, fik man ved den anførte Maade een ubekiendt Størrelse mere end man havde med at bestille, hvoraf ingen Fordeel kunde ventes.

§. 20.

Hvad de Æqvationer angaaer, som indeholde høiere Digniteter af de ubekiendte Størrelser, da høre de egentlig ikke under nærværende Betragtning. Ikke desmindre kan dog saa meget agtes at høre hertil, at vise en Deel Tilfælde, hvor de kan bringes til den samme Form som de simple Æqvationer, og derved komme under samme Opløsnings-Maade, som den vi i nærværende Afhandling har forestillet. Dette kan just skee ved at anvende de nylig anførte §. Saaledes kunde det

for

for Exempel hænde, at den Æqvation, hvori en hoiere Dignitet forekom, var (§. 16.) enten selv Uafhængende af de ovrige, og kunde uden deres Hielp oploses eller og at de andre vare Uafhængende af den. I saa Fald betiente man sig af samme Regel, som der blev viist, og Sagen kom tilsidst derpaa ud, at oplose een af de hoiere Æqvationer, som ikkun indeholdte een ubekiendt, men i at finde de ovrige ubekiendte kunde man lette Arbeidet ved den anviste kortere Methode.

§. 21.

Dernæst, hvis een og den samme hoiere Dignitet forekommer i flere Æqvationer tillige, kunde den skaffes bort efter §. 17. paa den Maade, som er viist §. 4 og 5. Hvis nu derved ikke bliver tilbage uden et behorigt Antal af ubekiendte Storrelser af forste Dignitet, som kunde indtreffe, da har man siden ikkun at behandle dem efter vor Maade. For Exempel, lad os sætte fire Æqvationer, som indeholde fire ubekiendte Storrelser, x, y, z, q,

$$1)\quad x^2 - by - xy + aq = g$$
$$2)\quad -x^2 + cz + xy - dx = h$$
$$3)\quad cdz + cq - fy = n$$
$$4)\quad bx - by = m$$

ved at addere den forste og den anden faaes:

$$-by + aq + cz - dx = g + h$$

ved at multiplicere den fierde med x, faaes $bx^2 - byx = mx$; lad denne subtraheres fra den forste, efterat samme forst er multipliceret med b, det er, fra

$$bx^2 - b^2y - bxy + baq = bg,$$ derved faaes

$$-b^2y + baq = bg - mx$$

altsaa har vi nu fire Æqvationer, som ikke indeholde uden de forste Digniteter af ubekiendte Storrelser, nemlig:

$$e d z + c q - f y = n$$
$$b x - b y = m$$
$$- b y + a q + c z - d x = g + h$$
$$- b^2 y + b a q + m x = b g$$

§. 22.

For det tredie kunde man og betiene sig af det, som er sagt i § 18, at man nemlig lader en forekommende høiere Dignitet indtil videre ansees som bekiendt, og da efter vor Maade eller de forhen brugelige søger enhver af de simple ubekiendte Størrelsers Værdie; thi saa ofte derved kunde udbringes en Æqvation, som ikke indeholdt uden en ubekiendt Størrelse, lad være den indeholdte høiere Digniteter af samme, saa var den dog saadan, at den var uafhængende af de andre Æqvationer, og for sig selv kunde opløses, hvorefter de andre ubekiendte ogsaa siden kunde findes. I Fald dette Hielpemiddel bruges tilligemed det, der er viist i næst foregaaende §, saaledes at man først skaffer en saadan høiere Dignitet bort eller et Factum af tvende ubekiendte Størrelser, og siden anseer een eller flere Digniteter, som ere af een og den samme ubekiendte Størrelse som bekiendte, da kan det ofte skee, at man derved naaer sit Øiemerke ved at udlede en Æqvation, hvori ikke forefindes mere end een ubekiendt, hvilken, om den end indeholder høiere Digniteter, dog er aldeles uafhængende af de andre. Naar altsaa denne var funden, kunde dens Værdie indsættes i de andre Æqvationer, hvorsomhelst den forekom. Paa saadan Maade bliver den Methode, som vi til et Exempel har anbragt i foregaaende §, ikke saa indskrænket som det ellers maatte synes; thi om det havde truffet, at enten en Dignitet af x eller af de andre ubekiendte Størrelser havde været tilbage i de fire sidste Æqvationer, kunde samme blevet anseet som bekiendt, indtil man havde fundet en Æqvation, hvori ingen ubekiendte vare, uden denne Dignitet med nogen af dens ringere Grader, paa hvis Oplosning det da ville komme an for at kunne finde de andre ubekiendte, hvorpaa Læseren selv letteligt kan danne sig et Exempel ved allene at forestille sig x^3 eller x^2 eller y^2 rc. at være overbragt eller indeholdt i den bekiendte Deel af de forommeldte fire sidste Æqvationer i foregaaende §.

§. 23.

Endelig skulde det nogensinde hænde, at een af de ubekiendte Størrelser forekom overalt under en og den samme Dignitet, saasom overalt x^3 eller x^2 og ikke mere end den ene Dignitet, kunde man slet hensætte samme $=$ A, og finde dens Værdie tilligemed de andre, og var da intet tilbage uden at extrahere den behorige Radix.

§. 24.

Da vi saaledes har viist Exempler paa, hvorledes en Mængde endog af de hoiere Æqvationer saaledes kan tilberedes, at de paa samme Maade, som de simple, kan behandles, og Arbeidet ved deres Oplosning siden lettes ved vor kortere Methode, synes endnu at staae tilbage, at vi oplyse samme Methode til Udfindelse af flere ubekiendte Storrelser med et Exempel, da dens Anvendelse strekker sig til utallige.

