...SKE VIDENSKABERS SELSKABS
...DLINGER Bind 42 1969 Nr 11

533.7

One Dimensional Gas in Gravity

BY

MARK KAC and COLIN J. THOMPSON

(Innsendt til Generalsekretæren 31te juli 1969 av herr Kac)

Abstract

A one dimensional gas of hard rods attracting one another with a potential ...$\exp(-\gamma\,|x|)$ undergoes a phase transition in the limit $\gamma \to 0$. In the presence of a gravi... is shown that in the limit $\gamma \to 0$ the density as a function of height is discontinu... region, or in other words, the liquid and gas separate.

1. Introduction

It was shown a few years ago [1] that
attracting one another with a potential –
in the limit $\gamma \to 0$, corresponding to
over, the equation of state in th...
with the Maxwell constructi...
potentials of the form γ...
the classical van de...
The purpose
in the prese...
limit the
of he...

DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS
FORHANDLINGER Bind 41 1968 Nr 13

519.217
530.162

Autocorrelation Function of some 'Linear' Stationary Stochastic Processes

BY

M. KAC* AND H. WERGELAND

(Innsendt til Generalsekretæren 1ste oktober 1968 av herr Wergeland)

Let a general process $\xi(t;\,\alpha_1\alpha_2\,\ldots)$ be defined as an ordinary function of time t, and an enumerable set of random variables $\alpha_1\alpha_2\ldots$, The latter can be thought of as representing mechanical degrees of freedom whose instantaneous situation is ignored, but whose influence upon the probable motion of the coordinate ξ enters through the distribution assumed for the α's.

In this way for example, kinetic models of the Brownian Motion have been obtained from the motion of a manybody system by ignoring all the particles but one. The appropriate choice of random variables (α) is then the initial values of all the «invisible» coordinates and velocities.

Of particular interest is the question when $\xi(t\,,\,\alpha)$ is a Markov Process. For one-dimensional, stationary, Gaussian processes this is known to imply [see e.g. UHLENBECK and WANG 1945] that the autocorrelation function must be of exponential form:

$$E\{\xi(t)\xi(0)\}/E\{\xi^2\} = e^{-\beta t}$$

...however, that when the process is *linear* (in the sense to be ...ial form (1) prevails for a much wider class of

$\ldots(t) = \{\xi_1\xi_2\,\ldots\,\xi\,\ldots\}$ is simply ...ues $\{\xi(0) = \{\xi_1{}^0\xi_2{}^0\,\ldots\}$,

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 211-218)

Mark Kac
Autocorrelation Function of some 'Linear' Stationary Stochastic Processes
(med Harald Wergeland)
&
One Dimensional Gas in Gravity
(med Colin J. Thompson)
DKNVS Forhandlinger 1968 og 1969[1]

Eivind Hiis Hauge
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Denne epistelen om Mark Kac (uttales «Kats») er ingen nøytral rapport fra en vitenskapshistoriker. Den er ikke engang skrevet av en matematiker med full oversikt over Kac' bidrag til matematikkens utvikling. Skissen er skrevet av en takknemlig beundrer. Forarbeidet har vært en ren glede, spesielt (etter 25 år) å gjenlese Kac' livfulle selvbiografi [1] og et par av hans faglige artikler. Men også to intervjuer [2], [3] med hovedpersonen er stimulerende lesning. Til slutt anbefales Henry McKeans minneord [4], som også inkluderer Kac' publikasjonsliste.

Biografi

Mark Kac ble født i august 1914 i en liten by, Kremenets (transliterert) i Ukraina (der også fiolinisten Isaac Stern så dagens lys i 1920). Selve byen var preget av jødiske innbyggere og jødisk kultur, men omsluttet av et lite vennligsinnet,

[1] DKNVS Forhandlinger Bd. 41, nr. 13, s. 48-50, 1968; Bd. 42, nr. 11, s. 63-73, 1969.

