

On the Schrödinger Equation of the Helium Atom I

BY
V. FOCK

(Immeditt til Generalsekretæren den 10de april 1958 av herr Wergetand)
(The present article is a translation by the author from his paper in the Proceedings of the USSR (4).)

The wave equation for the helium atom in a stationary state of momentum has been first deduced by E. Hylleraas on the ground state of helium [1]. This equation is a mechanical system with three degrees of freedom. The independent variables are the two distances r_1 and r_2 and the angle between their radii-vectors. Hylleraas took the Ritz method, Hylleraas took the wave function to be varied with the experimental values.

ELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS
RHANDLINGER Bind 36 1963 Nr 4 530.12
531.51

On the Schrödinger Equation of the Helium Atom II

BY
V. FOCK

(Immeditt til Generalsekretæren den 10de april 1958 av herr Wergetand)
§ 3. Solution of Hylleraas' equation for finite values of R .

Let us transform the Hylleraas equation (1.10) to hyperspherical coordinates as independent variables (these coordinates were discussed in the preceding section). The expression $\square^2 \psi$ is transformed by applying formula (2.03). The potential energy V being homogeneous of degree minus one-half in the variables (2.01), it may be written in the form:

(3.01)

$$V = \frac{U}{\sqrt{R}}$$

(3.02)

where U is independent of R and depends only on α and θ . We have

$$U = -\frac{Z}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{Z}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \alpha \cos \theta}}$$

(3.03)

Using expressions (2.03) and (3.01) for $\square^2 \psi$ and for V , the Hylleraas equation assumes the form

$$R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + 3R \frac{\partial \psi}{\partial R} + \square^2 \psi + \left(\frac{1}{2} ER - \frac{1}{2} U \sqrt{R} \right) \psi = 0$$

In attempting to solve equation (3.03), it would be natural to try an expansion

$$\psi = R^{\frac{1}{2}} \psi_0 + R^{\frac{3}{2}} \psi_1 + R^{\frac{5}{2}} \psi_2 + \dots + R^{n-\frac{1}{2}} \psi_n + \dots$$

Substituting in integral and half-integral powers of R and equating the coefficients of like powers of R to zero, we obtain a set of equations for the ψ_n .

The Principles of Relativity and of Equivalence in the Einsteinian Gravitation Theory I

BY
V. FOCK

(Fremlagt i Fellesmøtet 11te februar 1963)

Introduction.
The aim of the present paper is to analyse the principles that constitute the foundations of the Einsteinian Gravitation Theory, or, in other words, the logical structure of this theory. The relativity theory and the theory became classical, but in the opinion of many people these principles are inadequate. This is the source of an inadequate terminology, particularly the Einsteinian gravitation theory, are connected with the conservation of energy and momentum. Some attempts have been made to reformulate the theory in a way that facilitates the conservation of energy and momentum. This terminology is therefore, to terminological questions. The latter expression is used here, therefore, to terminological questions. This terminology is used here, therefore, to terminological questions. This terminology is used here, therefore, to terminological questions.

First of all, we have to consider the terminology of general relativity theory. This terminology is used here, therefore, to terminological questions. This terminology is used here, therefore, to terminological questions. This terminology is used here, therefore, to terminological questions.

DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS
FORHANDLINGER Bind 36 1963 Nr 5

The Principles of Relativity and of Equivalence in the Einsteinian Gravitation Theory II

BY
V. FOCK

(Fremlagt i Fellesmøtet 11te februar 1963)

4. Does the general relativity principle exist?
According to the traditional argumentation, due to Einstein, the general relativity principle is thought as a generalization of the Galilean relativity principle to the case of an arbitrary accelerated motion of the frame of reference. The general relativity principle is considered by Einstein as a motivation for the requirement of the general covariance of equations which, in turn, is considered as the very foundation and the characteristic feature of the gravitation theory created by him. This is also the argumentation that led Einstein to adopt the name "general relativity theory" for his gravitation theory.