Vi vil med Flid indrette Exemplet saaledes, at det tillige skal forestille baade Negatives Storrelser og ufuldstændige Æqvationer, saasom:

At finde fire ubekiendte Storrelser A, B, C, D af den Beskaffenhed, at hvis tre og tre i folgende Orden combineres med hinanden:

A, B, C

A, B, D

A, C, D

B, C, D

og man multiplicerer den forste Rad, nemlig A med f, B med g, og C med h, og subtraherer det sidste Factum h C fra Summen af de ovrige,

der

der da udkommer en given Størrelse = n, men hvis den anden Rad multipliceres i samme Orden med Qvadraterne af bemeldte Størrelser, og den sidste ligeledes subtraheres, der da udkommer Qvadraten af n eller n^2, den tredie Rad paa samme Maade multipliceret med den tredie Dignitet giver n^3 og den fierde ligeledes n^4. Æqvationerne blive altsaa følgende:

$$fA + gB - hC = n$$
$$f^2A + g^2B - h^2D = n^2$$
$$f^3A + g^3C - h^3D = n^3$$
$$f^4B + g^4C - h^4D = n^4$$

Da her altsaa ere fire ubekiendte Størrelser, som ikke alle forekomme i alle fire Æqvationerne, kan de giøres fuldstændige paa følgende Maade:

$$fA + gB - hC + oD = n$$
$$f^2A + g^2B + oC - h^2D = n^2$$
$$f^3A + oB + g^3C - h^3D = n^3$$
$$oA + f^4B + g^4C - h^4D = n^4$$

Naar Æqvationerne paa denne Maade ere indrettede, kan man efter Tavlen No. IV. ligefrem udtage og sammensætte den fælles Nævner, saadan som den skal være for samtlige ubekiendte Størrelser, og af den igien ved en ringe Substitution udbringe alle Tællerne. Man iagttager kun, at de Termini eller Led, som indeholde o, gaaes forbi, og at man sætter altid Signum — for de Termini, som indeholde et ulige Antal af Negatives Størrelser, indberegnet det Signum, som forefindes i Tavlen (see § 14.).

Man kan og forud giøre en tydelig Optegnelse over hvad enhver Character i Tavlen betyder efter de givne bekiendte Størrelser, i Fald man skulde synes det udkrævede større Møie og Agtpaagivenhed at

 substi-

substituere de bekiendte Storrelser ligefrem af Æqvationerne selv, hvilket dog uden megen Moie kunde skee, naar man allene iagttager, at de Tal, som forefindes i Tavlen, give tilkiende, af hvad for en Æqvation den bekiendte Storrelse, som svarer til dette Tal, skal udtages, og Bogstavens Navn viser ogsaa, hvilken Bogstavs Coefficient det er.

I nærværende Exempel bliver

$$\begin{array}{llll} a_1 = f & b_1 = g & c_1 = -h & d_1 = 0 \\ a_2 = f^2 & b_2 = g^2 & c_2 = 0 & d_2 = -h^2 \\ a_3 = f^3 & b_3 = 0 & c_3 = g^3 & d_3 = -h^3 \\ a_4 = 0 & b_4 = f^4 & c_4 = g^4 & d_4 = -h^4 \end{array}$$

Efter denne Optegnelse anviser Tavlen folgende fælles Nævner;

$$\overset{*}{-} f^3 g^2 \overset{*}{h} \overset{*}{h^4} \overset{*}{-} f^2 f^4 \overset{*}{h} \overset{*}{h^3} - f^2 g g^4 \overset{*}{h^3} \overset{*}{+} f^2 g g^3 \overset{*}{h^4} + f^3 f^4 \overset{*}{h} \overset{*}{h^2}$$

$$\overset{*}{+} f^3 g g^4 \overset{*}{h^2} \overset{*}{+} f f^4 g^3 \overset{*}{h^2} \overset{*}{+} f g^2 g^4 \overset{*}{h^3} - f g^2 g^3 \overset{*}{h^4}$$

Det er særdeles nyttigt, at efter hvert man afskriver Terminos i den fælles Nævner, man da tillige sætter en liden Stierne over hver Bogstav, som er Negative, saavelsom og en Stierne uden for, saa ofte samme Terminus i Tavlen har havt Signum —; thi da kan man i et Oieblik see, hvilket Signum der skal sættes foran. Det har og sin store Nytte, naar man af den fælles Nævner siden skal bestemme alle Tællerne; naar vi altsaa fremdeles vil udlede disse af hiin, holder jeg for, at man sikkerst og letteste kan gaae frem paa folgende Maade:

Man betiener sig af de Termini, som i Nævneren allerede ere fundne, saaledes at man (efter §. 11.) i nærværende Exempel, naar Tælleren i

A bestemmes	B bestemmes	C bestemmes	D bestemmes
for $+f$ sætter $+n$	for $+g$ sætter $+n$	for $-h$ sætter $+n$	for $-h^2$ sætter $+n^2$
$+f^2$ - - $+n^2$	$+g^2$ - - $+n^2$	$+g^3$ - - $+n^3$	$-h^3$ - - $+n^3$
$+f^3$ - - $+n^3$	$+f^4$ - - $+n^4$	$+g^4$ - - $+n^4$	$-h^4$ - - $+n^4$

Ved at substituere disse i den fælles Nævner *) og derhos iagttage, at Signum forandres, i Fald den indsatte Størrelse har et andet Signum, end den som gaaer ud, findes Tællerne fuldkommen med ringe Møie, og har alle sine Led, saafremt det ikke har været fornødent fra først af at multiplicere nogen af de ubekiendte Størrelser med o for at giøre Æqvationerne fuldstændige, men hvis dette er skeet, saasom i nærværende Exempel, da behøves endnu et Tillæg af nogle Termini, som forsvinde i Nævneren, men derfor ikke i Tælleren; thi istedenfor o kan