russiskdominert samfunn. Første verdenskrig med etterfølgende bruduljer førte til at Polen som nasjon gjenoppstod, og fra 1921 var Kremenets, eller Krzemieniec som den nå het, polsk. Etter annen verdenskrig er Kremenets igjen en del av Ukraina. Da Kac som 11-åring begynte på den polskspråklige skolen, var polsk hans språk nr. fire. Språket hjemme var russisk, av en guvernante lærte han fransk og i den kortlivete, jødiske skolen (der hans far var rektor) var språket hebraisk. Sommeren 1930 var den 16-årige Kac ett år unna avsluttet skolegang. Han gjorde det godt i fysikk og matematikk og familien så for seg at han hadde en fremtid som ingeniør. Men så skjedde det som beseglet Kac' skjebne: Han ble bitt av et problem, han *ville* forstå utledningen av løsningen til tredjegradsligningen. Løsningen var jo velkjent, funnet av Cardano i 1545. Men hvordan konstruere en begripelig tankegang som førte frem til denne løsningen? Den 16-årige forskeren var hektet, han sov dårlig om natten, han mistet appetitten, han jobbet og regnet sent og tidlig, og så en dag: *Der* var veien funnet, med Cardanos løsning som strålende resultat. Faren hadde, stinn av skepsis, utlovt en ikke ubetydelig sum dersom poden mot formodning skulle løse problemet. Pengene ble utbetalt. Og metoden viste seg faktisk å være ny! Den ble publisert i «Mlody Matematyk» («Den unge matematiker»), og med lærerens sterke anbefaling i ryggen valgte Kac matematikk som løpebane.

Etter en strålende tidlig periode, med Kopernikus som sentral figur, hadde polsk vitenskap i århundrer befunnet seg i skyggenes dal. Men tidlig på 1900-tallet ble Polen gjenfødt som en vitenskapsnasjon å regne med, anført av fysikeren Marian Smoluchowski. Smoluchowski hadde samtidig med Einstein, men uavhengig av ham, vist at molekylenes uordnete, termiske bevegelser er forklaringen på de observerte brownske bevegelser. Atomer og molekylers eksistens var dermed ugjendrivelig demonstrert. I Warszawa vokste dessuten et sterkt matematikkmiljø frem, med Waclaw Sierpinski som nøkkelfigur. Også i Lwów (nå i Ukraina, transliterert Lvov) ble matematikkmiljøet på 1920-tallet av ypperste merke, med Hugo Steinhaus og Stefan Banach som de to mest kjente. Kac graviterte mot Steinhaus som utfordret Kac til å studere stokastisk uavhengige funksjoner. Forholdet dem i mellom utviklet seg både til et dypt personlig vennskap og til et faglig givende samspill som ga grunnlaget for Kac' videre utvikling. Sammen gjorde de en betydelig innsats for å bringe statistisk teori inn som en aktet og fruktbar del av matematikken. Kac forsvarte sin doktoravhandling om stokastisk uavhengige funksjoner i 1937. Tiltagende antisemittisme i Polen gjorde at han allerede en tid hadde sett seg om etter muligheter for å forlate landet. I 1937 søkte han stipend for et akademisk år i USA. Han fikk det ikke, og skuffelsen var stor. Men året etter var stipendet hans, og med denne utsettelsen berget han sannsynligvis livet.


Marc Kac

Stipendperioden ble tilbrakt ved Johns Hopkins universitetet i Baltimore og da den var slutt, var krigen allerede i full gang. Det var åpenbart blitt livsfarlig å returnere til det okkuperte Polen. Et jobbtilbud fra Cornell forenklet visumproblemene, og Kac kunne slå røtter i sitt nye hjemland. Hele hans jødiske familie var fanget i det europeiske inferno og ble utradert i tyskernes myrderier i 1942-43.

Med dette tragiske bakteppet greide likevel Kac å glede seg over sitt nye liv i Ithaca. Han giftet seg, fikk to barn, og var vital og produktiv i et stimulerende matematikkmiljø. Med stigende anerkjennelse ble det etter hvert tett mellom jobbtilbudene. Men Kac holdt fast ved Cornell og Cornell holdt fast ved ham. Med korte avstikkere til MIT Radiation Lab, der han kom i kontakt med George Uhlenbeck, ble han værende ved Cornell helt til 1961, da et uimotståelig tilbud kom fra Rockefeller University i New York. Der skulle han, sammen med de nære fysikk-kollegene George Uhlenbeck og Ted Berlin, bygge opp en gruppe i matematikk og statistisk fysikk, som en tverrfaglig styrking av et tidligere rent biomedisinsk forskningsinstitutt. Gruppens første postdoc var Per Christian Hemmer fra Trondheim. Etter en ekspansiv og spennende start havnet universitetet i løpet av 70-årene i store økonomiske vanskeligheter. Det ble tvunget til å legge seg på en «back-to-basics» filosofi, som i dette tilfellet betydde fornyet konsentrasjon om mikrobiologi og medisin. Det var derfor en resignert Kac som forlot Rockefeller i 1981 til fordel for University of Southern California, der han tilbrakte de siste 3 årene av sitt liv. Han døde i 1984, 70 år gammel.