This argumentation is, however, fallacious. First of all, the notion of an accelerated frame of reference (in the sense of a laboratory in accelerated motion) allows no unambiguous physical definition: the rigid body model is inapplicable in this case, since all bodies, when accelerated, experience deformations depending on their elastic properties; and any attempt to take this circumstance into account cannot be introduced — in contrast to the notion of a laboratory in accelerated motion with a laboratory, but simply with a coordinate system, we meet with other unsurmountable difficulties connected with the formulation of the relativity principle. Such a formulation must necessarily include a statement on the existence of corresponding physical processes in different frames of reference; this necessity exists in the case of the special as well as of the general relativity principle (if the latter is to have any sense). But the laws of nature need not be the form of differential equations (to which the laws of nature need not be field equations they are determined by the physical conditions of the experiment).



Det Kongelige Norske
Videnskabs Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 231-x)

Vladimir Fock
*On the Schrödinger Equation of the Helium Atom, og
The Principles of Relativity and of Equivalence In the
Einsteinian Gravitation Theory*
DKNVS Forhandlinger 1958 og 1963¹

Jan Myrheim

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Navnet Fock er godt kjent blant fysikere, men i hvert fall her til lands er det nok helst navnet vi kjenner og ikke så mye mannen. De fleste som studerer kvantemekanikk vil før eller siden få høre om Hartree-Fock-metoden, som brukes for å gjøre numeriske beregninger av energier og andre egenskaper til atomer med mange elektroner. Og i kvantefeltteorien er Fock-rommet et uunnværlig hjelpemiddel når vi vil beskrive prosesser der antallet partikler varierer. Fock-rommet er tilstandsrommet for et fysisk system som inneholder null, en, to, tre eller flere identiske partikler, for eksempel fotoner, elektroner, kvarker, eller alle på en gang. Begge disse begrepene går tilbake til pionerårene for kvantemekanikken og kvantefeltteorien, rundt 1930. Fock nevnes som den russiske kvantemekanikkens far, og også som den fremste forkjemperen for den generelle relativitetsteorien blant sovjetiske fysikere. I 1955 ga han ut et standardverk om generell relativitetsteori, *Teorien om rom, tid og gravitasjon*.

¹ *On the Schrödinger Equation of the Helium Atom*, del I og II, DKNVS Forhandlinger 1958, bind 31, nr. 22, s. 138-144 og nr. 23, s. 145-152.

The Principles of Relativity and of Equivalence In the Einsteinian Gravitation Theory, del I og II, foredrag holdt i Selskabet 11. februar 1963, DKNVS Forhandlinger 1963, bind 36, nr. 4, s. 16-21, og nr.5, s. 22-27.

Vladimir Fock ble født 22/12 1898 i St. Petersburg, og døde 27/12 1974 i samme by, som da het Leningrad. Han levde midt oppe i noen av de mest dramatiske begivenhetene i verdenshistorien, både politisk og vitenskapelig. Han studerte ved det som da het Universitetet i Petrograd, men avbrøt studiene for å melde seg frivillig som soldat i første verdenskrig. Etter et års tjeneste i artilleriet ble han dimittert fordi han ble mer og mer døv, en plage han måtte leve med siden. Han avla eksamen i 1922, to år før byen skiftet navn til Leningrad, og ble professor ved samme universitet i 1932.

Terroren under Stalin i 1930-årene er noe vi i vår trygge del av verden vanskelig kan ha noen realistisk forestilling om. Fock var en loyldig sovjetborger og ingen opposisjonell av natur, men var selvstendig og uredde og forsvarte både faget sitt og kolleger som kom i vanskeligheter. Han ble selv arrestert to ganger, i en dag i 1935 og i fem dager i 1937, siste gang ble han satt fri etter at Pjotr Kapitsa tok ham i forsvar.

Få byer, om noen, har vært utsatt for verre krigshandlinger enn den tyske beleiringen av Leningrad under andre verdenskrig. På ett gravsted ligger nesten en halv million ofre, de fleste sivile, i store fellesgraver. Under beleiringen var universitetet evakuert til Saratov ved Volga.