*) Det hielper ogsaa til at giøre denne Omsættelse hastig og let, at man har en saadan Regel at gaae efter, at naar Tællerne i A søges, da skeer Omsættelsen allene i de første Bogstaver af alle Led i Nævneren, naar B skal søges skeer Forandringen i de, som staae paa det andet Sted og saa videre. Det iagttages ogsaa, at man lader enhver Factor uforandret, saadan som den forefindes i Æqvationerne, derfor bør man i den fælles Nævner, som udtages, heller ikke sammenstøbe to eller flere Digniteter til een. For Exempel, vi skrive $-f^3 g^2 h h^4$ og ikke $-f^3 g^2 h^5$. Dette er en Forandring, som altid siden kan giøres, om man finder det for got. Ligeledes om de ubekiendte Størrelsers Factores ere sammensatte, saasom i Fald om den første, Multiplicator af A istedenfor f havde været $f-m$, eller endnu mere sammensat, da bør man indcirkle dem, at de, uden at blandes med de øvrige Factores i ethvert Led, kan ansees som en Bogstav eller en Størrelse for sig selv. Enhver saadan sammensat og indcirklet Størrelse, som ikkun ansees for een, bliver fra først af, naar Æqvationerne tilberedes, betegnede med Signo +, da derimod enhver Størrelse under Vinculo eller inden for Indcirklingen beholder sit behørige Tegn, og vil man da siden opløse Vinculum, som ikke bør skee, førend alle Tællerne ere bestemte, kan der af eet Led blive flere, hvis Signa uden mindste Møie bestemmes.

her komme nogen af de reelles Størrelser, som haves i den bekiendte Deel af Eqvationerne. I den Anledning er det, at, naar man vil udfinde Tælleren i A, eller hvad der i samme endnu skal komme til de Termini, som allerede ere fundne, da opsøger man ikkun alle de Tal i Tavlen, som indeholde $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{4}$, saasom denne var o i Eqvationen, og sættes i sammes Sted n^4, de øvrige Tal gives hver sin Betydning paa samme Maade, som da vi udfandt Nævneren, og er der nogen af de andre Tal, hvis Betydning er o, da gaaes den Terminus ogsaa her forbi. Ligeledes naar de manglende Termini i B skal findes, opsøges i Tavlen de Led, som indeholde $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{1}$ og saa mange af dem, som ikke forresten faaer o til Coefficient, legges til dem, som forhen ere fundne. Saaledes opsøges ogsaa de Led, som indeholde $\genfrac{}{}{0pt}{}{c}{2}$ for C, og $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{1}$ for D, og omgaaes paa samme Maade som i forrige. Vi vil altsaa her anføre Tællerne lige saadan, som de ere fundne, og blive da samme

$$iA = -n^3g^2hh^4 - n^2f^4hh^3 - n^2gg^4h^3 + n^2gg^3h^4 + n^3f^4hh^2 + n^3gg^4h^2$$
$$+ nf^4g^3h^2 + ng^2g^4h^3 - ng^2g^3h^4 + n^4g^2\overset{*}{h}\overset{*}{h}^3 - n^4gg^3\overset{*}{h}^2$$
$$iB = -f^3n^2hh^4 - f^2n^4hh^3 - f^2ng^4h^3 + f^2ng^3h^4 + f^3n^4hh^2 + f^3ng^4h^2$$
$$+ fn^4g^3h^2 + fn^2g^4h^3 - fn^2g^3h^4 + f^2n^3\overset{*}{h}\overset{*}{h}^4 - fn^3g^4\overset{*}{h}^2$$
$$iC = +f^3g^2nh^4 + f^2f^4nh^3 - f^2gn^4h^3 + f^2gn^3h^4 - f^3f^4nh^2 + f^3gn^4h^2$$
$$+ ff^4n^3h^2 + fg^2n^4h^3 - fg^2n^3h^4 - f^3gn^2\overset{*}{h}^4 - ff^4n^2\overset{*}{h}^3$$
$$iD = +f^3g^2hn^4 + f^2f^4hn^3 + f^2gg^4n^3 - f^2gg^3n^4 - f^3f^4hn^2 - f^3gg^4n^2$$
$$- ff^4g^3n^2 - fg^2g^4n^3 + fg^2g^3n^4 + f^3g^2g^4n + f^2f^4g^3n$$

Efterat vi saaledes har faaet alle Tællerne, hvor i enhver ikkun de to sidste Led ere umiddelbar udtagne af Tavlen efter det, som nylig blev sagt, de øvrige ere strax bestemte af den fundne Nævner, skulde det maaskee endnu ikke være til Overflod, at man gav de i nærværende Exempel antagne Størrelser f, g, h, n, deres bestemte Værdie i Tal for deraf lige-

ledes

ledes i virkelige Tal at udlede og finde de ubekiendte Størrelser; vi sætte altsaa, at f er $= 4$, $g = 3$, $h = 2$ og $n = 10$, hvoraf videre følger, at

$$
\begin{array}{llll}
f^2 = 16 & f^3 = 64 & f^4 = 256 & n^2 = 100 \\
g^2 = 9 & g^3 = 27 & g^4 = 81 & n^3 = 1000 \\
h^2 = 4 & h^3 = 8 & h^4 = 16 & n^4 = 10000
\end{array}
$$

Ligesom vi fandt det tienligst, da vi skulde udlede de almindelige Udtryk, først at søge Nævneren, saaledes er det ogsaa her i Tallenes Beregning det bedste at begynde med Nævnerens Udfindelse. I den Henseende er

$$
\begin{array}{ll}
+ f^2 g g^3 h^4 = 20736 & - f^3 g^2 h h^4 = 18432 \\
+ f^3 f^4 h h^2 = 131072 & - f^2 f^4 h h^3 = 65536 \\
+ f^3 g g^4 h^2 = 62208 & - f^2 g g^4 h^3 = 31104 \\
+ f f^4 g^3 h^2 = 110592 & - f g^2 g^3 h^4 = 15552 \\
+ f g^2 g^4 h^3 = 23328 & \overline{- 130624} \\
\overline{+ 347936} & \\
- 130624 & \\
\overline{+ 217312} &
\end{array}
$$

som er den fælles Nævner.