Faglige høydepunkt

Samarbeidet med Steinhaus, der fintenking om statistisk uavhengighet sto sentralt, førte til at Kac «så» Gaussfordelinger på de mest overraskende steder. Ett eksempel: Ta summen over n forskjellige $\cos(\omega_n t)$ dividert med $\sqrt{n}$, der de forskjellige frekvensene er rasjonelt uavhengige (ingen sum over frekvensene med heltallige koeffisienter er lik null). Kac viste at brøkdelen av tiden der summen har verdier mellom a og b, for store n og stor totaltid T, er gitt ved det tilsvarende integral over normalfordelingen. Dette var overraskende fordi elementene, $\cos(\omega_n t)$, ikke er statistisk uavhengige i vanlig forstand. Men det resultatet Kac selv var aller mest stolt av, var følgende: Sammen med Paul Erdös viste han at antallet distinkte primtall i primtallproduktet som danner tallet N, i en viss forstand (ikke spesifisert her) er normalfordelt for store N. Til og med i tallteori er en type statistisk uavhengighet skjult!

Interessen for Smoluchowskis brownske bevegelser ble styrket under besøkene på MIT ved møter med Norbert Wiener på den ene siden og George Uhlenbeck på den andre. En brownsk virrevandring er enkelt sagt resultatet av en serie statistisk uavhengige skritt i det rom som er tilgjengelig. Med dette utgangspunktet konstruerte Kac den fundamentale løsningen av diffusjonsligningen som et vei-integral over alle mulige veier, praktisk talt i parallell med Richard Feynmans tilsvarende kvanteversjon med utgangspunkt i Schrödingerligningen.

Et elegant eksempel på Kac' bruk av det stokastiske perspektivet på tilsynelatende helt andre typer problemstillinger, er arbeidet fra 1966: «Can one hear the shape of a drum?» Et elementært problem mange studenter møter, er å finne tettheten av egenverdier til Laplaceligningen for store volum, med kravet at løsningene skal forsvinne på randen. Svaret utledes raskt når volumet er kubisk eller, i to dimensjoner, kvadratisk. I en forelesning i 1910 utfordret fysikeren H.A.Lorentz matematikerne til å vise at spektraltettheten er uavhengig av volumets *form.* Etter to år kunne Herman Weyl legge frem et bevis for påstanden. Oversatt til svingemodene til en membran festet langs kanten, betyr dette at spektraltettheten gir membranens areal. Men Laplaceligningen er også ligningen for stasjonære løsninger av diffusjonsligningen, og derved kunne Kac bruke diffusjonstankegang til å finne et langt enklere bevis for Weyls teorem. Beviset er bygd på det intuitivt åpenbare poeng at en diffunderende partikkel som starter et sted inne på membranen ikke kan «vite» noe om membranens form før diffusjonsprosessen har rukket frem til omkretsen.

Men Kac kunne gå videre: Han viste at når spektret er kjent, kan også omkretsens lengde beregnes, og antall hull (indre, lukkete omkretser) i membranen bestemmes. Spektret kan derfor si noe om membranens topologi. Utfordringen i forlengelsen av dette er formulert i tittelen: Kan vi bestemme membranens form *fullt ut*, dersom spektret er kjent i alle detaljer: Can one hear the shape of a drum? Kac selv var usikker på svaret, men helte mot et nei. Arbeidet (og filmen der Kac foreleser om emnet) førte til stor aktivitet på feltet. Men først i 1992 ble det, ved et konkret eksempel, vist at to membraner med forskjellig form har identisk spektrum. Svaret på spørsmålet er altså: Nei!