Fock var aktivt med helt fra starten av da den moderne kvantemekanikken ble til i årene 1925-27. Han er en av fire som har fått æren for å ha oppdaget Klein-Gordon-ligningen, den relativistiske bølgeligningen for spinnløse partikler. Da Erwin Schrödinger som den første beregnet energinivåene i hydrogenatomet ved hjelp av en bølgeligning, prøvde han først med den relativistiske ligningen, som vi nå kaller Klein-Gordon-ligningen. Men fordi han ikke fikk de beregnede nivåene til å stemme med den observerte finstrukturen i hydrogenspektret, forkastet han denne ligningen og publiserte i stedet den ikke-relativistiske versjonen, som vi kjenner som Schrödinger-ligningen, og som ikke gir noen finstruktur i det hele tatt. Dermed fikk Klein, Gordon og Fock anledning til å publisere den relativistiske ligningen. Grunnen til at Klein-Gordon-ligningen gir feil finstruktur i hydrogenspektret er at elektronet spinner om sin egen akse, det har spinn $\frac{1}{2}$. Elektronspinnets var ukjent for Schrödinger, og den korrekte relativistiske bølgeligningen for elektronet er Dirac-ligningen.



Vladimir Fock

Fock gikk ett skritt videre og viste hvordan bølgeligningen må se ut for en ladd partikkel i et magnetfelt, der kraften på partikkelen er hastighetsavhengig. Samtidig med Hermann Weyl og Fritz London så han at denne formen på bølgeligningen er en konsekvens av en matematisk symmetri, såkalt gauge-invarians, eller justerinvarians på norsk. Denne idéen, og navnet justerinvarians, Eichinvarianz på tysk, stammer fra Weyls forsøk ti år tidligere på å lage en enhetlig teori for gravitasjon og elektromagnetisme. I dag har vi gauge-teorier for alle de fundamentale vekselvirkningene, både elektromagnetisk, svak og sterk vekselvirkning.

Focks første bidrag til kvanteteorien gjorde ham så kjent ute i verden at han fikk stipend fra Rockefeller-stiftelsen for ett års opphold i Paris og i Göttingen, som den gang var begivenhetenes sentrum. I denne perioden var han svært produktiv. Sammen med Max Born beviste han det adiabatisk teoremet, som sier for eksempel at et atom i grunntilstanden ikke vil bli eksitert til et høyere energinivå selv om det utsettes for en tidsavhengig ytre påvirkning, bare den ytre påvirkningen varierer sakte nok. Han viste hvordan Dirac-ligningen passer inn i den generelle relativitetsteorien. Han bidro til å utvikle Hartree-Fock-metoden for kvantemekaniske beregninger i et system med mange elektroner. I 1932 publiserte han en artikkel sammen med Boris Podolsky og Paul Dirac om kvanteelektrodynamikk, og i en annen artikkel fra samme år så Fock-rommet dagens lys.

Den generelle relativitetsteorien ble han tidlig kjent med som student, spesielt gjennom Alexander Friedmann, som grunnla hele den moderne kosmologien med sin berømte artikkel fra 1922. Fock oversatte artikkelen til tysk, etter ønske av forfatteren. Slik fungerte han som en slags fødselshjelper for kosmologien, og da var det nærmest et lite paradoks at han ikke ville arbeide med den selv. Han så på den som alt for spekulativ, fordi den var så dårlig underbygd av observasjoner. Den holdningen var utvilsomt representativ for flertallet av fysikere helt fram til de siste tiårene. Nå først finnes det så mye data at kosmologien er blitt en respektabel kvantitativ vitenskap.

I 1939 utledet han bevegelsesligningene for graviterende masser, i grensen når gravitasjonsfeltet er svakt, uavhengig av Einstein, Infeld og Hoffmann, som utledet de samme ligningene i 1938. Fock insisterte på å bruke såkalte harmoniske koordinater som går asymptotisk over i de naturlige tids- og romkoordinatene i et inertialsystem når en kommer langt bort fra massene som er kilder for gravitasjonsfeltet.

Den første av de to artiklene av Fock i Det kongelige norske videnskabers selskaps forhandlinger, fra 1958, er hans egen oversettelse av en artikkel i tidsskriftet for det sovjetiske vitenskapsakademiet, der han beskriver en metode for å beregne grunntilstanden til heliumatomet. Bølgefunksjonen avhenger av posisjonene til de

to elektronene, det er seks variable, men siden grunntilstanden er rotasjons-symmetrisk, kan en eliminere tre vinkler, så det blir tre avstandsvariable igjen. Egil Hylleraas gjorde nøyaktige numeriske beregninger med slike metoder i 1928-30. Hylleraas brukte Ritz's variasjonsmetode og utviklet bølgefunksjonen i grunntilstanden som en eksponensialfunksjon multiplisert med en potensrekke i de tre avstandene. Når han inkluderte bare fem variable koeffisienter i potensrekken, fikk han en verdi for energien som avviker så lite som 0,01% fra den eksperimentelle verdien. Variasjonsmetoden har den generelle egenskapen at feilen i energi avhenger kvadratisk av feilen i bølgefunksjonen, litt løst sagt betyr det at 1% nøyaktighet i bølgefunksjonen gir 0,01% nøyaktighet i energien.

