$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x < 1 \\ 1 \text{ pour } x \geqq 1. \end{cases}$$

Si l'on remplace $J_1(x)$ par $\{x\}$ = nombre de nombres entiers non inférieurs à 2 et non supérieurs à x, on obtient une autre forme de la formule (1) (voir Brun, les travaux cités).

Je donnerai ici une formule semblable à (1), pour déterminer la différence $\triangle(x)$ entre le nombre $\pi_{4h+3}(x)$ de nombres premiers de la forme $4h+3$ et le nombre $\pi_{4h+1}(x)$ de nombres premiers de la forme $4h+1$, qui ne surpassent pas x.

Au lieu d'étudier la différence $\triangle x$ elle-même envisageons la fonction

$$\theta(x) = \pi_{4h+3}(x) - \frac{1}{2}\pi_{4h+3}(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi_{4h+3}(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{4}\pi_{4h+3}(\sqrt[4]{x}) + \ldots$$
$$-\left(\pi_{4h+1}(x) + \frac{1}{2}\pi_{4h+1}(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi_{4h+1}(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi_{4h+1}(\sqrt[4]{x}) + \ldots\right)$$

ou, si l'on le préfère

$$\theta(x) = \triangle(x) + \frac{1}{3}\triangle(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{5}\triangle(\sqrt[5]{x}) + \ldots \tag{2}$$
$$-\frac{1}{2}\pi_{2h+1}(\sqrt{x}) - \frac{1}{4}\pi_{2h+1}(\sqrt[4]{x}) - \ldots$$

Ici $\pi_{2h+1}(x)$ désigne le nombre de nombres p... non supérieurs à x.

La formule signalée est:

$$\theta(x) = P_1(x) + \frac{1}{2}P_2(x) + \ldots \tag{3}$$

où

$$P_1(x) = \Phi(\ldots$$

$P_2 \ldots$

$P_3(x) \ldots$

. . . .

DET KONGELIGE NORSKE VIDENSKABERS SELSKAB.
FORHANDLINGER BD. I, NR. 50.

La différence entre le nombre de nombres premiers des formes 4h+3 et 4h+1, exprimée par une formule exacte.

Par

Viggo Brun

(Meddelt i Fellesmøtet 12te november 1928).

J'ai donné une formule exacte (Voir Comptes Rendus t. 177, 1923, p. 810, ou Netto: Lehrbuch der Combinatorik, 2 Aufl. 1927 p. 276,) pour déterminer la fonction $f(x)$ de Riemann

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \ldots,$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers non supérieurs à x. Je la répète ici, en lui donnant une autre forme:

$$f(x) = J_1(x) - \frac{1}{2}J_2(x) + \frac{1}{3}J_3(x) - \frac{1}{4}J_4(x) + \ldots \tag{1}$$

où

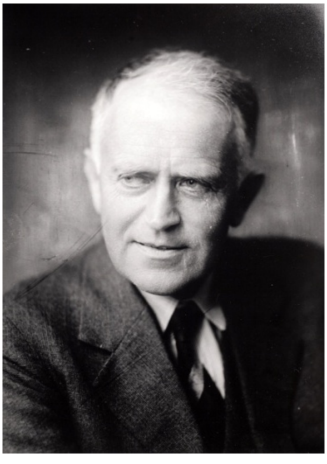
$$J_1(x) = \Phi\left(\frac{x}{2}\right) + \Phi\left(\frac{x}{3}\right) + \Phi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots$$
$$J_2(x) = J_1\left(\frac{x}{2}\right) + J_1\left(\frac{x}{3}\right) + J_1\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots$$
$$J_3(x) = J_2\left(\frac{x}{2}\right) + J_2\left(\frac{x}{3}\right) + J_2\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

La définition de la fonction $\Phi(x)$ est la suivante:

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(*Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr.* 2011 (4), 115-120)

Viggo Brun
La difference entre le nombre de nombres premiers des formes 4h+3 et 4h+1, exprimes par une formule exact m.fl.
DKNVS Forhandlinger 1926-1928 m.fl.[1]

Haakon Waadeland
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet


Viggo Brun. NTNU Universitetsbiblioteket.

