DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS
FORHANDLINGER Bind 31 1958 Nr 8

530.145.63

The Dirac Theory of the Electron in General Relativity Theory

BY

O. KLEIN

(Innsendt til Generalsekretæren den 3dje februar 1958 av herr Wergeland)

The aim of the following considerations is to put the generally-relativistic treatment of the Dirac theory on a form somewhat better suited for its extension so as to include mesonlike charged fields than the usual treatment mainly developed by Fock, Schrödinger and Bargmann [1], from which it differs only slightly. In order to be able to introduce quantum theory from the very start, we base our considerations on the invariant action integral or rather this integral multiplied by $i = \sqrt{-1}$, which, due to its fundamental rôle in the Feynmann approach to quantum theory, we shall call the Feynman exponent. The Feynman functional integration has recently been applied by B. Laurent [2] and C. Misner [3] to the gravitational field. Their work seems to show that in this way the formal difficulties met with in the attempts to formulate covariant quantum conditions for the gravitational field are bypassed.

As our starting point we take the following expression for the covariant expression for the Feynman exponent for a spinor field Ψ of zero rest mass. (The inclusion of a rest mass term, the physical significance of which would be doubtful at this stage where all interactions except those due to gravitation are neglected, would in no essential way alter the following considerations.)

$$(1) \quad \eta = \frac{1}{4}\int d^4x \{\bar{\Psi}\gamma^k \Delta_k \Psi - [\bar{\Psi}\gamma^k \Delta_k \Psi]^* - \Psi(\gamma^k \Delta_k)^T \bar{\Psi} + \\ + [\Psi(\gamma^k \Delta_k)^T \bar{\Psi}]^*\}$$

Here

$$(2) \qquad \bar{\Psi} = -\Psi^* a$$

where a is the quantity introduced by Bargmann in order to give a covariant definition of the current density vector. The γ^k form a set of four-row matrices fulfilling the relations

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 173-181)

Oskar Klein
The Dirac Theory of the Electron in General Relativity Theory
DKNVS Forhandlinger 1958[1]

Finn Ravndal
Universitetet i Oslo

Oskar Klein og den femte dimensjon


Oskar Klein

Etter en kort oppsummering av det vitenskapelige liv til Oskar Klein, blir en mer detaljert utledning av hans kvantemekaniske bølgeligning for relativistiske partikler gitt. Den er en utvidelse av den klassiske mekanikk basert på Einsteins gravitasjonsteori i fem dimensjoner. Samme utgangspunkt hadde tidligere vært undersøkt av Kaluza, men Klein gjorde denne mulighet mer realistisk ved å vise at den ekstra dimensjonen kunne kompaktifiseres og derfor bli umulig eller vanskelig å oppdage hvis den var liten nok. Denne kombinasjon av kvantemekanikk og gravitasjonsteori opptok han resten av livet og ble videre studert i det arbeid han publiserte som medlem av Selskapet.

Sammen med Niels Bohr som grunnla moderne atomfysikk, er Oskar Klein den mest kjente nordiske fysiker ute i verden. Hans viktigste arbeid var

[1] *DKNVS Forhandlinger*, bind 31, 1958, nr. 8, side 47-51.

utforskning av den nye kvantemekanikken. Som en av de aller første prøvde han å inkludere denne i Einsteins relativitetsteori. Denne utfordringen opptok han hele livet og vil derfor i det følgende bli lagt mest vekt på.

Oskar Klein ble født i 1894 i Stockholm hvor han fikk sin første utdannelse. Allerede i videregående skole fikk han kontakt med den anerkjente kjemiker Svante Arrhenius som var en venn av familien. Klein fortsatte å arbeide med han etter at han begynte med sine studier ved universitetet. Hans første publiserte arbeid kom i 1917 og handlet om dielektriske konstanter av forskjellige oppløsninger. Samme år møtte han H. Kramers som kom fra København for å besøke Arrhenius. Han arbeidet der sammen med Bohr på kvanteproblemer i atomfysikken og var den første utenlandske medarbeider til Bohr. Klein ble raskt opptatt av disse nye ideene og takket være et stipendium, kunne han selv begynne å arbeide med Bohr i 1918. To år senere kom S. Rosseland fra Norge som den tredje utlending. Allerede om høsten samme år ble Klein og Rosseland ferdig med et felles arbeid om opasiteter til stellare atmosfærer. Det er fremdeles godt kjent og et av de aller første arbeid hvor kvantefysikk ble benyttet innen astrofysikken.

