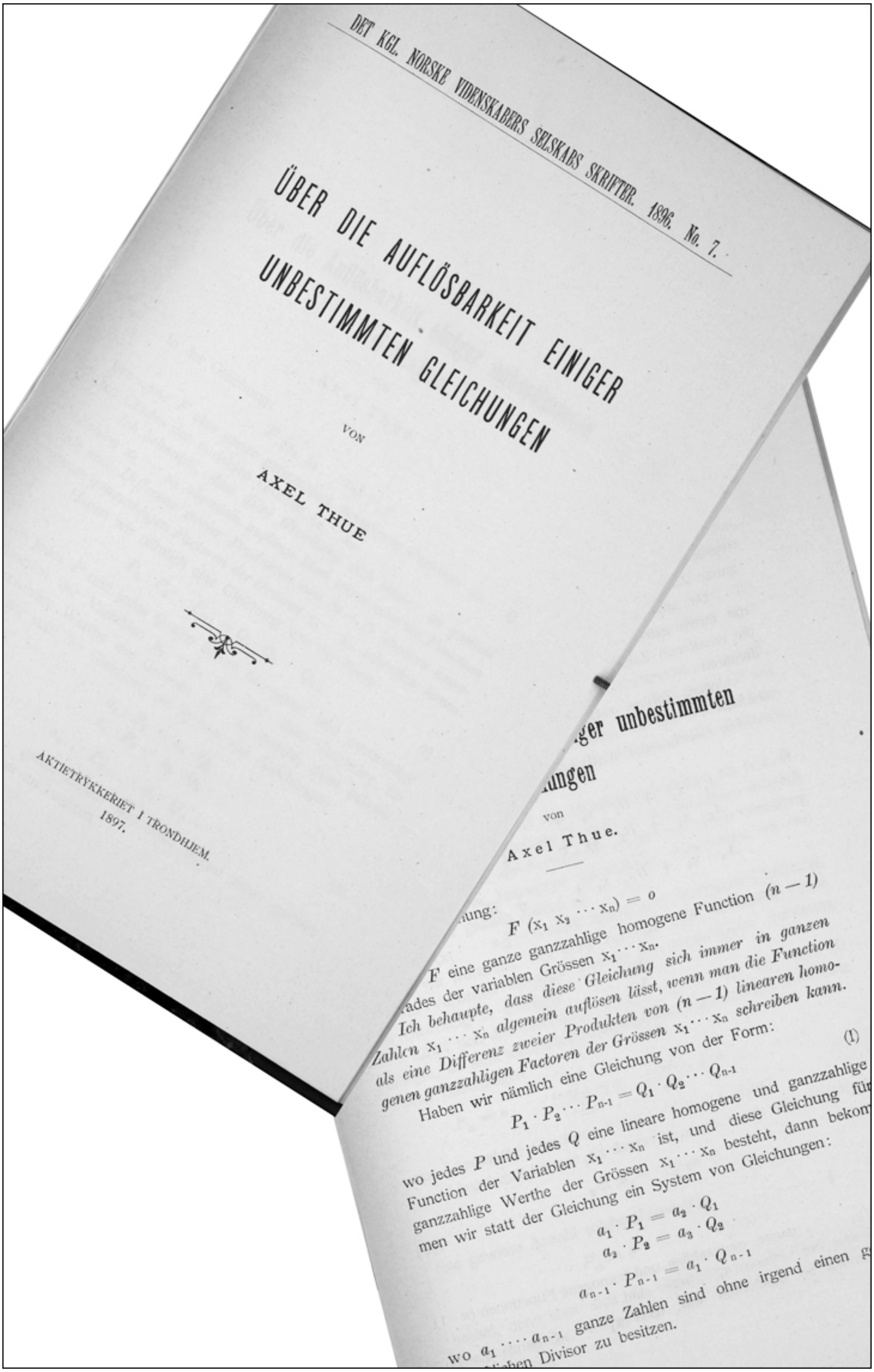

DET KGL. NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS SKRIFTER. 1896. No. 7.

ÜBER DIE AUFLÖSBARKEIT EINIGER UNBESTIMMTEN GLEICHUNGEN

VON

AXEL THUE

AKTIETRYKKERIET I TRONDHJEM.
1897.

...ger unbestimmten
...ungen

von
Axel Thue.

...ung:

$$F\,(x_1\ x_2 \cdots x_n) = o$$

...F eine ganze ganzzahlige homogene Function $(n-1)$ ...rades der variablen Grössen $x_1 \cdots x_n$.

Ich behaupte, dass diese Gleichung sich immer in ganzen Zahlen $x_1 \cdots x_n$ algemein auflösen lässt, wenn man die Function als eine Differenz zweier Produkten von $(n-1)$ linearen homogenen ganzzahligen Factoren der Grössen $x_1 \cdots x_n$ schreiben kann.

Haben wir nämlich eine Gleichung von der Form:

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_{n-1} = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_{n-1} \tag{1}$$

wo jedes P und jedes Q eine lineare homogene und ganzzahlige Function der Variablen $x_1 \cdots x_n$ ist, und diese Gleichung für ganzzahlige Werthe der Grössen $x_1 \cdots x_n$ besteht, dann bekom... men wir statt der Gleichung ein System von Gleichungen:

$$a_1 \cdot P_1 = a_2 \cdot Q_1$$
$$a_2 \cdot P_2 = a_3 \cdot Q_2$$
$$a_{n-1} \cdot P_{n-1} = a_1 \cdot Q_{n-1}$$

wo $a_1 \cdots a_{n-1}$ ganze Zahlen sind ohne irgend einen g... ...ihen Divisor zu besitzen.