Viggo Brun (1885–1978) var født i Lier. Han tok matematisk-naturvitenskapelig embetseksamen i 1909. Våren 1910 var han i Göttingen på egen kostnad. Da skrev han sitt aller første arbeide, Ein Satz über Irrationalität. Dette førte til at han fikk et universitetsstipend, senere også et reisestipend. Disse muliggjorde arbeidet med matematikk hjemme i Drøbak fram til 1920, samt et kortere opphold i Paris. Gjennom dette sitt arbeide i ensomhet kvalifiserte han seg for vikariat i et professorat ved Universitetet i Kristiania (1920-1923). I 1923 ble han professor i matematikk ved Norges Tekniske Høgskole i Trondheim, og i 1946 ved Universitetet i Oslo. Denne stillingen hadde han til oppnådd pensjonsalder i 1956. Han

[1] DKNVS Forhandlinger 1926-1928, B. I, Nr. 50, s. 146-148. Andre publikasjoner av Brun er oppført på slutten av artikkelen.

fortsatte sitt matematiske arbeide så lenge han levde.

Viggo Brun var tallteoretiker. Atle Selberg sa at han var en av de mest egenartede og dypt originale begavelser vårt land har fostret. Det viktigste resultatet hans var det som senere ble kalt Bruns såldmetode, som har sin rot (inspirasjon) i Eratosthenes' såldmetode fra klassisk gresk matematikk. Bruns såldmetode synes å ha blitt til i Drøbakperioden, kanskje delvis i Paristiden.

Et resultat Brun viste ved såldmetoden var at rekken av inverse primtalltvillinger

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}\right)$$

konvergerer (i motsetning til rekken av inverse primtall) eller stopper.

Viktigere enn enkeltresultatene er her at man ved elementære metoder (som få trodde på før) kan vise dype resultater som man ofte ikke klarte å vise på andre måter. Videreføring av Bruns såldmetode er senere gjort av Atle Selberg og I. Vinogradov og andre.

I listen (bak) med 12 DKNVS-arbeider ligger atskillig informasjon om Viggo Bruns arbeider. Vi skal se noe av det. Det aller første arbeidet i listen, faktisk det som egentlig innfører såldmetoden, «Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach», er den bro som Viggo Brun bygget over det matematiske Ginnungagap fra antikkens matematikk til nåtidens. Arbeidet later til å være en sammenfatning av resultater han fant tidligere, f. eks. i krigsårene, der han jo satt i sin isolasjon. Det aller viktigste var jo ikke teoremet selv, men at det viser at klassiske såldmetoder har sin verdi også som et matematisk verktøy idag, i visse tilfeller et sterkere verktøy.

Omtrent 50 år senere hadde Viggo Brun en 15 minutters presentation on «Reflections on the sieve of Eratosthenes» at the International Congress of Mathematicians in Moscow 1966 med sterk referanse til 1920-arbeidet. Dette arbeidet, også publisert i Skrifter 1967, Nr. 1, kan være en port til beslektet arbeide av Brun, kanskje i kombinasjon med arbeidet Umkehrprobleme.
A. L. Whiteman har skrevet MathSciNet-referatet av 1967-arbeidet. Fra hans review henter vi et viktig, lite skritt: La $a$være et positivt helt tall, og stryk alle tall $\leq a$delelige med primtallene $2, 3, 5, \dots, p(a^r)$. Hvis antallet av ikkecancellerte hele tall kalles $E\left(a, 2,3, \dots, p(a^r)\right), r = \frac{1}{2}$, da er, for $r = \frac{1}{2}$

$$E\left(a, 2,3, \dots, p(a^r)\right) = \pi(a) - \pi(a^r) + 1$$

der $p(a^r)$ er det største primtall $\leq a^r$, og $\pi(a)$ antall primtall $\leq a$. Denne observasjonen kan utledes fra en viktig formel som er gjengitt i Whitemans review [2].

I sitt foredrag har forfatteren (Brun) kommet med følgende ønske: *«The author hopes, that younger mathematicians will continue to explore the reason for the subtle influence of the distribution of primes not exceeding $\sqrt{a}$ on the distribution of primes between $\sqrt{a}$ and a.»* I sitt review sender Whiteman dette ønsket videre til leseren.

I oversikten over Bruns arbeider i DKNVS finner vi bl. a. tittelen «Niels Henrik Abel: neue bibliographische Funde». Bak denne befinner seg en omfattende samling brev, i hovedsak på fransk, som igjen inneholder det viktige funn av Viggo Brun: Manuskriptet til Abels såkalte Pariseravhandling, som lenge ingen visste hvor var, var ved Viggo Bruns hjelp nå kommet til rette.