I tiden 1923 - 1925 oppholdt Klein seg ved University of Michigan i Ann Arbor og gikk dermed glipp av den nye, kvantemekaniske revolusjon som fant sted i Europa. Tilbake i København og etter flere måneder med alvorlig sykdom gikk han i gang med å utforske forskjellige konsekvenser av denne nye fysikken. Spesielt var han opptatt av å forene den med Einsteins relativitetsteori. De fleste av hans viktigste arbeider ble skrevet i perioden 1926 - 1929. Han ble full professor i teoretisk fysikk ved Stockholm Universitet i 1930. I Norge var han en personlig venn med H. Wergeland ved Institutt for Teoretisk Fysikk ved NTH. I 1958 publiserte han et arbeid som medlem av DKNVS [1]. Igjen var det problemet rundt kvantemekanikk og relativitetsteorien som opptok han, denne gangen beskrivelsen av Dirac-partikler i krumme rom. Hans siste besøk til Trondheim fant sted i 1963. Oskar Klein døde i 1977.

Den første relativistiske gravitasjonsteori ble foreslått allerede i 1913 av den finske fysiker Gunnar Nordström [2]. Han erstattet Newtons gravitasjonsfelt med et skalart felt som skulle oppfylle samme bølgeligning som for de elektromagnetiske felt. Et år senere viste han at dette nye gravitasjonsfeltet kunne kombineres med de fire vektorpotensialene til Maxwell i en ny, enhetlig teori [3]. De var alle beskrevet ved et nytt Maxwell-felt som ville eksistere hvis vårt tidrom har fem dimensjoner istedenfor de vanlig fire. Denne teorien til Nordström ble uaktuell etter at Einstein utledet sin generelle relativitetsteori i 1916.

Denne nye gravitasjonsteorien til Einstein ble brukt av den tyske matematiske fysiker Theodor Kaluza i 1919 som igjen tenkte seg et femdimensjonalt tidrom med koordinater $x^A = (x^\mu, y)$. Her er x^μ koordinater i vårt firedimensjonale tidrom, mens $y \equiv x^5$ er koordinaten i den femte dimensjon.

Gravitasjonsfeltet er nå gitt ved den symmetriske tensor g_{AB} som beskriver de geometriske egenskapene til dette tidrommet. Kaluza oppdaget at hvis denne tensor er uavhengig av den nye koordinat y, så vil komponentene $g_{5\mu}$ gi opphav til geometriske krefter som i laveste orden har de samme egenskaper som for et elektromagnetisk potensial A_μ i vårt firedimensjonale tidrom. Matematisk kommer dette frem fra Einsteins teori ved å skrive

$$g_{5\mu} = \kappa A_\mu \tag{1}$$

hvor konstanten $\kappa^2 = 16\pi G / c^2$. Her er G Newtons gravitasjonskonstant og c lyshastigheten. Selv Einstein fant denne oppdagelsen meget interessant og hjalp til at arbeidet til Kaluza ble publisert to år senere [4]. Men som ved den tidligere teorien til Nordström, så var det heller ikke nå noen som visste i hvilken retning man skulle se for å oppdage denne nye dimensjonen.

Man kan introdusere et sett med basisvektorer $\mathbf{e}_A$ i det femdimensjonale tidrommet. De metriske komponentene er da gitt ved de skalare produkt $\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B = g_{AB}$. Vårt firedimensjonale tidrom må være ortogonalt til vektoren $\mathbf{e}_5$ i den femte dimensjon. Det er derfor beskrevet ved de fire basisvektorene

$$\mathbf{e}_{\mu\perp} = \mathbf{e}_\mu - \mathbf{e}_{\mu\parallel} = \mathbf{e}_\mu - \frac{\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_5}{\mathbf{e}_5 \cdot \mathbf{e}_5}\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_\mu - \frac{g_{\mu 5}}{g_{55}}\mathbf{e}_5 \tag{2}$$

Klein antok nå at $g_{55} = 1$ slik Kaluza hadde tidligere gjort [5]. Det tilsvarer å se bort fra et ekstra, skalart felt som ikke er av interesse her [6]. Hvis vårt tidrom nå antas å være flatt med den vanlige Minkowski-metrikken $\eta_{\mu\nu}$, så vil

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu\perp} \cdot \mathbf{e}_{\nu\perp} = g_{\mu\nu} - \frac{g_{5\mu} g_{5\nu}}{g_{55}} = g_{\mu\nu} - \kappa^2 A_\mu A_\nu \tag{3}$$

hvor vi i siste ligning har introdusert det elektromagnetiske felt fra (1).
På denne måten har vi klart å splitte opp den femdimensjonale metrikken slik at komponentene kan samles i matrisen