Andre pekte på at den eksakte bølgefunksjonen ikke kan ha den formen som Hylleraas antok, og derfor kan metoden aldri gi et eksakt resultat, selv med en uendelig potensrekke. Det var denne prinsipielle svakheten ved Hylleraas's metode som Fock ville reparere ved å lage en rekkeutvikling som oppfører seg korrekt nær de singulære punktene til differensialligningen, slik at den kan konvergere mot den eksakte bølgefunksjonen. Focks måte å angripe problemet på er interessant. Han innfører en ny vinkelvariabel, uten fysisk tolkning, og får dermed en firedimensjonal differensialligning i stedet for Hylleraas's tredimensjonale ligning. Etterpå forkaster han de løsningene som avhenger av den ufysiske vinkelen. I artikkelen gir han ingen numeriske verdier beregnet med sin nye metode.

Artikkelen er på 15 sider og er trykt i to deler. De to delene må leses under ett, fordi noen av sidene er feilnummerert og stokket om i trykkeriet, så leseren må sortere dem selv.

Den andre artikkelen av Fock, også trykt i to deler, er et foredrag holdt i Videnskapsselskabet 11. februar 1963. Her presenterer han sin filosofi omkring den generelle relativitetsteorien, eller Einsteins gravitasjonsteori, som han insisterer på at den bør hete. Fock argumenterer mot de to prinsippene som Einstein ser på som grunnlag for teorien, nemlig det generelle relativitetsprinsippet og ekvivalensprinsippet.

Det spesielle relativitetsprinsippet finner han meningsfullt, det ble formulert allerede av Galileo Galilei, og sier i Focks formulering at det eksisterer tilsvarende fysiske prosesser i to vilkårlige inertialsystem. Den antagelsen som Einstein innførte, som var ny i forhold til Galilei, og som leder til den spesielle relativitetsteorien, var at lyshastigheten er den samme i alle inertialsystem. Men Fock godtar ikke at det eksisterer noe generelt relativitetsprinsipp som omfatter akselererte referansesystem og ikke bare inertialsystem. Innvendingen er først og fremst at akselererte fysiske objekter påvirkes av krefter som deformerer dem alt

etter hvilke elastiske egenskaper de har, og derfor er det problematisk å snakke om fysiske laboratorier i akselerert bevegelse.

Einsteins ekvivalensprinsipp går ut på at akselerasjon og gravitasjon er ekvivalente, i en viss forstand. Problemet med dette, i følge Fock, er at denne ekvivalensen er rent lokal, den gjelder for eksempel ikke i et område som er stort nok til å omfatte hele solsystemet.

Både det generelle relativitetsprinsippet og ekvivalensprinsippet ser Fock som viktig motivasjon for Einstein da teorien ble til, men han ser ingen plass for dem i den ferdige teorien, i hvert fall ikke som fundament for teorien. Når vi kjenner den ferdige teorien, sier han, ser vi klart at det grunnleggende prinsippet er den generelle kovariansen, at teorien er invariant under vilkårlige koordinattransformasjoner. Men også dette prinsippet er uten innhold, helt til vi krever at naturlovene skal ha en bestemt form, nemlig at de skal være differensialligninger. Fock kunne ha gjort Einsteins ord til sine, at når huset står ferdig, så river en stillaset som en brukte under byggingen. Forskjellen mellom de to var at Einstein så på det generelle relativitetsprinsippet og ekvivalensprinsippet som fundament for huset og ikke som stillas.

Nå når vi nå nærmer oss hundreårsjubliet for teorien, er det lett å gi Fock mye rett, i hvert fall i at det generelle relativitetsprinsippet er problematisk og ikke en sentral del av teorien. Men det kan være en god idé å holde fast på ekvivalensprinsippet, med den klare forståelsen at det gjelder rent lokalt. Det viser seg svært nyttig, for eksempel når det gjelder å forstå et så dagligdags fenomen som flo og fjære.

