DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKAB
FORHANDLINGER BD XV, NR 16

517.566.3

# On the zeros of the Zeta-function of Riemann

By

ATLE SELBERG

(Innlevert til Generalsekretæren 23de mai 1942 av herr Brun)

Let $N_0(T)$ denote the number of zeros of $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$, for which $\sigma = \frac{1}{2}$, $0 < t < T$. HARDY and LITTLEWOOD [1] have then proved that there exist positive constants $A$ and $T_0$, so that

$$N_0(T) > AT \qquad (T > T_0). \tag{1}$$

This result may be improved to the

Theorem 1:

There is an $A > 0$ and a $T_0$, so that

$$N_0(T) > AT \log T \qquad (T > T_0). \tag{2}$$

In the following we shall sketch the main ideas of the proof.

We write when $s = \frac{1}{2} + it$,

$$X(t) = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}\pi t} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

so that $X(t)$ is real for real $t$. Also put when $T$ is positive

$$\eta(t) = \sum_{\nu < T^{\frac{1}{100}}} \frac{\alpha_\nu}{\nu^{\frac{1}{2}+it}} \left(1 - \frac{100 \log \nu}{\log T}\right),$$

where the $\alpha_\nu$ are the coefficients in the expansion

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \sum_1^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu^s}, \quad \alpha_1 = 1,$$

for $\sigma > 1$. Further let

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
*(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr.* 2011 (4), 139-146)

# Atle Selberg
## *On the zeros of the Zeta-function of Riemann*
## DKNVS Forhandlinger 1942[1]

**Nils A. Baas**

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Primtallene har alltid fascinert matematikerne gjennom hele matematikkens historie. Et primtall er et naturlig tall større enn 1 som bare er delelig med 1 og seg selv. Velg et vilkårlig tall $x$, og så spør vi hvor mange primtall finnes der mellom 1 og $x$, og er der noen struktur i deres fordeling? Dette er et av de enkleste vitenskapelige problem å formulere, men kanskje også et av de vanskeligste den menneskelige hjerne noensinne er blitt konfrontert med! Det var dette spørsmålet som vår store matematiker Atle Selberg viet det meste av sitt liv til.

Atle Selberg ble født i Langesund 14. juni 1917 som den yngste av i alt 9 søsken. Familien flyttet like etterpå til Voss, og det var her og på Nesttun ved Bergen at han vokste opp. Han viste meget tidlig et uvanlig talent for matematikk. I 1935 begynte han sine studier ved Universitetet i Oslo, og ble her cand. real. i 1939. Etter å ha vårt med på felttoget i Gudbrandsdalen i 1940, bestemte han seg for å studere Riemanns zeta-funksjon.

Han fikk en ide om hvordan en på en ny måte kunne angripe Riemanns zeta-funksjon og dens nullpunkter. Her oppnådde han meget bedre resultater enn hva datidens store eksperter — G. H. Hardy og J. E. Littlewood — hadde oppnådd [10]. Dette arbeidet ble hans doktorgrad, som han forvarte høsten 1943 — en måned før tyskerne stengte Universitetet i Oslo. Hans senere så berømte

[1] DKNVS Forhandlinger 1942, Bd. XV, nr. 16, s. 59-62.

hovedresultat ble først annonsert i en liten artikkel som han sendte til DKNVS's Skrifter [9].

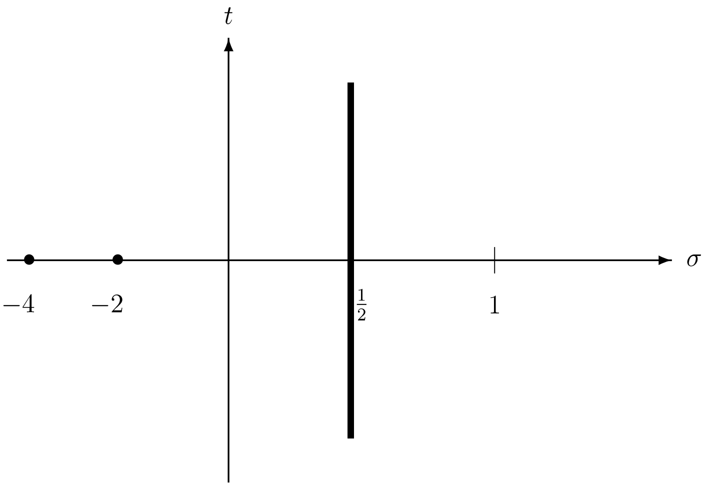
Om dette sier Selberg selv i et intervju som Christian Skau og jeg hadde med han i november 2005 [1–7]:

«Mitt fokus skiftet nå mot Riemanns zeta-funksjon $\zeta(s)$. Dersom $s$ er reell og større enn $1$, så viste Euler produktformelen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1}$$

der $P$ betegner primtallene. Riemann viste at $\zeta(s), s = \sigma + it$, kunne utvides til en meromorf funksjon i det komplekse plan $\mathbf{C}$, med en enkel pol i $s = 1$, og med såkalte trivielle nullpunkter i $-2, -4, -6, \cdots$. De ikke-trivielle nullpunktene ligger i den kritiske stripen $0 < \operatorname{Re} s < 1$, og Riemanns formodning — også kalt for Riemann-hypotesen — sier at alle ikke-trivielle nullpunkter ligger på den kritiske linjen $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.»

Riemanns zeta funksjon: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}}$, $s = \sigma + it$.




Riemannhypotesen: $\zeta(s) = 0$ da er $s = \frac{1}{2} + it$ (vesentlige nullpunkter)

Gir informasjon om primtallenes fordeling.
Vår tids største uløste matematiske problem!

«Jeg begynte da å tenke på en idé jeg hadde om å prøve å vise eksistensen av nullpunkter til Riemanns zetafunksjon på den kritiske linjen ved å betrakte visse momenter; ikke momenter av zetafunksjonen, men ved å betrakte integraler av denne reelle funksjonen som man kan få når man bruker den symmetriske form av funksjonalligningen

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

der $\Gamma$ betegner gammafunksjonen. Da får man en funksjon som er reell på den kritiske linjen. Ved å ha en viss funksjon og potenser av den ved siden av, og så se på tegnvekslingen av disse momentene, kan man si noe om nullpunktene på linjen. Jeg kunne gjøre en del der, men det ga ikke så skarpe resultater som de som var kjent av Hardy og Littlewood. Jeg så litt på deres arbeide, og så hva som var grunnen til at de ikke kunne få bedre resultater enn de hadde. Jeg oppdaget, får jeg si, det som var grunnfeilen i deres arbeide, og hva de hadde misforstått. De hadde noen betraktninger på slutten av sin avhandling hvor de viser at

$$N_0(T)>\text{konstant}\cdot T$$

der $N_0(T)$ er antall nullpunkter på den kritiske linjen mellom $0$ og $T$. Det hadde å gjøre med variasjonen av argumentet, men det syntes klart for meg at det kunne ikke være rett. Jeg så på det, og det man skulle gjøre var heller at man skulle prøve å avdempe svingningen fordi den var en sterkt oscillerende funksjon, denne reelle funksjonen som man får på linjen. Den har svært varierende amplituder, noen steder er svingningene svært små og andre steder er de svært store. Når de siden betrakter disse integraler av kvadrater, som de tar over korte intervaller og så tar gjennomsnittet over et langt intervall, så er det disse områdene, når intervallet blir for kort og hvor amplitudene blir veldig store, som dominerer og gjør at man ikke får vite noe om gjennomsnitts-oppførselen av funksjonen, men rett og slett noe om hva som hender når amplituden er veldig stor. Så fant jeg på å prøve å dempe og normalisere slik at de skulle bli noe større der de var små og noe mindre der de var store. Det første jeg prøvde var å ta en seksjon av Eulerproduktet og så ta kvadratroten av absoluttverdien. Så begynte jeg å eksperimentere ved å ta istedet approksimasjonen av rekken som man får ved å se

Atle Selberg

på en seksjon av Dirichlet-rekken for $(\zeta(s))^{-1/2}$ og dempe koeffisientene ned så de blir null for $n \geq z$, og så bruke kvadratet av absoluttverdien av dette som vår dempningsfaktor på linjen $s = \frac{1}{2} + it$. Det viste seg at jeg fikk bedre og bedre resultater inntil jeg fant at den beste måte å trappe ned koeffisientene var å multiplisere de med faktoren $(1 - \frac{\log n}{\log z})$ for $n < z$, altså

$$\sum_{n \leq z} \frac{\mu(n)}{n^s} \cdot \frac{\log z / n}{\log z}$$

Da fikk jeg den korrekte størrelsesorden for $N_0(T)$ forholdsvis fort.»

«Det tok en del arbeide å oppskatte disse summene som opptrådte i integralene, men det gikk jo med litt tålmodighet, så da fikk jeg det resultatet at det var større enn konstant ganger $T \log T$, som var riktig størrelsesorden. Jeg prøvde ikke å regne ut noen konstant, og hvis jeg ville ha regnet ut en konstant så ville jeg ha modifisert bevisene for å få en bedre konstant. Jeg tror man kan, hvis man modifiserer det på den riktige måten, oppnå noe som ligger nærmere en tiendedel og en tyvendedel av nullpunktene. Jeg har aldri gått igjennom beregningene.»