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} \eta_{\mu\nu} + \kappa^2 A_\mu A_\nu & \kappa A_\mu \\ \kappa A_\nu & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

De kontravariante komponentene inngår da i den inverse matrisen

(5) $$g^{AB} = \begin{bmatrix} \eta^{\mu\nu} & -\kappa A^{\mu} \\ -\kappa A^{\nu} & 1+\kappa^2 A_{\mu} A^{\mu} \end{bmatrix}$$

Ved direkte utregning ser vi at $g_{AB} g^{BC} = \delta_B^C$ som er komponentene til enhetsmatrisen. Både her og i det følgende bruker vi Einsteins summekonvensjon som sier å summere over alle indekser som opptrer to ganger i samme matematiske uttrykk.

Lagrange-funksjonen for en partikkel som beveger seg i det femdimensjonale tidrommet, har den vanlige formen

(6) $$L = \frac{1}{2} g_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B$$

Her betyr den prikk-deriverte en derivasjon med hensyn på en parameter λ som beskriver bevegelsen $x^A = x^A(\lambda)$. Denne kurven som partikkelen følger, vil være en løsning av Euler-Lagrange ligningen

(7) $$\frac{\partial L}{\partial x^A} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A}\right) = 0$$

Det er velkjent i relativistisk mekanikk at løsningen vil være en geodetisk linje i dette tidrommet.

En alternativ beskrivelse av partikkelens bevegelse kan utledes fra Hamiltons funksjon $H = \dot{x}^A p_A - L$ hvor $p_A = \partial L / \partial \dot{x}^A$ er den kanoniske impuls til partikkelen. I vårt tilfelle blir $p_A = g_{AB} \dot{x}^B$. Fra Kaluzas antagelse at metrikken er uavhengig av den femte koordinat y, ser vi nå fra (7) at impulsen p_5 er konstant. For den følgende utledning vil det være hensiktsmessig å skrive denne konstanten som $p_5 = mc$ hvor c igjen er lyshastigheten.

Fra Lagrange-funksjonen (6) kan vi nå finne den tilsvarende funksjonen

(8) $$H = \frac{1}{2} g^{AB} p_A p_B$$

i Hamilton-formalismen. Den har en konstant verdi siden metrikken er uavhengig av parameteren λ. I relativistisk mekanikk er denne konstanten lik det negative kvadrat av partikkelens masse. Klein antar nå at den tilsvarende masse i fem dimensjoner er null, i.e. $H = 0$. Med de kontravariante komponentene til metrikken fra (5), finner vi dermed fra (8) ligningen

(9) $$(p_\mu - mc\kappa A_\mu)^2 + m^2c^2 = 0$$

som partikkelens bevegelse må oppfylle. Den masseløse partikkelen i fem dimensjoner oppfører seg derfor som om den har en endelig masse $m = p_5 / c$ i fire dimensjoner. I tillegg ser den ut til å bevege seg i et elektromagnetisk potensial A_μ som den kobler til med elektrisk ladning $e = mc\kappa$.

Klein var inspirert av Schrödinger som året før hadde foreslått sin kvantemekaniske bølgeligning [7]. Hans utledning var basert på Hamilton-formalismen i klassisk mekanikk. Da kan man skrive partikkelens impuls som gradienten av Hamiltons prinsipale funksjon $S = S(x, y)$ som er lik virkningen til bevegelsen. I uttrykket (8) kan vi derfor innføre $p_A = \partial S / \partial x^A$ som gir ligningen

(10) $$g^{AB} \frac{\partial S}{\partial x^A} \frac{\partial S}{\partial x^B} = 0$$

I tillegg til Hamilton, bærer denne ligningen også navnet til Jacobi. Skriver vi den ut, tar den samme form som (9) når vi der erstatter impulsen med denne deriverte. Den klassiske bevegelsen er ortogonal til flaten $S = const$ og ligner derfor på det bildet vi har av en lysstråle som beveger seg ortogonalt til bølgefronten i geometrisk optikk. Denne analogien ble brukt av Schrödinger til å foreslå at der også innen mekanikken skulle eksistere en lignende og mer nøyaktig bølgebeskrivelse som gir Hamilton-Jacobi ligningen (10) i den klassiske grensen slik som geometrisk opptikk kan utledes fra bølgeopptikk. Denne bølgebeskivelsen av mekaniske system er det vi i dag kaller kvantemekanikk.

