Vereinfachte numerische Integration

VON

WERNER ROMBERG

(Fremlagt i Fellesmøtet 14de februar 1955 av herr S. Selberg)

Zu berechnen sei ein Integral

$$I = \int_a^b F(x)\, dx$$

angenähert aus Funktionswerten an äquidistanten Teilpunkten. Am häufigsten benutzt man die Trapez- und die Simpson-Formel. Gauss hat auch Polynome höheren Grades durch die Punkte F_k gelegt und die zugehörigen Koeffizientenfolgen berechnet. Wir geben hier nur diejenigen für 4 und 8 Intervalle wieder:

Trapez T: 1, 1
Simpsom S: 1, 4, 1
Gauss G^I: 7, 32, 12, 32, 7
Gauss G^{II}: 989, 5888, —929, 10496, —4540, 10496, —929, 5888, 989

Die Gauss'schen Formeln werden, wegen ihrer unbequemeren Gewichte, selten benutzt. Durch eine etwas abgeänderte Berechnungsweise können wir aber ausser S und G^I auch einen noch besseren Näherungswert für I berechnen, ohne die oben genannten verschiedenen Koeffizienten zu benutzen. Dazu teilen wir das Intervall $a \leqq x \leqq b$ in 8N Teile, $b - a = 8\,N\,h$, bezeichnen $F(a + kh)$, für $k = 1, 2, \ldots, 8N - 1$, mit F_k, aber speziell den Mittelwert aus $F(a)$ und $F(b)$ mit F_0 und berechnen zunächst die gröbste Approximation nach der Trapezformel

$$T_1 = 8h \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F_{8n} = (b - a) \cdot \overline{\sum_{n=0}^{N-1} F_{8n}}$$

(Überstreichen bedeute das arithmetische Mittel, Intervall-Länge $8h$).

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 149-155)

Werner Romberg
Vereinfachte numerische Integration
DKNVS Forhandlinger 1955[1]

Brynjulf Owren
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet


Werner Romberg

Romberg ble født i Berlin i 1909 og tok sin lavere grads utdanning i Heidelberg 1928–1930 innen fagene fysikk og matematikk. Han avla hovedfagseksamen i fysikk i München, og tok deretter fatt på doktorgraden samme sted under veiledning av Arnold Sommerfeld. Romberg ble tidlig en aktiv kritiker av Hitler og nazismen og dette var naturligvis ikke uten risiko for ham. Han måtte gjøre seg raskt ferdig med doktorgraden og disputerte i 1933 over avhandlingen *Zur Polarisation des Kanalstrahllichtes*. Straks etter reiste han til Dnepropetrovsk i den ukrainske delen av Sovjetunionen, der han fikk arbeid som forsker ved forskningsinstituttet for fysikk og teknologi. I tredveårene sank tyskernes anseelse i Sovjetunionen raskt, og i 1937 ble Romberg nektet videre opphold og reiste til Praha der han bodde hos slektninger og livnærte seg som privatlærer. Han hadde kontakt med Institutt for astrofysikk ved universitetet. Men trusselen fra Tyskland gjorde situasjonen vanskelig for Romberg også i Praha. Gjennom sitt akademiske nettverk fikk

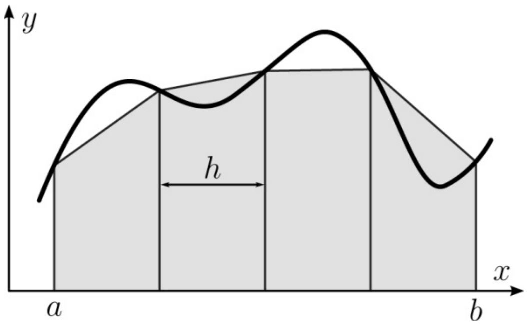
[1] DKNVS Forhandlinger Bd. 28, 1955, nr. 7, s. 30-36.

Romberg kontakt med professor Egil Hylleraas som ordnet med penger og utreise, og 20. november, 1938 ankom han Oslo. Han fikk arbeide som assistent for Hylleraas fram til 1949, avbrutt av en periode i Uppsala dit han flyktet fra tyskerne da han var blitt ettersøkt av Gestapo for å spre nyheter fra BBC. Han ble norsk statsborger i 1947 etter å ha mistet sitt tyske fem år tidligere. I 1949 fikk Romberg ett års stipend av universitetet i Oslo for å jobbe med matematisk fysikk. I hovedstaden ble Romberg kjent med Professor Harald Wergeland som i 1946 tok et professorat i fysikk ved NTH. Wergeland oppfordret Romberg til å søke et dosentur i fysikk ved NTH i 1949, og Romberg ble ansatt og flyttet til Trondheim. Han bygde der opp undervisningen i matematisk fysikk. Men han fortsatte sin egen forskning og publiserte også flere arbeider som omhandlet anvendelser av matematikken i andre fagområder, dog uten å fire på presisjon og rigorøsitet i det han skrev. Dette kan illustreres av følgende utdrag fra et brev der han omtaler en framlagt doktoravhandling som han skal være opponent for.

