DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKAB
FORHANDLINGER BD XIII, NR 1

511.3

Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahrens für arithmetische Probleme.

Von

TH. SKOLEM

(Innsendt til Generalsekretæren 13de januar 1940 av herr Brun)

Es ist bekanntlich möglich zu erklären, was unter einer rekursiven oder berechenbaren Funktion im allgemeinen Sinne zu verstehen ist. Eine berechenbare oder allgemein rekursive Funktion — wir betrachten hier nur Funktionen natürlicher Zahlen mit natürlichen Zahlen als Funktionswerte — ist durch ein System von Funktionalgleichungen definiert; dabei ist dies System so beschaffen, dass mit dessen Hilfe der Wert der Funktion für beliebige Argumentwerte stets und in eindeutiger Weise berechenbar ist. Genauer heisst dies: Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ die zu definierende Funktion, so ist für beliebige $x_1, \ldots, x_n$ eine Zahl y angebbar derart, dass die Gleichung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y$$

ableitbar ist, dagegen keine Gleichung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = y',$$

wo $y' \neq y$ ist. Die Ableitungsregeln sind dabei die folgenden [1]: Statt einer Variablen kann ein «Term» eingesetzt werden, d.h. ein Ausdruck, der aus konstanten Zahlen, den Funktionszeichen in den gegebenen Funktionalgleichungen und Zeichen für Variablen aufgebaut ist. Ausserdem kann gleiches für gleiches gesetzt und beide Seiten einer Gleichung vertauscht werden.

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 131-137)

Thoralf Skolem
Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahren für aritmetische Probleme
DKNVS Forhandlinger 1940[1]

Jens Erik Fenstad
Universitetet i Oslo


Thoralf Skolem

Thoralf Skolem var en av de største norske matematikere i det forrige århundre. Han er særlig kjent for sine mange og grunnleggende bidrag til den matematiske logikk, men han oppnådde også en rekke betydningsfulle resultater innen algebra, kombinatorikk og tallteori.

Hans hovedfagsoppgave fra 1913 var en dyptgående undersøkelse av logikkens algebraiske struktur, en teori som hadde sitt utgangspunkt i G. Booles «Laws of Thought» og som ble videreført av C. S. Peirce og E. Schröder. Samtidig arbeidet han også med kombinatoriske problemer og publiserte i 1917 et større arbeid om dette. Og i tillegg til denne «ren-matematiske» aktivitet, var han i årene 1909 til 1914 assistent for K. Birkeland med særlig oppgave å bidra til den matematiske analyse av flere geofysiske fenomener.

Ut fra denne bakgrunn fremstår Skolem som en solid og særdeles begavet matematiker med et godt grep på både den «rene» og «anvendte» matematikk. Og

[1] DKNVS Forhandlinger 1949, bd. XII, nr. 1, s. 1-4.

det fremgår klart fra en rekke bemerkninger spredt rundt i hans mange arbeider, at det var de matematiske strukturer, ikke den logisk-algebraiske formalisme som for ham var det vesentlige. Vi ser det tydelig i den berømte avhandlingen fra 1920 med den formidable tittel «Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematische Sätze…». Hovedresultatet her er det kjente Löwenheim-Skolems teorem om eksistensen av tellbare modeller for konsistente utsagnsmengder. Vi betrakter i dag dette resultatet som startpunktet for den generelle modellteorien, med mange anvendelser innen algebra, tallteori og mengdelæren.

Fra det siste området kjenner vi det såkalte Skolems paradoks, at mengdelæren med sine transfinite størrelser, har – om den er konsistent – alltid en tellbar modell. Dette er ikke et ekte paradoks, men viser at ikke-tellbarhet eller kardinalitet må forståes relativt til en bestemt aksiomatikk og dens mulige modeller. Og slik forstått var Skolems paradoks utgangspunktet for P. J. Cohens berømte bevis for uavhengigheten av kontinuums hypotesen, som ganske enkelt spør om hvor mange punkter er det plass til i intervallet mellom 0 og 1 på den geometriske tallinjen. Cohens svar var at du har fritt valg ut fra de alment aksepterte aksiomer for mengdelæren.