Naar man saaledes har fundet denne, kan man paa en ganske kort Maade finde alle Tællerne udtrykkede i Tal ved det at de fleste Termini i Tællerne indeholde de samme Størrelser som de dertil svarende Termini i Nævneren, uden een; naar man altsaa ud af $f^2 g g^3 h^4$ eller dens Værdie vil finde Værdien af det dertil svarende Led i A, nemlig $n^2 g g^3 h^4$, har vi kun at dividere 20736 med f^2 eller 16 og derefter, at multiplicere Qvotienten med n^2 eller 100, hvorved faaes 129600, og naar man saaledes gaaer fort, hvilket her synes unødvendigt videre at anføre, bliver Tælleren i $A = + 753520$, i $B = + 6150400$

i $C = + 9646080$, i $D = + 11469680$

og naar de ere bragte til en mindre fælles Nævner, som de samtlig kan modtage, og de udtrykkes i brudne Tal, befindes

$$A = \frac{47095}{13582},\quad B = \frac{384400}{13582},\quad C = \frac{602880}{13582},\quad D = \frac{713730}{13582},$$

hvilket Tal fyldestgiør, hvad som i det fremsatte Exempel udfordredes.

$\ast$

I.	a.			
	+ 1.			
II.	a. b.			
	+ 2.1			
	— 1.2			
III.	a.b.c	a.b.c		
	+ 3.2.1	— 3.1.2		
	— 2.3.1	+ 1.3.2		
	+ 2.1.3	— 1.2.3		
IV.	a.b.c.d	a.b.c.d	a.b.c.d	
	+ 4.3.2.1	— 4.2.3.1	+ 4.2.1.3	
	— 3.4.2.1	+ 2.4.3.1	— 2.4.1.3	
	+ 3.2.4.1	— 2.3.4.1	+ 2.1.4.3	
	— 3.2.1.4	+ 2.3.1.4	— 2.1.3.4	
	a.b.c.d	a.b.c.d	a.b.c.d	
	— 4.3.1.2	+ 4.1.3.2	— 4.1.2.3	
	+ 3.4.1.2	— 1.4.3.2	+ 1.4.2.3	
	— 3.1.4.2	+ 1.3.4.2	— 1.2.4.3	
	+ 3.1.2.4	— 1.3.2.4	+ 1.2.3.4	
V.	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e
	+ 5.4.3.2.1	— 5.3.4.2.1	+ 5.3.2.4.1	— 5.3.2.1.4
	— 4.5.3.2.1	+ 3.5.4.2.1	— 3.5.2.4.1	+ 3.5.2.1.4
	+ 4.3.5.2.1	— 3.4.5.2.1	+ 3.2.5.4.1	— 3.2.5.1.4
	— 4.3.2.5.1	+ 3.4.2.5.1	— 3.2.4.5.1	+ 3.2.1.5.4
	+ 4.3.2.1.5	— 3.4.2.1.5	+ 3.2.4.1.5	— 3.2.1.4.5
	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e
	— 5.4.2.3.1	+ 5.2.4.3.1	— 5.2.3.4.1	+ 5.2.3.1.4
	+ 4.5.2.3.1	— 2.5.4.3.1	+ 2.5.3.4.1	— 2.5.3.1.4
	— 4.2.5.3.1	+ 2.4.5.3.1	— 2.3.5.4.1	+ 2.3.5.1.4
	+ 4.2.3.5.1	— 2.4.3.5.1	+ 2.3.4.5.1	— 2.3.1.5.4
	— 4.2.3.1.5	+ 2.4.3.1.5	— 2.3.4.1.5	+ 2.3.1.4.5

a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e
+5.4.2.1.3	−5.2.4.1.3	+5.2.1.4.3	−5.2.1.3.4
−4.5.2.1.3	+2.5.4.1.3	−2.5.1.4.3	+2.5.1.3.4
+4.2.5.1.3	−2.4.5.1.3	+2.1.5.4.3	−2.1.5.3.4
−4.2.1.5.3	+2.4.1.5.3	−2.1.4.5.3	+2.1.3.5.4
+4.2.1.3.5	−2.4.1.3.5	+2.1.4.3.5	−2.1.3.4.5

a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e
−5.4.3.1.2	+5.3.4.1.2	−5.3.1.4.2	+5.3.1.2.4
+4.5.3.1.2	−3.5.4.1.2	+3.5.1.4.2	−3.5.1.2.4
−4.3.5.1.2	+3.4.5.1.2	−3.1.5.4.2	+3.1.5.2.4
+4.3.1.5.2	−3.4.1.5.2	+3.1.4.5.2	−3.1.2.5.4
−4.3.1.2.5	+3.4.1.2.5	−3.1.4.2.5	+3.1.2.4.5

a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e
+5.4.1.3.2	−5.1.4.3.2	+5.1.3.4.2	−5.1.3.2.4
−4.5.1.3.2	+1.5.4.3.2	−1.5.3.4.2	+1.5.3.2.4
+4.1.5.3.2	−1.4.5.3.2	+1.3.5.4.2	−1.3.5.2.4
−4.1.3.5.2	+1.4.3.5.2	−1.3.4.5.2	+1.3.2.5.4
+4.1.3.2.5	−1.4.3.2.5	+1.3.4.2.5	−1.3.2.4.5

a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e	a.b.c.d.e
−5.4.1.2.3	+5.1.4.2.3	−5.1.2.4.3	+5.1.2.3.4
+4.5.1.2.3	−1.5.4.2.3	+1.5.2.4.3	−1.5.2.3.4
−4.1.5.2.3	+1.4.5.2.3	−1.2.5.4.3	+1.2.5.3.4
+4.1.2.5.3	−1.4.2.5.3	+1.2.4.5.3	−1.2.3.5.4
−4.1.2.3.5	+1.4.2.3.5	−1.2.4.3.5	+1.2.3.4.5

VI.