Ellers er det å si, at arbeidet ikke inneholder et eneste bevis; derved blir den behagelig å lese, men lar mange spørsmål ubesvart. Men dette kan stå hen til disputasen.

Det var i denne perioden han skrev sitt berømte bidrag i *DKNVS Forhandlinger* om numerisk integrasjon. Arbeidet ble framlagt av Sigmund Selberg fordi Romberg enda ikke var blitt medlem av Videnskapsselskabet, han ble valgt inn samme år. Romberg fikk tidlig en interesse for regnemaskiner, og det var under en viss personlig tvil han valgte å akseptere dosenturet i Trondheim framfor en mulig lederstilling i den planlagte Norsk regnesentral. Han var sentral i planleggingen av siffermaskinen "NUSSE", og var matematisk rådgiver for NTHs første programmerbare datamaskin "DIANA". Det var denne erfaringen med regnemaskiner sammen med hans brede forskningsbakgrunn som fikk bedømmelseskomiteen til å mene at han var rett person da et professorat i anvendt matematikk ble opprettet ved NTH. Romberg tiltrådte stillingen i starten av 1961. Wergeland spilte også her en viktig rolle som støttespiller for Romberg, som ble sittende i denne stillingen inntil han i 1968 aksepterte et personlig professorat opprettet for ham i Heidelberg. I sekstiårene bygget Romberg opp et miljø i anvendt matematikk ved NTH, han var aktiv i anskaffelse av regnemaskiner, og ga kurs i kompleks analyse, variasjonsregning og ordinære og partielle differensialligninger. Han bygde også opp et studietilbud i numerisk matematikk, og rekrutterte personer som Tore Håvie og Jan Ole Aasen som arvtagere til numerikkmiljøet ved NTH. Romberg pensjonerte seg i 1978 og forble i Tyskland inntil han døde i 2003.

Rombergs berømte artikkel fra 1955 tok utgangspunkt i problemet: Finn en best mulig tilnærmelse til det bestemte integralet



$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

som også kan tolkes som arealet av området avgrenset av grafen til $f(x)$, x-aksen, og de to vertikale linjene $x=a$ og $x=b$. En nærliggende idé er å dele intervallet fra a til b i n stykker av bredde h der $(b-a)=n\cdot h$ og summere opp arealene av trapesene slik som på figuren. Dette gir størrelsen $T=T(h)$, som kalles sammensatt trapesapproksimasjon. Man forventer at når antall intervaller n økes, slik at h blir mindre, vil $T(h)$ nærme seg I. Rombergs ide er basert på en mer presis versjon av dette utsagnet, nemlig

(1) $$T(h) - I = c_2 h^2 + c_4 h^4 + \cdots$$

der $c_2, c_4, \ldots$ er konstanter som ikke avhenger av h, og rekken inneholder kun like potenser av h. Feilen i sammensatt trapesapproksimasjon er altså i første tilnærmelse proporsjonal med kvadratet av intervallbredden h. Merk at dersom man hadde kjent verdien av c_2 kunne man ha korrigert approksimasjonen slik at feilen istedet ville oppført seg som $c_4 h^4$ for små h, det vil si enda raskere konvergens av $T(h)$ mot I når h avtar. Selv om konstantene c_i i prinsippet kan beregnes, var det ikke denne ruten Romberg valgte å følge. I stedet beregnet han $T(h)$ for to forskjellige verdier av h og eliminerte deretter c_2 fra de to resulterende ligningene. Av grunner vi skal komme tilbake til, valgte Romberg å beregne $T_{2n} = T(h/2)$ i tillegg til $T_n = T(h)$.

(2) $$T_{2n} - I = T(h/2) - I = c_2 \frac{h^2}{2^2} + c_4 \frac{h^4}{2^4} + \cdots$$

Eliminasjon av c_2 mellom (1) og (2) gir nå

$$S_{2n} = T_{2n} + \frac{T_{2n} - T_n}{2^2 - 1} = I + \overline{c}_4 h^4 + \overline{c}_6 h^6 + \cdots$$

Romberg bemerket at S_{2n} er identisk med en kvadraturformel kjent fra 1700-tallet under navnet Simpsons metode. Man kan nå naturligvis beregne S_{4n} på tilsvarende møte ved å benytte T_{2n} og T_{4n}. Deretter anvender man samme prinsipp til å eliminere $\overline{c}_4$ fra S_{2n} og S_{4n}, og resultatet blir en tilnærmelse hvis feil går som h^6. Slik kan man fortsette så lenge man måtte ønske, og Romberg angir også et feilestimat for metoden, dette benyttes i praksis til å bestemme når prosessen skal avbrytes. Dette er Rombergs integrasjonsmetode.