Dette er et svar som Skolem ville ha likt. For ham var tall og geometriske objekter noe som var intuitivt gitt. Vi finner et klart uttrykk for dette syn i en populærforelesning ved Chr. Michelsen instituttet i 1932: «Hvis vi arbeider innenfor en fullstendig formalisert matematikk, basert på et endelig antall av presist formulerte aksiomer, så er det intet annet å diskutere enn spørsmål om konsistens og effektiv manipulasjon. Men i ordinær matematisk praksis, f. eks. i de vanlige studier av kontinua, som aldri er gitt ved et spesifisert system av formelle regler, så er utvalgsaksiomet, etter min mening, ikke lovlig – det er en slags vitenskapelig svindel.» La spørsmålet om vitenskapelig svindel ligge, det som interesserer oss her er hva Skolem kan ha ment om tall og geometriske objekters «virkelige» eksistens. Men til tross for at ord som «Begründung» og «Grundlagenfragen» hyppig forkommer i hans arbeider, finner vi ikke hos Skolem en fullt utarbeidet lære om hva som fins og om hvordan vi vet.

Men om Skolem var en smule utydelig om den rette lære, så var han desto mer tydelig på hva han ikke likte. Vinteren 1915 – 1916 oppholdt han seg hos Hilbert i Göttingen. Der ble han kjent med den måte Russell og Whitehead utviklet den elementære aritmetikk i sitt store verk «Principia Mathematica», og han ble slett ikke overbevist. Læren om de naturlige tall og deres fundamentale egenskaper skal ikke fremstå som et resultat av en lang og heller tvilsom ferd gjennom abstrakt logikk og mengdelære. Ut fra sin utdannelse og gjennom sin erfaring med både ren og anvendt matematikk er det tydelig at Skolem «visste» hva tall var, og han lot seg provosere av Russell og Whitehead til å skrive sitt store og viktige arbeid «Begründung der elementären Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehningsbereich». Denne avhandlingen ble skrevet i 1919 men først publisert i 1923. Datidens skandinaviske matematikere forsto ikke hva Skolem ville og nektet publikasjon bl.a. i Acta Mathematica. Men i 1923 var Skolem blitt medlem av Videnskaps-Akademiet i Oslo, og kunne publisere det han ville, slik han ville. Og Skolem fikk rett, avhandlingen fra 1923 har fått en stor betydning for den teoretiske databehandling gjennom sin analyse av den «rekurrierende Denkweise».

For Skolem var struktur og algoritme de viktigste begreper, syntaks og logisk formalisme var sekundært og mest å anse som hjelpemidler til den strukturelle forståelse. Det var denne holdning som gjorde at Skolem ikke står som opphavsmannen til Gödels kompletthetsteorem for første ordens logikk. Hadde han blitt utfordret, kunne han umiddelbart ha produsert et bevis, for det fantes allerede i hans avhandlinger fra 1920 årene. Men Skolem var ikke interessert i den eventuelle kompletthet av bevisformalismen. Selv i sine forelesninger over logikk i Oslo i 1936 ble ikke Gödels kompletthetsbevis nevnt. Vi kan forundres over dette i dag, men selv de store innen faget kan ha sine blinde øyeblikk.

Gödels kompletthetsteorem er i en viss forstand en top-down fremgangsmåte. Skolem representerte en botttom-up holdning. Han ville skrittvis utvikle algoritmer for å kunne avgjøre gyldighet og bevisbarhet innen logikken. Han skrev en rekke avhandlinger og utviste en betydelig kombinatorisk oppfinnsomhet i dette. Kjent er en avhandling fra 1928 i Norsk Matematisk Tidsskrift med en for Skolem usedvanlig kort tittel «Über die mathematische Logik».