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+6.5.4.3.2.1	−6.4.5.3.2.1	+6.4.3.5.2.1	−6.4.3.2.5.1	+6.4.3.2.1.5
−5.6.4.3.2.1	+4.6.5.3.2.1	−4.6.3.5.2.1	+4.6.3.2.5.1	−4.6.3.2.1.5
+5.4.6.3.2.1	−4.5.6.3.2.1	+4.3.6.5.2.1	−4.3.6.2.5.1	+4.3.6.2.1.5
−5.4.3.6.2.1	+4.5.3.6.2.1	−4.3.5.6.2.1	+4.3.2.6.5.1	−4.3.2.6.1.5
+5.4.3.2.6.1	−4.5.3.2.6.1	+4.3.5.2.6.1	−4.3.2.5.6.1	+4.3.2.1.6.5
−5.4.3.2.1.6	+4.5.3.2.1.6	−4.3.5.2.1.6	+4.3.2.5.1.6	−4.3.2.1.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
—6.5.3.4.2.1	+6.3.5.4.2.1	—6.3.4.5.2.1	+6.3.4.2.5.1	—6.3.4.2.1.5
+5.6.3.4.2.1	—3.6.5.4.2.1	+3.6.4.5.2.1	—3.6.4.2.5.1	+3.6.4.2.1.5
—5.3.6.4.2.1	+3.5.6.4.2.1	—3.4.6.5.2.1	+3.4.6.2.5.1	—3.4.6.2.1.5
+5.3.4.6.2.1	—3.5.4.6.2.1	+3.4.5.6.2.1	—3.4.2.6.5.1	+3.4.2.6.1.5
—5.3.4.2.6.1	+3.5.4.2.6.1	—3.4.5.2.6.1	+3.4.2.5.6.1	—3.4.2.1.6.5
+5.3.4.2.1.6	—3.5.4.2.1.6	+3.4.5.2.1.6	—3.4.2.5.1.6	+3.4.2.1.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+6.5.3.2.4.1	—6.3.5.2.4.1	+6.3.2.5.4.1	—6.3.2.4.5.1	+6.3.2.4.1.5
—5.6.3.2.4.1	+3.6.5.2.4.1	—3.6.2.5.4.1	+3.6.2.4.5.1	—3.6.2.4.1.5
+5.3.6.2.4.1	—3.5.6.2.4.1	+3.2.6.5.4.1	—3.2.6.4.5.1	+3.2.6.4.1.5
—5.3.2.6.4.1	+3.5.2.6.4.1	—3.2.5.6.4.1	+3.2.4.6.5.1	—3.2.4.6.1.5
+5.3.2.4.6.1	—3.5.2.4.6.1	+3.2.5.4.6.1	—3.2.4.5.6.1	+3.2.4.1.6.5
—5.3.2.4.1.6	+3.5.2.4.1.6	—3.2.5.4.1.6	+3.2.4.5.1.6	—3.2.4.1.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
—6.5.3.2.1.4	+6.3.5.2.1.4	—6.3.2.5.1.4	+6.3.2.1.5.4	—6.3.2.1.4.5
+5.6.3.2.1.4	—3.6.5.2.1.4	+3.6.2.5.1.4	—3.6.2.1.5.4	+3.6.2.1.4.5
—5.3.6.2.1.4	+3.5.6.2.1.4	—3.2.6.5.1.4	+3.2.6.1.5.4	—3.2.6.1.4.5
+5.3.2.6.1.4	—3.5.2.6.1.4	+3.2.5.6.1.4	—3.2.1.6.5.4	+3.2.1.6.4.5
—5.3.2.1.6.4	+3.5.2.1.6.4	—3.2.5.1.6.4	+3.2.1.5.6.4	—3.2.1.4.6.5
+5.3.2.1.4.6	—3.5.2.1.4.6	+3.2.5.1.4.6	—3.2.1.5.4.6	+3.2.1.4.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
—6.5.4.2.3.1	+6.4.5.2.3.1	—6.4.2.5.3.1	+6.4.2.3.5.1	—6.4.2.3.1.5
+5.6.4.2.3.1	—4.6.5.2.3.1	+4.6.2.5.3.1	—4.6.2.3.5.1	+4.6.2.3.1.5
—5.4.6.2.3.1	+4.5.6.2.3.1	—4.2.6.5.3.1	+4.2.6.3.5.1	—4.2.6.3.1.5
+5.4.2.6.3.1	—4.5.2.6.3.1	+4.2.5.6.3.1	—4.2.3.6.5.1	+4.2.3.6.1.5
—5.4.2.3.6.1	+4.5.2.3.6.1	—4.2.5.3.6.1	+4.2.3.5.6.1	—4.2.3.1.6.5
+5.4.2.3.1.6	—4.5.2.3.1.6	+4.2.5.3.1.6	—4.2.3.5.1.6	+4.2.3.1.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+6.5.2.4.3.1	—6.2.5.4.3.1	+6.2.4.5.3.1	—6.2.4.3.5.1	+6.2.4.3.1.5
—5.6.2.4.3.1	+2.6.5.4.3.1	—2.6.4.5.3.1	+2.6.4.3.5.1	—2.6.4.3.1.5
+5.2.6.4.3.1	—2.5.6.4.3.1	+2.4.6.5.3.1	—2.4.6.3.5.1	+2.4.6.3.1.5
—5.2.4.6.3.1	+2.5.4.6.3.1	—2.4.5.6.3.1	+2.4.3.6.5.1	—2.4.3.6.1.5
+5.2.4.3.6.1	—2.5.4.3.6.1	+2.4.5.3.6.1	—2.4.3.5.6.1	+2.4.3.1.6.5
—5.2.4.3.1.6	+2.5.4.3.1.6	—2.4.5.3.1.6	+2.4.3.5.1.6	—2.4.3.1.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
−6.5.2.3.4.1	+6.2.5.3.4.1	−6.2.3.5.4.1	+6.2.3.4.5.1	−6.2.3.4.1.5
+5.6.2.3.4.1	−2.6.5.3.4.1	+2.6.3.5.4.1	−2.6.3.4.5.1	+2.6.3.4.1.5
−5.2.6.3.4.1	+2.5.6.3.4.1	−2.3.6.5.4.1	+2.3.6.4.5.1	−2.3.6.4.1.5
+5.2.3.6.4.1	−2.5.3.6.4.1	+2.3.5.6.4.1	−2.3.4.6.5.1	+2.3.4.6.1.5
−5.2.3.4.6.1	+2.5.3.4.6.1	−2.3.5.4.6.1	+2.3.4.5.6.1	−2.3.4.1.6.5
+5.2.3.4.1.6	−2.5.3.4.1.6	+2.3.5.4.1.6	−2.3.4.5.1.6	+2.3.4.1.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+6.5.2.3.1.4	−6.2.5.3.1.4	+6.2.3.5.1.4	−6.2.3.1.5.4	+6.2.3.1.4.5
−5.6.2.3.1.4	+2.6.5.3.1.4	−2.6.3.5.1.4	+2.6.3.1.5.4	−2.6.3.1.4.5
+5.2.6.3.1.4	−2.5.6.3.1.4	+2.3.6.5.1.4	−2.3.6.1.5.4	+2.3.6.1.4.5
−5.2.3.6.1.4	+2.5.3.6.1.4	−2.3.5.6.1.4	+2.3.1.6.5.4	−2.3.1.6.4.5
+5.2.3.1.6.4	−2.5.3.1.6.4	+2.3.5.1.6.4	−2.3.1.5.6.4	+2.3.1.4.6.5
−5.2.3.1.4.6	+2.5.3.1.4.6	−2.3.5.1.4.6	+2.3.1.5.4.6	−2.3.1.4.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+6.5.4.2.1.3	−6.4.5.2.1.3	+6.4.2.5.1.3	−6.4.2.1.5.3	+6.4.2.1.3.5