I prinsippet er det ikke nødvendig med suksessiv halvering av intervall-bredden i hvert trinn, andre verdier av h vil også fungere, men Romberg hadde en baktanke med sitt valg. Sammensatt trapesapproksimasjon med n intervaller kan skrives

$$T_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f_k, \quad f_0 = \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad f_k = f(a+kh), k>0.$$

Hvis vi lager en tilsvarende sum der vi summerer verdier av $f(x)$ i midtpunktet i hvert av de n intervallene fås en annen tilnærmelse til integralet, den såkalte midpunktapproksimasjonen,

$$U_n = h\sum_{k=0}^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}, \quad f_{k+\frac{1}{2}} = f(a+(k+\frac{1}{2})h), k>0.$$

Romberg observerer at $T_{2n} = (T_n + U_n)/2$, slik at når T_n er kjent, trengs kun n ytterligere evalueringer av funksjonen f for å finne T_{2n}. Det totale antall evalueringer av integranden f blir dermed det samme som for den mest nøyaktige trapesapproksimasjonen som benyttes.

Rombergintegrasjon er beskrevet i alle lærebøker i numerisk analyse. Det fantes mange andre metoder for å approksimere integralet på Rombergs tid, en av de mest kjente var Gausskvadratur. Romberg konstaterer at denne typen kvadratur er lite brukt på grunn av de ubekvemme vektene som inngår i Gauss-metodene, en bemerkning som vitner om at datamaskinen fremdeles hadde en beskjeden plass i vitenskapen på denne tiden.

Denne typen teknikk er blitt benyttet på flere andre problemer innen matematikk, som for eksempel i numerisk løsning av differensialligninger, og den generelle betegnelse for metoden er Richardson-ekstrapolasjon. I Romberg-integrasjon beregnes størrelsen $T(h)$ for flere små positive verdier av h, og man kan tolke Romberg sin teknikk som at $T(h)$ ekstrapoleres til $T(h^2)$ basert på de beregnede verdier.

Ekstrapolasjon går langt tilbake i historien, se Brezinski [1] for et detaljert innblikk med litteraturhenvisninger. I begynnelsen var det først og fremst en teknikk benyttet for å beregne π. Arkimedes estimerte π med to korrekte desimaler ved å beregne arealet av en regulær 96-kant innskrevet i en sirkel. Denne teknikken ble utviklet videre på 1500-og 1600-tallet, og skjøt virkelig fart da nederlenderen Christian Huygens (1629–1695) involverte seg i problemet gjennom sin avhandling *De Circuli Magnitudine Inventa* som kom ut i 1654. Han fant ulikheten

$$a_c > a_{2n} + \frac{a_{2n} - a_n}{3}$$

der a_c er arealet av enhetssirkelen, og a_n er arealet av den innskrevne regulære n -kanten. Ved bruk av verktøy som ikke var tilgjengelig for Huygens kan man finne at

$$a_n = \pi - \frac{2\pi^3}{3n^2} + \ldots$$

mens

$$a_{2n} + \frac{a_{2n} - a_n}{3} = \pi - \frac{8\pi^5}{240\,n^4} + \cdots$$

så skranken Huygens beregnet nærmer seg det eksakte arealet π mye raskere enn arealet av n -kanten selv når n øker. Huygens laget også øvre skranker for arealet a_c, og han klarte ved å velge $n = 2^{30}$, å fastslå verdien av i med 35 desimaler, men fra korrespondanse han hadde med van Schooten og Lipstorp vet vi at han må ha beregnet π med ca 50 korrekte desimaler. Formelen benyttet ovenfor er faktisk første skritt i Richardson's ekstrapolasjonsteknikk.

Engelskmannen Lewis Fry Richardson (1881–1953) studerte feilen som oppstod når man erstattet et uttrykk av deriverte med sentraldifferanser, for eksempel vil en glatt funksjon $f(x)$ ha en derivert som oppfyller

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + c_2 h^2 + c_4 h^4 + \cdots$$

der $c_2, c_4, \ldots$ avhenger av funksjonen f og dens deriverte i x, men ikke av h. Han foreslo å beregne differensekvotienten for flere ulike verdier av h og eliminere feilleddene, det vil si ekstrapolere, vi siterer fra en artikkel utgitt i 1910:

Consequently, if the equation be integrated for several different values of h*, extrapolation on the supposition that the error is of this form will give numbers very close to the infinitesimal integral.*

Richardson benyttet sin teknikk også for egenverdiproblemer for differensial-ligninger.