Skolems algoritmiske angrepsmåte representerte en rimelig strategi i 1920 årene. Men i 1931 kom et veritabelt bombenedslag, som med ett nullstilte Skolems strategi, Gödels berømte avhandling «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme». Og som A. Church og A. M. Turing senere tydeliggjorde, betydde dette at bevisbarhet i første ordens logikk ikke er algoritmisk. Det var for dette formål at Turing i 1936 utviklet sin teori om de såkalte «Turingmaskiner».

Men noe kunne fremdeles avgjøres. Norske matematikere, og Skolem spesielt, hadde en stor forkjærlighet for diofantiske ligninger, mest kjent for den almene leser er vel Fermats ligning $x^n + y^n = z^n$, der både x, y, z og n skal være naturlige tall. Fermats «store sats» påstår at for $n > 2$, så fins det ingen hele tall x, y, z som oppfyller ligningen. I dag kjenner vi svaret, A. Wiles kunne, etter at problemet hadde stått åpent i 300 år, gi et bekreftende svar, Fermat hadde rett.

Men Fermats ligning er bare én av en mangfoldighet av diofantiske ligninger. Kan vi fra Wiles og andre positive resultater om løsbarhet gå videre til en generell algoritme? Det ville besvare Hilberts 10. problem, som nettopp spør om en almen algoritme for klassen av diofantiske ligninger.

Her kan vi knytte en forbindelse tilbake til Skolem og hans korte fire siders meddelelse i K.N.V.Forh. XIII fra 1940. Etter Turing og Church har det vært alment akseptert at en funksjon, med naturlige tall både som argumenter og som verdi, er algoritmisk hvis og bare hvis den er beregnbar på en Turingmaskin. Og vi vet noe mer, allerede i 1936 viste S. C. Kleene at en funksjon $f(x_1, \ldots, x_n)$ er algoritmisk, eller rekursiv i dagens terminologi, hvis og bare hvis den kan skrives på formen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = p(\ \min_y (q_f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\ )),$$

der $\min_y R(y)$ er det minste naturlige tall y slik at R(y) er gyldig, om et slikt finnes, og hvor p og q_f er primitivt rekursive funksjoner i Skolems betydning fra 1923. Hvis du vil forstå ligningen, så er q_f en kodning av Turingmaskinen som skal brukes til å beregne funksjonen f, y er et kodetall for en beregning på maskinen (kodet av) q_f ut fra argumentene $x_1, \ldots, x_n$, og p en funksjon, uavhengig av f, som henter ut funksjonsverdien fra beregningen (kodet av) y.

La nå de naturlige tall 0, 1, 2, … være vår struktur, la addisjon og multiplikasjon være de to gitte aritmetiske operasjoner og la likhet være den eneste relasjon. Et aritmetisk utsagn er et utsagn bygget opp fra addisjon, multiplikasjon, likhet og tallkonstanter med bruk av vanlig første ordens logikk, dvs. med kvantorer bare for tall og ikke for mengder. Det var viktig for Gödels bevis fra 1931 å kunne kode bevisstrukturen inn i aritmetikken. Dermed kunne en aritmetisk formel si noe om sin egen bevisbarhet, noe som var kjernen i uavgjørbarhets-beviset. Vi skal se en lignende strategi i Skolems bevis for uløsbarheten av aritmetiske problemer.

Det første Skolem viser er at enhver ligning mellom rekursive funksjoner er ekvivalent til et aritmetisk utsagn. Gödel kunne nøye seg med å vise dette for primitivt rekursive funksjoner, men utvidelsen til hele klassen av rekursive funksjoner følger umiddelbart av Kleenes normalform. Resten av Skolems bevis er nå et klassisk Cantor diagonalargument.