For den relativistiske bevegelsen i fem dimensjoner foreslo derfor Klein den invariante bølgeligningen [5]

(11) $$\partial_A (g^{AB} \partial_B) \Psi = 0$$

hvor $\partial_A = \partial / \partial x^A$. Bølgefunksjonen $\Psi = \Psi(x, y)$ kan i alminnelighet være kompleks med en fasevinkel $S(x, y)$ som i den klassiske grensen er direkte relatert til partikkelens virkning. Derfor kan vi skrive $\Psi \propto \exp(iS / \hbar)$ hvor $\hbar$ er Plancks konstant. Setter vi dette utrykket inn i (11) og tar den klassiske grensen

$\hbar \to 0$, finner vi igjen Hamilton-Jacobi ligningen (10) som var utgangspunktet for det hele. Da $p_5 = const$, må vi ha at $S(x,y) = p_5 y + S(x)$ og dermed

(12) $$\Psi(x,y) \propto e^{ip_5 y/\hbar}\Phi(x)$$

Her er nå $\Phi(x)$ Kleins bølgefunksjon i det firedimensjonale tidrom. Fra bølgeligningen (11) med $p_5 = mc$ ser vi at den må oppfylle differensialligningen

(13) $$\left[\left(\partial_\mu - \frac{i}{\hbar}eA_\mu\right)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi(x) = 0$$

Dette er Kleins kvantemekaniske bølgeligning for relativistiske partikler uten indre spinn. Denne brukes på akkurat samme form i dag og blir omtalt som Klein-Gordon ligningen. Dette skyldes at W. Gordon utledet den direkte fra (9) omtrent på samme tid [8].

Det er muligheten for en femte dimensjon som skiller Kleins utledning fra den til Gordon og hva andre gjorde. Det er naturlig å spørre seg hvordan han begynte å tenke i slike nye baner. Han selv har sagt at han var tiltrukket av hvor naturlig elektromagnetisme kunne forklares ved en slik geometrisk betraktning i et rom med en ekstra dimensjon. Han har også uttrykt takknemlighet til N. Bohr for diskusjoner om dette [5]. Det er mulig at de spekulerte omkring muligheten for at den nye og ennå så mysteriøse kvantemekanikk kunne være en refleksjon av enklere og mer forståelig fysikk i et tidrom med ekstra dimensjoner.

Kort tid etter Klein hadde gjort ferdig dette arbeid, foreslo han at den ekstra dimensjonen kunne være kompakt [9]. Mer nøyaktig, han foreslo at den kunne være en sirkel med radius R. Hvis den er mindre enn hva som kan måles, har man ikke lenger det problem at den ikke kan observeres. På en slik sirkel kommer man tilbake til utgangspunktet når koordinaten y i (12) øker med $2\pi R$. Da får bølgefunksjonen samme verdi slik at man må ha $p_5 = n\hbar/R$ hvor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Klein fant dette resultatet svært interessant da det kunne forklare hvorfor alle partikler har elektriske ladninger som er multiplum av elektronets ladning e. Regner man ut finstruktur-konstanten $\alpha = e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ med $e = mc\kappa$, finner man for $n = 1$ at $\alpha = 4\hbar G/c^3R^2$ når vi benytter den klassiske verdien $\kappa^2 = 16\pi G/c^2$. Det gir $\alpha = 4(L_P/R)^2$ hvor $L_p = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.62\times 10^{-33}$ cm kalles Planck-lengden. Dermed blir $R = 23L_P$ og derfor altfor liten til å bli eksperimentelt påvist i dag. Men den tilsvarende massen $m = \hbar/cR$ til elektronet blir samtidig $m = M_P/23$ hvor $M_p = (\hbar c/G)^{1/2} = 1.22\times10^{19}\, GeV/c^2$. Dette er en faktor 10^{22} større enn den virkelige massen! Det er derfor ikke merkelig at et år senere er Klein adskillig mer pessimistisk over muligheten for et slikt verdensbilde [10].