Når det gjelder forbedring av sammensatt trapesapproksimasjon til det bestemte integralet, ble dette foreslått allerede i 1742 av skotten Colin Maclaurin (1698–1746). Han presenterte en rekkeutvikling av feilen i sammensatt trapesmetode i like potenser av intervallbredden h, en mer detaljert versjon av (1). Denne oppdagelsen var gjort av selveste Leonhard Euler (1707–1783) allerede seks år tidligere, men det er ingen grunn til å tro at Maclaurin kjente til Eulers arbeid. Maclaurin viste at presisjonen i sammensatt trapesapproksimasjon kunne forbedres ved å lineærkombinere resultater oppnådd med forskjellige verdier av h, dette kan tolkes som en forløper til Rombergs metode. I 1900 foreslo australieren Sheppard (1863–1936) å bruke trapesmetoden med h-verdier av formen $h_n = r_n h$ og $1 = r_0 < r_1 < \cdots$ for å akselerere konvergensen via eliminasjon i Euler–Maclaurin-formelen. Salvadori og Baron presenterte i 1952 en lignende teknikk med referanse til Richardsons arbeid. Men Romberg (1955) var altså den første til å foreslå en systematisk eliminasjonsteknikk for å bedre presisjonen til trapesmetoden med suksessiv halvering av intervallbredden. Romberg refererte til boken av Collatz fra 1951. Algoritmen til Romberg ble viden kjent etter at Jean-Pierre Laurent i 1963 analyserte metoden og fant at den er et spesialtilfelle av Richardson-ekstrapolasjon. Ved å danne et interpolasjons-polynom basert på dataene $(h_j, T(h_j))$, med $h_j = h_0 / 2^j$, $j = 0, \ldots, n$, og evaluere polynomet i verdien h_n^2, kommer Rombergs metode ut.

Referanser

[1] C. Brezinski. Some pioneers of extrapolation methods. I *The birth of numerical analysis*, side 1–22. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.

[2] E. Hairer og G. Wanner. *Analysis by its history.* Undergraduate Texts in Mathematics. Redings in Mathematics. Springer, New York, 2008.

[3] P. C. Hemmer. Werner Romberg. I *NTVA årbok*, side 125–126. Norges tekniske vitenskapsakademi, 2005.

[4] O. Nordal. Verktøy og vitenskap. Datahistorien ved NTNU. Tapir Forlag, 2010.

[5] NTNU. Teknologihistorisk arkiv, relatert til NTNUs historie. http://www.ntnu.no/ub/spessam/tekhist.

[6] Magne Brekke Rabben. Abstraksjon og anvendelser – historien til Institutt for matematiske fag ved NTNU 1910–2010. Tapir Akademisk Forlag, Trondheim, 2011.

Summary

Werner Romberg (1909–2003) was born in Berlin and got his university education at Heidelberg (1928–1930), and Munich (1930-1933). The supervisor of his graduate studies was Arnold Sommerfeld. Being critical to the Nazi regime in Germany he had to leave the country just after his PhD defense in 1933. He spent some years in the Soviet Union and Czechoslovakia before he came to Norway in 1938, much thanks to Professor Hylleraas at the University of Oslo. He worked as an assistant for Hylleraas until 1949, only interrupted by a stay in Uppsala, Sweden during the second world war. In 1949 Romberg got a position as "dosent" in physics at the Norwegian Institute of Technology (NTH) in Trondheim and established an education program in mathematical physics. It was in these years he wrote the famous contribution in *DKNVS Forhandlinger*. In 1960, a chair in applied mathematics was established at NTH, and Romberg's experience with computers toghether with his broad scientific background made him a good candidate for the position, which he was offered and accepted. In his new position, Romberg gave courses in many areas of applied mathematics, and he established the field of numerical analysis at NTH. In 1968 a professorship dedicated to him was established in Heidelberg, and Romberg left Norway for his new post which he held until he retired in 1978.

In his celebrated 1955 paper, Romberg considered numerical approximations of the definite integral. His idea was to accelerate the convergence of the composite trapezoidal rule by means of extrapolation. Although similar methods were already known at the time, going back to Colin Maclaurin, 1742, Romberg developed a more systematic approach. His method consisted in computing composite trapezoidal approximations by successively halving the step size, and he derived a simple formula for eliminating the terms in the error expansion, combining the computed approximations. An added benefit from the halving strategy was that the total cost of the method became essentially the same as in the more accurate trapezoidal calculation. The algorithm of Romberg became widely known after Jean-Pierre Laurent presented a rigorous analysis of the method in 1963, identifying it as a special case of the more general extrapolation technique of Richardson.