−5.6.4.2.1.3	+4.6.5.2.1.3	−4.6.2.5.1.3	+4.6.2.1.5.3	−4.6.2.1.3.5
+5.4.6.2.1.3	−4.5.6.2.1.3	+4.2.6.5.1.3	−4.2.6.1.5.3	+4.2.6.1.3.5
−5.4.2.6.1.3	+4.5.2.6.1.3	−4.2.5.6.1.3	+4.2.1.6.5.3	−4.2.1.6.3.5
+5.4.2.1.6.3	−4.5.2.1.6.3	+4.2.5.1.6.3	−4.2.1.5.6.3	+4.2.1.3.6.5
−5.4.2.1.3.6	+4.5.2.1.3.6	−4.2.5.1.3.6	+4.2.1.5.3.6	−4.2.1.3.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
−6.5.2.4.1.3	+6.2.5.4.1.3	−6.2.4.5.1.3	+6.2.4.1.5.3	−6.2.4.1.3.5
+5.6.2.4.1.3	−2.6.5.4.1.3	+2.6.4.5.1.3	−2.6.4.1.5.3	+2.6.4.1.3.5
−5.2.6.4.1.3	+2.5.6.4.1.3	−2.4.6.5.1.3	+2.4.6.1.5.3	−2.4.6.1.3.5
+5.2.4.6.1.3	−2.5.4.6.1.3	+2.4.5.6.1.3	−2.4.1.6.5.3	+2.4.1.6.3.5
−5.2.4.1.6.3	+2.5.4.1.6.3	−2.4.5.1.6.3	+2.4.1.5.6.3	−2.4.1.3.6.5
+5.2.4.1.3.6	−2.5.4.1.3.6	+2.4.5.1.3.6	−2.4.1.5.3.6	+2.4.1.3.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+6.5.2.1.4.3	−6.2.5.1.4.3	+6.2.1.5.4.3	−6.2.1.4.5.3	+6.2.1.4.3.5
−5.6.2.1.4.3	+2.6.5.1.4.3	−2.6.1.5.4.3	+2.6.1.4.5.3	−2.6.1.4.3.5
+5.2.6.1.4.3	−2.5.6.1.4.3	+2.1.6.5.4.3	−2.1.6.4.5.3	+2.1.6.4.3.5
−5.2.1.6.4.3	+2.5.1.6.4.3	−2.1.5.6.4.3	+2.1.4.6.5.3	−2.1.4.6.3.5
+5.2.1.4.6.3	−2.5.1.4.6.3	+2.1.5.4.6.3	−2.1.4.5.6.3	+2.1.4.3.6.5
−5.2.1.4.3.6	+2.5.1.4.3.6	−2.1.5.4.3.6	+2.1.4.5.3.6	−2.1.4.3.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.2.1.3.4	+ 6.2.5.1.3.4	− 6.2.1.5.3.4	+ 6.2.1.3.5.4	− 6.2.1.3.4.5
+ 5.6.2.1.3.4	− 2.6.5.1.3.4	+ 2.6.1.5.3.4	− 2.6.1.3.5.4	+ 2.6.1.3.4.5
− 5.2.6.1.3.4	+ 2.5.6.1.3.4	− 2.1.6.5.3.4	+ 2.1.6.3.5.4	− 2.1.6.3.4.5
+ 5.2.1.6.3.4	− 2.5.1.6.3.4	+ 2.1.5.6.3.4	− 2.1.3.6.5.4	+ 2.1.3.6.4.5
− 5.2.1.3.6.4	+ 2.5.1.3.6.4	− 2.1.5.3.6.4	+ 2.1.3.5.6.4	− 2.1.3.4.6.5
+ 5.2.1.3.4.6	− 2.5.1.3.4.6	+ 2.1.5.3.4.6	− 2.1.3.5.4.6	+ 2.1.3.4.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.4.3.1.2	+ 6.4.5.3.1.2	− 6.4.3.5.1.2	+ 6.4.3.1.5.2	− 6.4.3.1.2.5
+ 5.6.4.3.1.2	− 4.6.5.3.1.2	+ 4.6.3.5.1.2	− 4.6.3.1.5.2	+ 4.6.3.1.2.5
− 5.4.6.3.1.2	+ 4.5.6.3.1.2	− 4.3.6.5.1.2	+ 4.3.6.1.5.2	− 4.3.6.1.2.5
+ 5.4.3.6.1.2	− 4.5.3.6.1.2	+ 4.3.5.6.1.2	− 4.3.1.6.5.2	+ 4.3.1.6.2.5
− 5.4.3.1.6.2	+ 4.5.3.1.6.2	− 4.3.5.1.6.2	+ 4.3.1.5.6.2	− 4.3.1.2.6.5
+ 5.4.3.1.2.6	− 4.5.3.1.2.6	+ 4.3.5.1.2.6	− 4.3.1.5.2.6	+ 4.3.1.2.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+ 6.5.3.4.1.2	− 6.3.5.4.1.2	+ 6.3.4.5.1.2	− 6.3.4.1.5.2	+ 6.3.4.1.2.5
− 5.6.3.4.1.2	+ 3.6.5.4.1.2	− 3.6.4.5.1.2	+ 3.6.4.1.5.2	− 3.6.4.1.2.5
+ 5.3.6.4.1.2	− 3.5.6.4.1.2	+ 3.4.6.5.1.2	− 3.4.6.1.5.2	+ 3.4.6.1.2.5
− 5.3.4.6.1.2	+ 3.5.4.6.1.2	− 3.4.5.6.1.2	+ 3.4.1.6.5.2	− 3.4.1.6.2.5
+ 5.3.4.1.6.2	− 3.5.4.1.6.2	+ 3.4.5.1.6.2	− 3.4.1.5.6.2	+ 3.4.1.2.6.5
− 5.3.4.1.2.6	+ 3.5.4.1.2.6	− 3.4.5.1.2.6	+ 3.4.1.5.2.6	− 3.4.1.2.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.3.1.4.2	+ 6.3.5.1.4.2	− 6.3.1.5.4.2	+ 6.3.1.4.5.2	− 6.3.1.4.2.5
+ 5.6.3.1.4.2	− 3.6.5.1.4.2	+ 3.6.1.5.4.2	− 3.6.1.4.5.2	+ 3.6.1.4.2.5
− 5.3.6.1.4.2	+ 3.5.6.1.4.2	− 3.1.6.5.4.2	+ 3.1.6.4.5.2	− 3.1.6.4.2.5
+ 5.3.1.6.4.2	− 3.5.1.6.4.2	+ 3.1.5.6.4.2	− 3.1.4.6.5.2	+ 3.1.4.6.2.5
− 5.3.1.4.6.2	+ 3.5.1.4.6.2	− 3.1.5.4.6.2	+ 3.1.4.5.6.2	− 3.1.4.2.6.5
+ 5.3.1.4.2.6	− 3.5.1.4.2.6	+ 3.1.5.4.2.6	− 3.1.4.5.2.6	+ 3.1.4.2.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+ 6.5.3.1.2.4	− 6.3.5.1.2.4	+ 6.3.1.5.2.4	− 6.3.1.2.5.4	+ 6.3.1.2.4.5
− 5.6.3.1.2.4	+ 3.6.5.1.2.4	− 3.6.1.5.2.4	+ 3.6.1.2.5.4	− 3.6.1.2.4.5
+ 5.3.6.1.2.4	− 3.5.6.1.2.4	+ 3.1.6.5.2.4	− 3.1.6.2.5.4	+ 3.1.6.2.4.5
− 5.3.1.6.2.4	+ 3.5.1.6.2.4	− 3.1.5.6.2.4	+ 3.1.2.6.5.4	− 3.1.2.6.4.5
+ 5.3.1.2.6.4	− 3.5.1.2.6.4	+ 3.1.5.2.6.4	− 3.1.2.5.6.4	+ 3.1.2.4.6.5
− 5.3.1.2.4.6	+ 3.5.1.2.4.6	− 3.1.5.2.4.6	+ 3.1.2.5.4.6	− 3.1.2.4.5.6