Først noterer vi at de aritmetiske utsagn med en fri variabel lar seg effektivt nummerere, la $A_x(y)$ være det x-te aritmetiske utsagn med en fri variabel y. Anta nå at vi hadde en algoritme til å avgjøre $A_x(y)$ for vilkårlige tall x og y. Det betyr at vi hadde en rekursiv funksjon f(x, y) slik at f(x, y) = 1 om $A_x(y)$ er gyldig, og f(x, y) = 0 om $A_x(y)$ ikke er gyldig. Men etter det Skolem først viste, så er f(x, y) = 0 og dermed substitusjonen f(x, x) = 0 aritmetiske utsagn, dvs. den siste av formen $A_k(x)$ for et passende tall k. Vi har gjennom substitusjonen diagonalisert og får

$$f(k, k) = 1 \quad \text{hvis og bare hvis} \quad A_k(k) \quad \text{hvis og bare hvis} \quad f(k, k) = 0.$$

Dette er selvsagt umulig, det er derfor ingen «allgemeinen Lösungsverfahren für Arithmetische Probleme».

Hva så med Hilberts 10. problem? Selv om aritmetiske problemer ikke lar seg algoritmisk løse, kunne spesielle delklasser, f.eks. de diofantiske ligninger være løsbare. Hva er så resultatet: Litt grovt sagt består et aritmetisk utsagn av en kvantorfri kjerne og et blandet prefiks av all- og eksistenskvantorer. Et diofantisk utsagn har bare eksistenskvantorer i sitt prefiks, typisk i så måte er Fermats ligning. Den er egentlig et aritmetisk utsagn $A_m(n)$, definert ved betingelsen «det fins tall x, y, z slik at $x^n + y^n = z^n$». Skolem nevner uløsbarheten av aritmetiske problemer i forordet til sin bok «Diophantische Gleichungen» allerede i 1938, mens detaljene ble først publisert i 1940 avhandlingen. Det burde da ha vært en umiddelbar utfordring for Skolem å videreføre disse undersøkelser. Et første skritt ville være å vise at enhver ligning mellom rekursive funksjoner ikke bare er ekvivalent til et aritmetisk utsagn, men også til et diofantisk utsagn. For å vise dette, ville det være naturlig å prøve å redusere et blandet prefiks til et rent eksistensprefiks. Lykkes man med dette, ville det, i dagens terminologi, bety at enhver rekursivt nummererbar mengde kunne gis en diofantisk definisjon, noe som umiddelbart ville gi et negativt svar på Hilberts 10. problem. Skolem, med sin store erfaring fra tallteori, logikk og kombinatorikk, skulle ha hatt alle muligheter til å lykkes med denne reduksjonsprosessen, men vi ser ingen spor etter et slikt forsøk i hans senere arbeider. Derimot kan vi, litt overraskende, lese i et arbeid fra 1962: «It has been asked whether the recursively enumerable sets are all of them Diophantine sets? I regret not having had the opportunity to study this question seriously». Men andre tok utfordringen og svaret ble gitt i 1970 av den unge russiske matematiker Y. Matiyasevich. Han gjennomførte den nødvendige reduksjon av prefikset til et rent eksistensprefiks og kunne dermed gi en negativ løsning av Hilberts 10. problem, det fins ingen almen algoritme for klassen av diofantiske ligninger.

La oss til slutt spekulere litt over hvorfor Skolem var en så hyppig bidragsyter til de forhandlinger, skrifter og avhandlinger som ble utgitt av akademiene i Trondheim og Oslo. Nesten to tredjedeler av hans nær 200 arbeider ble publisert på denne måte. En forklaring er at han var medlem begge steder og kunne uten innblanding fra andre publisere akkurat på den måten som passet ham best. Men også andre forhold kan ha spilt inn. Han hadde, som vi bemerket ovenfor, hatt negative erfaringer med sin 1923 avhandling, som ikke ble godtatt av Acta Mathematica, og i tillegg lignende negative erfaringer med Fundamenta Math. i Warszawa, der redaktøren hadde føyd til en fotnote med resultater av Tarski til hans berømte avhandling om ikke-standard modeller for aritmetikken. Skolem mislikte dette, han ville selv ha full kontroll. Noen av hans største arbeider ble publisert i de hjemlige akademier, men vi kan ikke nekte for at han også publiserte ganske mange ubetydelige arbeider i de hjemlige annaler. Men Skolems lille avhandling fra 1940, som nok ikke tilhører rekken av hans store arbeider, var ingen ubetydelighet. Selv om den er enkel i form, griper den rett inn i et sentralt område i forholdet mellom logikk, tallteori og beregnbarhet.