Bak hovedinteressen, primtall, befant seg også andre matematiske interesser. En av Bruns interesser var kjedebrøker. Han var spesielt interessert i forskjellige generalisasjoner. Han holdt en forelesningsserie om kjedebrøker for et pent lite publikum. Han hadde generaliserte kjedebrøker i tankene når han arbeidet med kjedebrøker. Det kunne føre til resultater. Et slikt eksempel er «Music and ternary continued fractions». Her er faktisk både kjedebrøken og musikken generaliserte. Men kjedebrøken bygget på en generalisering av subtraksjonsalgoritmen fra oldtiden. I tillegg kom at Brun selv var stolt og glad over artikkelen, siden han selv, etter eget sigende var fullstendig umusikalsk.

De resterende punkter i listen over DKNVS-publikasjoner er av forskjellig slag, ofte med en historisk flavor (Studiet av primtallene, studiet av sirkelen osv.) Der er også en minnetale over Richard Birkeland, meget velskreven og meget informativ. Det er en sterk og varm avskjed med den første professor i matematikk ved vårt universitet.

Viggo Brun var humanist i all sin ferd. Han gledet seg over estetikken i matematikken og dens framstilling. Han var også interessert i matematikkens historie. Hans to bøker «Regnekunsten i det gamle Norge» og «Alt er tall» vitner om det.

Å skrive om Viggo Brun uten å nevne hans sans for skjønnheten i matematikken ville være en mangel ved fremstillingen. I sin «Alt er tall» legger han stor vekt på dette. Han henter der eksempler fra den indiske matematiker Bhaskara, spesielt fra hans vakre oppgavesamling Lilavati. Her skal vi nøye oss med ett av de mange eksempler: *«Av en sverm bier slo 1/5 seg ned på en cadambablomst og 1/3 på en silindriblomst. Tre ganger differensen mellom disse flokker slo seg ned på en cutajablomst. Resten av svermen – 1 bi – surret omkring i* *luften, fristet som den var både av en jasmins og av en padanus' søte vellukt. Si meg, vakre kvinne, hvor stor svermen var.»*

Viggo Brun var vennlig, hjelpsom og gjestfri. Han satte stor pris på samtaler med kolleger og studenter. Noen medstudenter og jeg var så heldige å bli invitert hjem til ham i hans koselige hus Tverrkjegla i Drøbak. Mine samtaler med Brun, der og ellers, har hatt stor betydning for meg gjennom hele livet. Jeg regner med at det samme gjelder for mine medstudenter.

Fine samtaler kom i samværet med 4 studenter, hjemme i Tverrkjegla i Drøbak. Vi var glade over å bli invitert, og troppet forventningsfulle opp. Brun hadde mye å fortelle. Vi fikk der også gleden av å sitte i de rettlinjegenererte stolene. Han hadde laget to stoler av rettlinjede spiler. En stol var en enkappet hyperboloide, en annen var en hyperbolsk paraboloide, i begge tilfelle utmerkede stoler (kanskje noe for Ekornes på Sunnmøre?).

I et annet eksempel på Brunsk originalitet møter vi også Bruns hustru Laura Brun. Starten var noen bilder Viggo Brun hadde fått se hos en kollega i biologi. Bildene var av blomsterstøv. I to av tilfellene oppdaget han interessant matematikk på pollenkornene; der var regulære femkanter omgitt av regulære sekskanter, slik at hele kornet, om observasjonen var den samme overalt, skulle gi et halvregulært polyeder, et Arkimedespolyeder. Men Viggo Brun stoppet ikke der. Han ville vite hvorfor. Etter å ha gjettet på at det måtte ha med trykket å gjøre startet Laura og Viggo brødbakingen, ikke med tanke på å lage mat, men på å etablere kunnskaper. De to samarbeidspartnere tok 32 kjegler (spissposer med deig) og satte dem inn i en globus av riktig størrelse med spissen mot kulesentret. Ved gjæringen, og enda mer stekingen, oppstår trykk, og dermed figurene (fem- og sekskanter). For detaljer, og fremfor alt forbehold og modifikasjoner, viser vi til artikkelen «Blomsterstøv og arkimedespolyeder» i tidsskriftet NORMAT. Se spesielt Fig. 5 i NORMAT-artikkelen. Se også Nordisk Matematisk Tidskrift, Vol. 25-26, spesielt de vakre illustrasjonene. Under dette arbeidet hadde Viggo Brun nyttige samtaler med Finn Faye Knudsen.