Som kjent er gravitasjonskraften fra Månen opphav til den største tidevannseffekten, mens effekten fra Sola er omtrent en tredjedel så stor. Den enkleste beskrivelsen får vi om vi innfører et ikke-roterende koordinatsystem som følger sentrum av Jorda. Fordi Jorda faller fritt i gravitasjonsfeltet fra Sola og Månen, er dette en god tilnærming til et inertialsystem, i følge ekvivalensprinsippet. I dette koordinatsystemet ville det ha vært absolutt ingenting igjen av gravitasjonsfeltene fra Sola og Månen, og følgelig heller ingen tidevannseffekt, om det ikke hadde vært for at disse feltene er inhomogene. Feltet fra Månen, for eksempel, er inhomogent fordi det peker inn mot sentrum av Månen og er omvendt proporsjonalt med kvadratet av avstanden til dette sentret. Feltet fra Sola er mer homogent enn feltet fra Månen, men bare fordi avstanden til Sola er 400 ganger større. Flo og fjære skyldes ene og alene disse inhomogenitetene. Det er en utbredt misforståelse at en må ta hensyn til sentrifugalkrefter og Corioliskrefter i et roterende koordinatsystem for å forstå flo og fjære. Ekvivalensprinsippet gir en vesentlig enklere forklaring.

En kan spørre seg hvorfor Fock gjør et så stort nummer av de filosofiske innvendingene mot Einsteins forståelse av sin egen gravitasjonsteori. Denne artikkelen kan antagelig best forstås som en gjenklang av en alvorlig konflikt et tiår tidligere, mot slutten av Stalin-tiden, der Einstein og hans teorier ble angrepet på ideologisk grunnlag. Fock var blant dem som forsvarte Einstein på det sterkeste, men han var for ærlig til å underslå sine innvendinger mot Einstein, selv når han opptrådte som forsvarer.

Foruten at Vladimir Fock altså besøkte Trondheim i 1963, finnes det en annen ganske løs tilknytning. I 1933 ga Fock ut en bok om elektromagnetiske metoder for geofysisk utforskning. Som kjent er det ganske unge firmaet EMGS, med hovedkvarter i Trondheim, verdensledende på sitt område, som er kartlegging av undersjøiske oljereservoar med elektromagnetiske metoder.

Referanser:

V. Fock: *On the Schrödinger Equation of the Helium Atom*, Del I og II, DKNVS Forhandlinger 1958, bind 31, nr. 22, s. 138-144, og nr. 23, s. 145-152.

V. Fock: *The Principles of Relativity and of Equivalence In the Einsteinian Gravitation Theory*, Del I og II, DKNVS Forhandlinger 1963, bind 36, nr. 4, s. 16-21, og nr. 5, s. 22-27.

Abstract

Vladimir Fock was born 22/12 1898 in St. Petersburg, and died 27/12 1974 in the same city, then called Leningrad. At the age of 34 he became a professor at Leningrad University. His name is associated in particular with the Hartree-Fock method in quantum mechanics and the Fock space of quantum field theory.

His times were dramatic, both politically and scientifically. He was nearly deaf after serving voluntarily in the artillery during the first World War. He participated in the early developments of quantum mechanics started by Heisenberg and Schrödinger in 1925, and earned a reputation as the father of quantum mechanics in his country. Alexander Friedmann, the founder of modern cosmology, introduced him to the general theory of relativity only a few years after this theory was put forward by Einstein in 1916. Fock published a textbook on quantum mechanics in 1931 and a monograph on the general theory of relativity in 1955.

These two theories, quantum mechanics and the general theory of relativity, were his main scientific fields of interest, and are also the subjects of his two articles published in the Transactions of the Royal Norwegian Society. The

first article, from 1958, is his own translation of an article in Russian, presenting a numerical method for computing the ground state of the helium atom. His motivation is the observation that the pioneering work of Hylleraas 30 years earlier was based on a power series expansion which could not in principle be exact. The second article, from 1963, is a talk given in Trondheim in February of that year, on the logical structure of what he calls the Einsteinian Gravitation Theory. He is critical to the status attributed by Einstein himself to the principle of general relativity and the principle of equivalence. Some ten years earlier, Fock defended Einstein strongly against ideologically motivated attacks, but was too honest not to mention his own criticism.