Med Uhlenbeck som inspirator, ble Kac for alvor interessert i problemer innen statistisk fysikk. Et klassisk paradoks er knyttet til at mekanikk på mikroskopisk nivå er tidsreversibel, mens for makroskopiske fenomener vet vi alle at tiden har en retning. Ludwig Boltzmann viste veien her, men var ute av stand til å oppklare paradoksene. Paul Ehrenfest konstruerte en enkel («dog-flee») modell som langt på vei belyste poenget. Men Kac gikk et skritt videre. Han var svært fornøyd med å ha addert en krystallklar «fotnote» (hans egen karakteristikk) til denne diskusjonen ved sin ringmodell. Den er (med en ørliten modifikasjon foreslått av Greg Wannier) strengt reversibel og også trivielt (Poincaré-) periodisk i tid. Likevel gir den, i makrogrensen, nettopp den irreversible oppførselen som Boltzmann-tenkning fører til.

Men det var innen faseoverganger Kac leverte sine viktigste bidrag til statistisk fysikk. Han fant (sammen med J.C.Ward) en enklere vei til Onsagers løsning av Isingmodellen. Han oppfant også den såkalte sfæriske modellen og fant løsningen sammen med Ted Berlin. Men først og fremst brukte han, sammen med Uhlenbeck og Hemmer, en integralligning til å finne den eksakte løsningen for den endimensjonale modellen med (hard) frastøtning av kort rekkevidde pluss svak, langtrekkende tiltrekning. Resultatet er den velkjente van der Waals ligningen, *inklusive* den horisontale linjen som for underkritiske temperaturer forbinder sameksisterende væske og gass («Maxwellkonstruksjonen»). Gruppen av tre arbeider som utleder og diskuterer dette resultatet er rett og slett en klassiker i moderne statistisk fysikk.

Arbeidet publisert i DKNVS' forhandlinger sammen med Colin Thompson må sees som en forlengelse av disse tre arbeidene. Australieren Colin Thompson var postdoc på Rockefeller samtidig med denne skriver (vi delte kontor) og der samarbeidet han intenst med Kac. Han vendte senere tilbake til Australia som professor. Det Kac og Thompson her gjør, er å vippe den endimensjonale modellen opp i vertikalen, for så å utsette den for et gravitasjonspotensial. Det første spørsmålet er da hvordan skalere for å få ut tilstandsligningen pluss makroskopisk hydrostatikk med skarp menisk mellom de to fasene. Skaleringen var allerede funnet av Hemmer og forfatterne bruker den. Men de matematiske hindrene for å fullføre programmet er langt fra trivielle, og artikkelen viser hvordan de skal passeres.

DKNVS-arbeidet sammen med Harald Wergeland er en generaliserende bemerkning om lineære stokastiske prosesser.

Mannen

Men en vitenskapelig biografi gir bare et blekt bilde av den fargesterke Mark Kac. Han var så utrolig full av liv, medmenneskelighet og overskudd. Holdningene hans til matematikk og vitenskap generelt har sammenheng med dette. Først og fremst var han *problemløser*. Teorikonstruksjoner var ikke hans felt, og aksiomatiske systemer så han på med bunnløs skepsis. En karakteristisk uttalelse er: «Aksiomer kommer og går, men det slående eksemplet varer evig!» Med slike holdninger er det ikke rart at han lot seg inspirere av fagfelt utenfor de strengt matematiske. Det skal vi i randsonen være dypt takknemlige for.

Kac hadde også sans for Poincarés skille mellom gudgitte og menneskeskapte problemer. De siste må det selvsagt også arbeides med, men det er første kategori det egentlig dreier seg om! Kanskje var det derfor at han var særlig stolt av sitt overraskende bidrag, sammen med Erdös, til tallteori. Og han sluttet ikke å undre seg over at noe så abstrakt som spektret til en integralligning skulle ha relevans for noe så konkret som likevekten mellom vann og vanndamp.

Forbindelsen til Trondheim var opprettet i og med samarbeidet med Per Hemmer, og for å avslutte personlig: Selv er jeg evig takknemlig for å ha blitt invitert til Rockefeller som postdoc, nettopp av Mark Kac. Han besøkte også NTHs Institutt for teoretisk fysikk på ettersommeren 1968. Det besøket ble utgangspunktet for publikasjonene i DKNVS' forhandlinger.