Viggo Brun måtte dessverre også føre andre og mer ubehagelige samtaler. Han var i en stadig konfrontasjon med nazipolitiet i Trondheim i forsøk på å hjelpe folk som var arrestert, f. eks. Tambs Lyche [1]. Det er ingen tvil om at disse samtalene innebar en stor fare for hans eget liv. Gjennom sine anstrengelser her dokumenterte Viggo Brun mot, stort mot.

Viggo Brun høstet megen heder for sitt arbeide. Her skal først og fremst nevnes at han av Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab i 1958 ble tildelt Gunnerusmedaljen. Andre æresbevisninger er at han ble æresdoktor ved University of Hamburg, medlem av mange videnskpsselskaper osv.

Referanser

[1] Magne Brekke Rabben: *Abstraksjon og anvendelser, Historien til Institutt for matematiske fag ved NTNU 1910-2010*, Tapir Akademiske forlag 2011.

[2] A. L. Whiteman: *Math. Rev. MRO219466*.

Anbefalt lesning er Karl Egil Auberts kronikk i *Dagbladet* 13. oktober 1975: «Matematiker og humanist».

Viggo Bruns publikasjoner i DKNVS Skrifter og Forhandlinger

La difference entre le nombre de nombres premiers des formes 4h+3 et 4h+1, exprimes par une formule exact, DKNVS Forhandlinger 1926-1928, Bd. I, Nr. 50.

Richard Birkeland, mindetale i fellesmøtet 8de oktober 1928, DKNVS Forhandlinger 1926-1928, Bd. I, Nr. 42.

Algorithme pour calculer le n-th nombre premier, DKNVS Forhandlinger 1931, Bd. IV, Nr. 19.

Umkehrprobleme, DKNVS Skrifter 1935, Nr. 4.

Une generalisation de trois identites concernant les nombres premiers et les nombres naturels 2, 3, 4, 5…, DKNVS Forhandlinger 1936, Bd. IX, Nr. 26.

Eine aus der Simpsonschen Regel abgeleitete Summenformel, DKNVS Forhandlinger 1938, Bd. XI, Nr. 1.

Studiet av primtallene fra oldtiden til våre dager, Foredrag på Høgtidsdagen 26de februar 1942, DKNVS Forhandlinger 1942, Bd. XV, s. 21-36.

Music and ternary continued fractions, DKNVS Forhandlinger 1950, Bd. XXIII, Nr. 10.

Niels Henrik Abel. Discours prononcé dans la séance publique le 26 février 1952, DKNVS Forhandlinger 1952, Bd. XXV, s. 25-43.

Reflections of the sieve of Eratosthenes, DKNVS Skrifter 1967, Nr. 1, 9 s.

Studiet av sirkelen gjennom tidene, Foredrag på høytidsdagen 26. februar 1970, DKNVS Forhandlinger 1970, s. 31-43.

Videnskapsselskapet i Kristiania, Skrifter

Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach, Videnskapsselskapet i Kristiania, Skrifter I, Matematisk-naturvidenskabelig klasse, 1920, Nr. 3.

Abstract

Viggo Brun (1885-1978) was born in Lier, Norway. After his university exam in mathematics and science he went to Göttingen at his own cost. There he wrote

his first mathematical paper. From that paper he earned a grant, making it possible for him to go on with his mathematical work. He continued working on his own and following his own paths. He thereby reached remarkable results. His famous sieve method has caused no lesss than a revolution in the research in number theory. It connects in an extremely profitable way old greek mathematics to present problems and ideas.

Brun was in every respect a humanist, for instance a pacifist. During the war he always did his best to help people who had been arrested by the nazis.

From the list of Brun's papers (above) we can see his interest in history of mathematics, elementary mathematics, music, biology and, above all, a great view of how to present mathematics (and other things).

For his work in mathematcs, history of mathematics and other things he has been honored in many different ways. Here the most natural thing to mention is the Gunnerus medal: In addidion:, Of other things:Honorary Doctor at the University og Hamburg, elected membership in several scientific societies etc.