a.b.c.

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+ 6.5.4.1.3.2	− 6.4.5.1.3.2	+ 6.4.1.5.3.2	− 6.4.1.3.5.2	+ 6.4.1.3.2.5
− 5.6.4.1.3.2	+ 4.6.5.1.3.2	− 4.6.1.5.3.2	+ 4.6.1.3.5.2	− 4.6.1.3.2.5
+ 5.4.6.1.3.2	− 4.5.6.1.3.2	+ 4.1.6.5.3.2	− 4.1.6.3.5.2	+ 4.1.6.3.2.5
− 5.4.1.6.3.2	+ 4.5.1.6.3.2	− 4.1.5.6.3.2	+ 4.1.3.6.5.2	− 4.1.3.6.2.5
+ 5.4.1.3.6.2	− 4.5.1.3.6.2	+ 4.1.5.3.6.2	− 4.1.3.5.6.2	+ 4.1.3.2.6.5
− 5.4.1.3.2.6	+ 4.5.1.3.2.6	− 4.1.5.3.2.6	+ 4.1.3.5.2.6	− 4.1.3.2.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.1.4.3.2	+ 6.1.5.4.3.2	− 6.1.4.5.3.2	+ 6.1.4.3.5.2	− 6.1.4.3.2.5
+ 5.6.1.4.3.2	− 1.6.5.4.3.2	+ 1.6.4.5.3.2	− 1.6.4.3.5.2	+ 1.6.4.3.2.5
− 5.1.6.4.3.2	+ 1.5.6.4.3.2	− 1.4.6.5.3.2	+ 1.4.6.3.5.2	− 1.4.6.3.2.5
+ 5.1.4.6.3.2	− 1.5.4.6.3.2	+ 1.4.5.6.3.2	− 1.4.3.6.5.2	+ 1.4.3.6.2.5
− 5.1.4.3.6.2	+ 1.5.4.3.6.2	− 1.4.5.3.6.2	+ 1.4.3.5.6.2	− 1.4.3.2.6.5
+ 5.1.4.3.2.6	− 1.5.4.3.2.6	+ 1.4.5.3.2.6	− 1.4.3.5.2.6	+ 1.4.3.2.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+ 6.5.1.3.4.2	− 6.1.5.3.4.2	+ 6.1.3.5.4.2	− 6.1.3.4.5.2	+ 6.1.3.4.2.5
− 5.6.1.3.4.2	+ 1.6.5.3.4.2	− 1.6.3.5.4.2	+ 1.6.3.4.5.2	− 1.6.3.4.2.5
+ 5.1.6.3.4.2	− 1.5.6.3.4.2	+ 1.3.6.5.4.2	− 1.3.6.4.5.2	+ 1.3.6.4.2.5
− 5.1.3.6.4.2	+ 1.5.3.6.4.2	− 1.3.5.6.4.2	+ 1.3.4.6.5.2	− 1.3.4.6.2.5
+ 5.1.3.4.6.2	− 1.5.3.4.6.2	+ 1.3.5.4.6.2	− 1.3.4.5.6.2	+ 1.3.4.2.6.5
− 5.1.3.4.2.6	+ 1.5.3.4.2.6	− 1.3.5.4.2.6	+ 1.3.4.5.2.6	− 1.3.4.2.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.1.3.2.4	+ 6.1.5.3.2.4	− 6.1.3.5.2.4	+ 6.1.3.2.5.4	− 6.1.3.2.4.5
+ 5.6.1.3.2.4	− 1.6.5.3.2.4	+ 1.6.3.5.2.4	− 1.6.3.2.5.4	+ 1.6.3.2.4.5
− 5.1.6.3.2.4	+ 1.5.6.3.2.4	− 1.3.6.5.2.4	+ 1.3.6.2.5.4	− 1.3.6.2.4.5
+ 5.1.3.6.2.4	− 1.5.3.6.2.4	+ 1.3.5.6.2.4	− 1.3.2.6.5.4	+ 1.3.2.6.4.5
− 5.1.3.2.6.4	+ 1.5.3.2.6.4	− 1.3.5.2.6.4	+ 1.3.2.5.6.4	− 1.3.2.4.6.5
+ 5.1.3.2.4.6	− 1.5.3.2.4.6	+ 1.3.5.2.4.6	− 1.3.2.5.4.6	+ 1.3.2.4.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.4.1.2.3	+ 6.4.5.1.2.3	− 6.4.1.5.2.3	+ 6.4.1.2.5.3	− 6.4.1.2.3.5
+ 5.6.4.1.2.3	− 4.6.5.1.2.3	+ 4.6.1.5.2.3	− 4.6.1.2.5.3	+ 4.6.1.2.3.5
− 5.4.6.1.2.3	+ 4.5.6.1.2.3	− 4.1.6.5.2.3	+ 4.1.6.2.5.3	− 4.1.6.2.3.5
+ 5.4.1.6.2.3	− 4.5.1.6.2.3	+ 4.1.5.6.2.3	− 4.1.2.6.5.3	+ 4.1.2.6.3.5
− 5.4.1.2.6.3	+ 4.5.1.2.6.3	− 4.1.5.2.6.3	+ 4.1.2.5.6.3	− 4.1.2.3.6.5
+ 5.4.1.2.3.6	− 4.5.1.2.3.6	+ 4.1.5.2.3.6	− 4.1.2.5.3.6	+ 4.1.2.3.5.6