$N_0(T)$ = antall nullpunkter til $\zeta(s)$ hvor $s = \frac{1}{2} + it$, $0 < t < T$.

Der fins positive konstanter $A$, $T_0$, henholdsvis $\overline{A}$, $\overline{T_0}$, slik at

Hardy og Littlewood: $N_0(T) > A \cdot T \qquad (T > T_0)$

Selberg: $N_0(T) > \overline{A} \cdot T \cdot \log T \qquad (T > \overline{T}_0)$

PNT: $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\log x}$, $x \to \infty$ det vil si $\dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \to 1$ når $x \to \infty$

$$\frac{x}{\log x} \approx \int_2^\infty \frac{dt}{\log t} = li(x)$$
$$\pi(x) \approx li(x)$$

RH, sier noe om størrelsen på feilen i PNT, nemlig

$$\pi(x) = li(x) + O(x^{1/2+\varepsilon})$$

for alle $\varepsilon > 0$.

PNT = Prime Number Theorem

RH = Riemann-hypotesen

«Men jeg må si at hvis man tror at det er noen ting i denne verden som er som det skal være, så synes jeg det er riktigheten av Riemanns hypotese. Den gir den beste fordeling av primtallene, og også den man i grunnen skulle vente statistisk sett, nemlig at avvikelsene fra

$$li(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

ikke er stort større enn kvadratroten av $x$. Det vil medføre en eleganse som er slående. Dessuten vil jeg si at jeg hadde en sterk tro på Riemanns intuisjon.»

*Men forventer du at det er en slags regularitetsstruktur av nullpunktene på linjen?*

«Det er utvilsomt en viss lovmessighet, men hvor langt det går er det vanskelig å gjette på. For eksempel, man kan reise spørsmål om imaginærdelene av nullpunktene er på noen måte forbundet med andre matematiske konstanter som vi har allerede. Det er det ingen som vet noe om selvfølgelig, men det er ikke umulig må jeg si. Jeg anser det ikke som helt umulig at det kunne være en hel del lovmessighet som ville være helt uventet, og som det gjenstår å oppdage. Det kan godt være. Jeg mener, det er ingen grunn til å tro at vi er så veldig langt henimot hva som kan gjøres i fremtiden engang. Det er nok alltid mulig at det kan finnes nye måter å se det på og som leder til helt uventede sammenhenger.»

*Hva er det Riemann-hypotesen forteller oss om primtallene?*

«Den forteller oss at de er veldig pent distribuert, omtrent så jevnt og så bra som man overhodet kunne vente. Man kan ikke vente en fullstendig jevn fordeling, selvfølgelig. Men det forteller oss at ihvertfall når det gjelder matematikken — og ihvertfall tallteorien — så lever vi i Leibniz' best mulige verden, slik som den gode Candide i Voltaires «Candide» blir fortalt av sin lårer Pangloss, at han lever i den best mulige av alle mulige verdener. Vel, i alle fall i tallteorien så har man den best mulige sammenheng av tingene, selv om man ikke kan bevise det enda. Det ville gi meg stor tilfredsstillelse å se et bevis, av den grunn at det vil vise at det er noen ting som er riktig i denne verden. Det er så mye annet som ikke går som det skulle, men i alle fall primtallene, og selvfølgelig også zeta-funksjonens nullpunkter, er distribuert så vel som de kunne være.»

I løpet av sommeren 1946 oppdaget Selberg at hans arbeide med Riemanns zeta-funksjon kunne brukes til å estimere antall primtall i et intervall. Dette var begynnelsen til den senere så berømte Selbergs såld-metode. Etter at han i 1947 kom til The Institute for Advanced Study i Princeton i USA fortsatte han dette arbeidet, og våren 1948 viste han det som idag kalles Selbergs Fundamental Formel som var nøkkelen til det elementære beviset for Primtallsatsen. Dette var en matematisk sensasjon på denne tiden, da ledende matematikere hadde antydet at et slikt bevis kanskje ikke fantes. Det oppstod en prioritetsstrid med ungareren Paul Erdős, som også publiserte et bevis. Hovedideen er Selbergs, og i hans publiserte versjon unngår han helt Erdős' delresultat. Selberg foretrakk alltid å arbeide alene i sitt eget tempo, men ved denne anledning ble hans arbeide avbrutt av andre. Han likte ikke å snakke om denne kontroversen, og foreleste aldri senere om sitt berømte bevis. Men i intervjuet vi hadde med han i 2005 gir han for aller første gang sin komplette versjon av begivenhetene rundt beviset av Primtall-setningen i 1948 [2–7].