Og så var han proppfull av gode historier, som han ustanselig og sjenerøst delte med sine omgivelser. Rundt samme lunsjbord i til sammen tre år har jeg nok hørt de fleste både en og flere ganger. Skriftlig finnes noen av dem i Kac' selvbiografi, men det var hans egen muntlige versjon som virkelig ga dem liv og farge. På veien til Trondheim var han et drøyt døgn innom Bergen, og der måtte min far trå til for å skaffe ham hotellrom. Det endte med at mine foreldre tok oppgaven som guider mens Kac var der. Og da han vel og vakkert var satt på flyet til Trondheim, fikk jeg oppringning fra far, med smil i stemmen: «Vi er utslitte, men lykkelige!»

Alle vi som har hatt gleden av faglig og (ikke minst!) menneskelig kontakt med Mark Kac, kan prise oss lykkelige for det.

Referanser

[1] Mark Kac: *Enigmas of chance*, University of California Press, (1985).
[2] G.A.W.Boehm: Mark Kac's Beautiful World of Mathematics, Think, 35, 6, (1969).

[3] M.Feigenbaum: *An Interview with Stan Ulam and Mark Kac,* J.Stat.Phys., **39**, 455, (1985).
[4] H.P.McKean: *Mark Kac*, Nat.Acad.Sci., Biographical Memoirs, **90**, 215, (1990).

Summary

Mark Kac (pronounced Kaats) was born in 1914 in Kremenets (transliterated), a small town in Ukraine. After World War I and the conflicts in its aftermath, the town became part of Poland, with the name Krzemieniec. After World War II it is again Ukrainian. From the age of eleven Kac went to the Polish school in Krzemieniec (Polish was, in fact, his language number four, after Russian, French and Hebrew). At sixteen Kac found a new derivation of the Cardano solution of the cubic equation, and from then on mathematics was his subject of choice.

At the university in Lwów (now Ukrainian Lvov) mathematics was of international standing, due to Hugo Steinhaus and Stefan Banach. Kac gravitated towards Steinhaus, and together they focused on the concept of statistical independence. Their joint efforts considerably strengthened the standing of statistics as a well founded and fruitful part of mathematics. Kac received his doctorate in 1937. Due to Hitler's rise to power in Germany and increasing anti-Semitism in Poland, Kac had been on the lookout for possibilities to spend time abroad. In 1938 he got a stipend for an academic year in the US. That saved his life. Practically his entire family perished in the war.

After spending his stipend year at Johns Hopkins, Kac got an offer from Cornell University. He happily settled in Ithaca, married, raised two children, and gradually made a reputation for himself in the stimulating mathematics environment of that university. Kac stayed at Cornell until 1961 when he moved to Rockefeller University in New York. There, together with George Uhlenbeck and Ted Berlin, he built a group in mathematics and statistical physics. The first postdoc in the group was Per Christian Hemmer from Trondheim. Kac left Rockefeller for University of Southern California in 1981, where he stayed until his death at the age of 70, in 1984.

From the early collaboration with Steinhaus, Kac had a knack for seeing probabilistic aspects in the most unlikely problems. He was particularly proud of his contribution to number theory with Paul Erdös, where they showed that the number of distinct primes in a large integer is, in a certain sense, distributed according to Gauss' law. Another famous example of surprising use of stochastics is Kac's 1966 work (and filmed lecture) called: «Can one hear the shape of a drum?» There he uses the diffusion equation to demonstrate how the spectral

density of a membrane, clamped at the boundary, determines the area of the membrane, the length of its boundary and the number of holes in it. This paper stimulated considerable research activity. Finally, in 1992, a concrete example demonstrated that one *cannot* «hear» the detailed shape.

The contact with Uhlenbeck inspired Kac to think of problems in statistical physics. His ring model beautifully elucidates and lies to rest the reversibility paradoxes associated with the Boltzmann equation. And Kac's triplet of papers with Uhlenbeck and Hemmer has the status of a classic in modern statistical physics: There they show that the van der Waals equation (the Maxwell construction included) is the exact equation of state for a one-dimensional gas with hard repulsion of short range, plus weak, long range attraction.

As a mathematician Kac was a problem solver with little patience for abstract theory. A characteristic quote is «Axioms come and go, but the striking example is forever!» It is, therefore, not surprising that he was inspired by problems in the periphery of mathematics.

But Mark Kac was not only a first rate mathematician, he was a person full of life, outgoing, generous and witty. Those of us who had the privilege to spend inspiring time close to Mark Kac, are indeed fortunate!