Referanser

Den interesserte leser vises til følgende tre kilder. Den første er en utgave av omtrent alle Skolems bidrag til den matematiske logikk. Den andre er en omfattende biografisk og kritisk artikkel om Skolems liv og arbeider. Den tredje er et forsøk på å formulere en «Skolem filosofi», som ikke nødvendigvis er Skolems egen skrevne filosofi, men et forsøk på å skape en koherent forståelsesramme omkring de mange bemerkninger om «Begründung» og «Grundlagenfragen», som vi finner spredt over Skolems samlede arbeider.

Th. Skolem, Selected Works in Logic (utgitt av Jens Erik Fenstad), Oslo: Universitetsforlaget, 1970.

Jens Erik Fenstad og Hao Wang, Thoralf Albert Skolem, i Handbook of the History of logic, vol. 5, Amsterdam: North-Holland, 2009, s. 127-194.

Jens Erik Fenstad, «Es kommt doch auf die Sache an» – remarks on Skolem and the nature of mathematics, Matematisk institutt, Universitetet i Oslo, 2011.

Summary

Thoralf Skolem was a leading Norwegian mathematician of the last century. He is particularly known for his work in mathematical logic and set theory, but he also contributed a number of important results to algebra, number theory and combinatorics. From his early education and first work experience as an assistant in geophysics he had a broad knowledge of both pure and applied mathematics. We learn from his early work that he was above all interested in structures and algorithms and that axioms and proofs were at most necessary tools and did not in themselves represent the real «substance» of mathematics. It is therefore not surprising that he was not at all convinced when he first learned of the Russell and Whitehead's approach to elementary arithmetic through abstract logic and set

theory. We get the impression that Skolem «knew» what numbers are and that he wrote his fundamental paper on primirive recursive arithmetic in 1923 as an protest against the logicism of Principia Mathematica.

We see a similar attitude in his work on proof structures. His approach was bottom-up, and he wanted step-by-step to develop algorithms to decide questions of validity and proof in first order logic and arithmetic; see his paper of 1928 in Norsk Matematisk Tidsskrift. This was not in any way an unreasonable strategy in the 1920s. But this approach came to an abrupt stop with the publication of Gödel's incompleteness theorem in 1931 and the later work by Church and Turing in 1936. The interest now turned to explore the unknown territory between the decidable and the undecidable. One main challenge was Hilbert's 10^{th} problem asking for a general algorithm for solving Diophantine equations. A Diophantine equation is a special kind of arithmetical statement. A general arithmetical statement is a first order statement with numbers constants, with addition and multiplication as the only operatins, and equality as the only relation, and where «first order» means that we only have number and not set quantifiers. A Diophantine equation is an arithmetical statement consisting of a string of existential quantifiers prefixed to an equation of fixed degree, thus the validity of the statement is the same as asking for a solution to the equation.

The mathematical substance of Skolem's note of 1940 is a proof of the impossibility of an algorithm for the the class of arithmetical problems. His proof proceeds by first establishing that any equation between recursive functions is equivalent to an arithmetical statement. The proof is a simple extention of a key technical lemma from Gödel's 1931 paper, which proves this result for primitive recursive functions (Skolem 1923). A standard diagonal argument then completes the proof. Hilbert's 10^{th} problem would follow if we in an arithmetical statement could reduce a mixed prefix of existential and universal quantifiers to a pure existential form. We would have expected that Skolem with his formidable skills in logic, number theory and combinatorics had immediately turned to this challenge, but there is no trace of any such attempt in his later works. The reduction, by a clever and head-on use of standard methods that in principle was well known to Skolem, was obtained in 1970 by the young Russian mathematician Y. Matiyasevich.