a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+ 6.5.1.4.2.3	− 6.1.5.4.2.3	+ 6.1.4.5.2.3	− 6.1.4.2.5.3	+ 6.1.4.2.3.5
− 5.6.1.4.2.3	+ 1.6.5.4.2.3	− 1.6.4.5.2.3	+ 1.6.4.2.5.3	− 1.6.4.2.3.5
+ 5.1.6.4.2.3	− 1.5.6.4.2.3	+ 1.4.6.5.2.3	− 1.4.6.2.5.3	+ 1.4.6.2.3.5
− 5.1.4.6.2.3	+ 1.5.4.6.2.3	− 1.4.5.6.2.3	+ 1.4.2.6.5.3	− 1.4.2.6.3.5
+ 5.1.4.2.6.3	− 1.5.4.2.6.3	+ 1.4.5.2.6.3	− 1.4.2.5.6.3	+ 1.4.2.3.6.5
− 5.1.4.2.3.6	+ 1.5.4.2.3.6	− 1.4.5.2.3.6	+ 1.4.2.5.3.6	− 1.4.2.3.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
− 6.5.1.2.4.3	+ 6.1.5.2.4.3	− 6.1.2.5.4.3	+ 6.1.2.4.5.3	− 6.1.2.4.3.5
+ 5.6.1.2.4.3	− 1.6.5.2.4.3	+ 1.6.2.5.4.3	− 1.6.2.4.5.3	+ 1.6.2.4.3.5
− 5.1.6.2.4.3	+ 1.5.6.2.4.3	− 1.2.6.5.4.3	+ 1.2.6.4.5.3	− 1.2.6.4.3.5
+ 5.1.2.6.4.3	− 1.5.2.6.4.3	+ 1.2.5.6.4.3	− 1.2.4.6.5.3	+ 1.2.4.6.3.5
− 5.1.2.4.6.3	+ 1.5.2.4.6.3	− 1.2.5.4.6.3	+ 1.2.4.5.6.3	− 1.2.4.3.6.5
+ 5.1.2.4.3.6	− 1.5.2.4.3.6	+ 1.2.5.4.3.6	− 1.2.4.5.3.6	+ 1.2.4.3.5.6
a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f	a.b.c.d.e.f
+ 6.5.1.2.3.4	− 6.1.5.2.3.4	+ 6.1.2.5.3.4	− 6.1.2.3.5.4	6.1.2.3.4.5
− 5.6.1.2.3.4	+ 1.6.5.2.3.4	− 1.6.2.5.3.4	+ 1.6.2.3.5.4	1.6.2.3.4.5
+ 5.1.6.2.3.4	− 1.5.6.2.3.4	+ 1.2.6.5.3.4	− 1.2.6.3.5.4	1.2.6.3.4.5
− 5.1.2.6.3.4	+ 1.5.2.6.3.4	− 1.2.5.6.3.4	+ 1.2.3.6.5.4	1.2.3.6.4.5
+ 5.1.2.3.6.4	− 1.5.2.3.6.4	+ 1.2.5.3.6.4	− 1.2.3.5.6.4	1.2.3.4.6.5
− 5.1.2.3.4.6	+ 1.5.2.3.4.6	− 1.2.5.3.4.6	+ 1.2.3.5.4.6	1.2.3.4.5.6