Denne teorien var likevel sentral i Kleins arbeid vel ti år senere da han brukte den som fundament til å utvikle en enhetlig teori for de svake og elektromagnetiske vekselvirkninger basert på Yukawas forklaring av den sterke kjernekraften. Her kommer han for første gang opp med en beskrivelse som ligner mye på dagens ikke-abelske gaugeteorier [11]. Alle disse kraftfeltene kobler til materiepartikler som er protoner, nøytroner og elektroner. Disse er fermioner med spinn 1/2 og beskrives av Dirac-ligningen $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0$. Her γ_μ matriser som må oppfylle betingelsen $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$ hvor $g_{\mu\nu}$ er metrikken til tidrommet [1]. Vanligvis er denne lik Minkowski-metrikken $\eta_{\mu\nu}$ som er konstant. Dermed vil også Dirac-matrisene bli konstante. Men i det mer generelle tilfelle med gravitasjon vil metrikken $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ slik at også $\gamma_\mu = \gamma_\mu(x)$, i.e. matrisene varierer fra punkt til punkt i tidrommet. Da er heller ikke Dirac-ligningen lenger veldefinert fordi $\gamma^\mu \partial_\mu \psi \neq \partial_\mu \gamma^\mu \psi$. Allerede i 1926 hadde Klein møtt dette problemet da han undersøkte noen konsekvenser av Dirac-ligningen i et tidrom med en ekstra dimensjon istedenfor den skalare ligningen (11) som beskriver partikler uten spinn [10].

Etter at Feynmans nye formulering av kvantemekanikken ble kjent etter verdenskrigen, tok Klein igjen opp dette problemet. Nå spiller Lagrange-funksjonen en mye mer sentral rolle enn Hamilton-funksjonen som benyttes i de tidligere formuleringene til Schrödinger og Heisenberg. Relativistisk invarians blir dermed mye enklere å behandle. Dette ville Klein benytte seg av til å kaste nytt lys over det gamle problemet med Dirac-ligningen i et krumt tidrom. Resultatet av denne undersøkelsen publiserte Klein i Selskapets Forhandlinger i 1958 [1]. Arbeidet er meget matematisk og viser en dyp innsikt i alle aspekt av moderne kvanteteori kombinert med Einsteins relativitetsteori. Men det er likevel uklart hvordan hans oppnådde resultat skal benyttes. Da han vel ti år senere sammenfattet mange av sine lærdommer om kvantemekanikk innen Einsteins relativitetsteori, gjorde han ikke bruk av disse resultatene [12]. Men det er likevel hans revolusjonerende idé om ekstra dimensjoner hvor elektromagnetismen kan få en geometrisk forklaring, som sannsynligvis vil bli stående som Kleins viktigste bidrag til vårt verdensbilde. Hans opprinnelige teori er av andre blitt utvidet til å inneholde flere ekstra dimensjoner og kan dermed gi en mye bedre overenstemmelse med virkeligheten enn den Klein fant. Disse teoriene spiller i dag en sentral rolle i moderne elementærpartikkelfysikk. Ved den nye LHC akseleratoren ved CERN søkes det nå aktivt etter å påvise slike ekstra dimensjoner eksperimentelt.

References

[1] O. Klein, *DKNVS Forhandlinger*, **31**, 47 (1958).
[2] G. Nordström, *Ann. Physik*, **40**, 856 (1913).
[3] G. Nordström, *Phys.Zeitschr*. **15**, 504 (1914).
[4] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 966 (1921).
[5] O. Klein, *Zeit. Phys*. **37**, 895 (1926).
[6] I.K. Wehus and F. Ravndal, *Int. J. Mod. Phys*., **A19**, 4671 (2004).
[7] E. Schrödinger *Ann. Physik*, **79**, 361, 489 (1926).
[8] W. Gordon, *Zeit. Phys*. **40**, 117 (1926).
[9] O. Klein, *Nature* **118**, 516 (1926).
[10] O. Klein, *Zeit. Phys*. **46**, 188 (1927).
[11] D. Gross, *Proc. of the Oskar Klein Centenary Symposium*, Stockholm (1994); arXiv: hep-th/9411233.
[12] O. Klein, *Nuclear Physics*, **B21**, 261 (1970).

Abstract

The Swedish physicist Oskar Klein 1894–1977 was an important contributor to the developments of modern quantum physics. The foundations were laid in Copenhagen under the inspired guidance of Niels Bohr. Klein became here a trusted collaborator with the leading physicists in the field and played a central role in combining these new ideas with Einstein's theory of relativity. His most important contribution came from his realization that electromagnetism could be understood as an extension of Einstein's general theory of relativity to a curved spacetime with one extra dimension. The same idea had been suggested by the German mathematician Kaluza a few years earlier. But it was Klein who made it more acceptable by using quantum mechanics and showing that the extra dimension could be made microscopically small and therefore unobservable in present-day experiments. In connection with this work he also obtained the relativistic theory for bosons as described by what today is called the Klein-Gordon wave equation. After a short biographical summary of the scientific life of Oskar Klein, a more pedagogic presentation of these ideas is given with special emphasis on the fivedimensional framework he used. His contribution to DKNVS was an attempt to also describe fermions in such curved spacetimes.