Et primtall er et naturlig tall større enn 1 som kun er delelig med 1 og seg selv.
Eksempler: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53.


f.eks. $10^9$

$\pi(x)$ = antall primtall $\leq x$

Primtallsetningen: $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\log x}$, $x \to \infty$

Selbergs Fundamental Formel: $\sum_{p<x} \log^2 p + \sum_{pq<x} \log p \cdot \log q = 2x \log x + O(x)$

I 1950 mottok han Fields-medaljen i matematikk, og i 1951 ble han professor ved Institute for Advanced Study, en stilling han hadde frem til 1987, da han ble professor emeritus. Like etter 1950 kom han over en avhandling av tyskeren Hans Maass om differensialoperatorer, og han innså at resultatene der kunne relateres til hans hovedoppgave. Han sier selv på sin typiske måte: «Jeg ble mer inspirert av hva Maass ikke gjorde, enn hva han hadde gjort». Dette var begynnelsen til den berømte Selbergs Sporformel — et av matematikkens dypeste resultater! Her kombinerer han begreper fra mange matematiske områder på en intrikat måte. Han selv betraktet dette som sitt beste matematiske resultat. Det ble hovedsakelig oppnådd i 1953 og publisert i et relativt ukjent indisk tidsskrift i 1956.

Resten av sitt liv arbeidet Selberg aktivt med sine favorittområder: såldmetoder, zeta-funksjoner og sporformelen. Periodevis arbeidet han seriøst med Riemann-hypotesen hvis korrekthet han aldri betvilte.

Hva er det egentlig Atle Selberg har gjort som er så viktig? Der går en rød tråd gjennom hele Atle Selbergs produksjon, nemlig primtallenes fordeling og struktur. Mange vil kanskje da spørre: kan disse primtallene våre så viktige? Til det vil jeg svare at betydningen ligger i hva disse problemer genererer av tankevirksomhet med ringvirkninger til andre deler av matematikken, til anvendt matematikk og andre vitenskaper. Atle Selberg arbeidet med et av vitenskapens store lokomotiver!

Atle Selberg ble tildelt en rekke utmerkelser i tillegg til Fields-medaljen, bl. a. Wolf-prisen og en Abels Ærespris samt Gunnerus-medaljen. Han var medlem av DKNVS siden 1977. Atle Selberg døde i Princeton kort tid etter sin 90 års dag i 2007 (se [8] for en mer utførlig biografi).

## Referanser


[1] N.A. Baas og C.F. Skau, *Tallenes Herre. Et intervju med Atle Selberg.* Kompendium, NTNU. Trondheim 2008.

[2] N.A. Baas og C.F. Skau, *Tallenes Herre — Atle Selberg om sitt liv og matematikk*, Normat **56**:1, 3–4 (2008).

[3] N.A. Baas og C.F. Skau, *Selbergintervjuet del 1* — Matematisk oppvekst, Normat **56**:1, 5–23 (2008).

[4] N.A. Baas og C.F. Skau, *Selbergintervjuet del 2* — Såldmetoden, Primtallsatsen og Erdös, Normat **56**:2, 49–67 (2008).

[5] N.A. Baas og C.F. Skau, *Selbergintervjuet del 3* — Riemann hypotesen og Sporformelen, Normat **56**:3, 97–110 (2008). (Utgitt i 2009).

[6] N.A. Baas og C.F. Skau, *Selbergintervjuet del 4* — IAS og Obiter Dicta, Normat **56**:4, 145–165 (2008). (Utgitt i 2009).

[7] N.A. Baas and C.F. Skau, *The Lord of the Numbers, Atle Selberg. On his Life and Mathematics*, Bulletin of American Mathematical Society, Volume 45, Number 4, October 2008, 617–649.

[8] N.A. Baas, *Minnetale over Professor Atle Selberg*, DNVAs årbok 2008, s. 62–69. (Utgitt i 2009).

[9] A. Selberg, *On the zeros of the Zeta-function of Riemann*, DKNVS Forhandlinger (1942).

[10] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, *The zeros of Riemann's Zeta-function on the critical line*, Math. Zeitschr., vol. 10 (1922), pp. 281–317.

## Abstract

In 1942 Atle Selberg announced his basic estimate of the zeros of Riemann's zeta function in the Proceedings of The Royal Norwegian Academy of Sciences and Letters (DKNVS). We discuss the circumstances around this result, and give Selberg's own account quoting from an interview with him.