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 103-110)

Axel Thue
Über die Auflösbarkeit einiger unbestimmten Gleichungen
DKNVS Skrifter 1896

Olav Njåstad
Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet

Axel Thue var fødd i Tønsberg i 1863. Han tok mellomskuleeksamen i Tønsberg og artium ved Aars og Voss skole i Oslo (den gong Kristiania). Han studerte så realfag ved Det Kongelige Frederiks Universitet i Oslo, og tok matematisk-naturvitskapleg embetseksamen med matematikk hovudfag i 1889. I åra 1890-1892 studerte han med eit reisestipend matematikk i Leipzig og Berlin, og frå 1892 til 1894 var han universitetsstipendiat i Oslo. Han hadde stilling som overlærar ved Trondhjem Tekniske Læreanstalt frå 1894 til 1903. I 1903 vart han utnemnd til professor i anvendt matematikk ved universitetet, og dette embetet hadde han til han gjekk bort i 1922.

I mellomskulen interesserte Thue seg mest for fysikk, men i gymnaset vart interessa for matematikk vekt. Dette kom særleg av kontakten med Elling Holst. Holst var Thues lærar både i gymnaset og ved universitetet. Særleg innan geometri vart Thue inspirert av Holst, og allereide i studietida skreiv han fleire avhandlingar over geometriske emne. Også seinare skreiv han om geometriske emne, men hans matematiske hovudinnsats kom ikkje til å liggja innan geometrien.

Studieopphaldet i Berlin gav sterk inspirasjon til Thues matematiske utvikling. Han kom der i kontakt med fleire leiande matematikarar, som Leopold Kronecker, Lazarus Fuchs og Hermann von Helmholtz. Under opphaldet i

Leipzig var Thue elev av Sofus Lie. Lie sette Thues matematiske evner høgt, og Thue gav uttrykk for at han lærde mykje under opphaldet. Likevel sette innføringa i Lies teoriar ikkje merkande spor i Thues produksjon. Dette hadde nok samanhang med eit karaktertrekk ved Thue: Han hadde ekstrem motvilje mot å arbeida med andres idear. Når han las det andre hadde gjort, la han snart bort arbeidet for å utvikla ideane etter sin eigen tenkjemåte, og han arbeidde ugjerne med problem som han visste andre var opptekne av. I artiklane hans finn ein nesten aldri tilvisingar til samtidig eller eldre litteratur. Vilhelm Bjerknes omtala dette i ein minnetale slik: *«I vitenskapens grunnleggelsesperiode i oldtiden eller renessansen, som en samtidig av Aristoteles eller Galilei, ville han hatt fritt spillerom for sin begavelse. I stedet kom han, for å bruke et dristig billede, til å arbeide som en Galilei eller Aristoteles som plutselig var satt over i vår tid.»*

I 1894 vart Thue gift med Lucie Collet Lund, og same året flytte dei til Trondheim. Som overlærar ved Trondhjem Tekniske Læreanstalt underviste Thue i mekanikk. Trondhjem Tekniske Læreanstalt var på den tida sett på som den fremste institusjonen i Norge for utdanning av framtidige ingeniørar. Thue vart innvald i DKNVS i 1895, og han publiserte to arbeid i Selskabets *Skrifter*. Han gav uttrykk for at han leid under at det i Trondheim ikkje fanst nokon som han kunne dela ideane sine med, men det er grunn til å tru at grunnlaget for dei mest kjende matematiske arbeida hans vart lagt her. I eit brev til Elling Holst i 1902 skreiv han*: «Ikke desto mindre har jeg i min drepende ensomhet , hvor ingen interesserer seg for mine ting, likevel produsert betydelig mer og bedre ting enn før i tiden. Jeg har således utviklet en teori, etter hvilken jeg blant annet kommer til Hermites og Lindemanns resultater om e og π. Grunnen til at jeg ikke har offentliggjort de ting jeg har liggende på lager, ligger dels deri, at jeg kan føre undersøkelsene lengre frem og gjerne først vil se en ordentlig avslutning på dem. Men først og fremst har jeg ventet, fordi jeg ikke visste hva som var nytt og hva som kunne være kjent før og fordi en slik undersøkelse har vært meg ubehagelig og virket lammende på min fantasi.»*

I 1903 vart han så utnemnd til det ledige professoratet i anvendt matematikk i Oslo etter Cato M. Guldberg. Anvendt matematikk var i Oslo synonymt med rasjonell mekanikk, og det var mekanikk han hadde til oppgåve å undervisa i. Han la ned stort arbeid i å utarbeida undervisigsmateriell i tilknyting til forelesingane. I innleiinga til Universitetsforlagets utgåve av Thues skrifter (sjå nedanfor) refererer Viggo Brun til Ralph Tambs Lyches omtale: *«There was something paradoxical about the fact that Axel Thue, when he finally became a professor in Oslo, was appointed to the chair of applied mathematics. But one would be seriously mistaken in supposing that Thue would neglect «applied mathematics» (i. e. rational mechanics, according to the university's traditional interpretation of the term), merely in order to occupy himself with number theory and other «non-applied» mathematical subjects. On the contrary, he took his professorship very seriously, but of course in his own characteristic fashion. His lectures on mechanics were models of their kind as regards their overall logical strategy and rigour of their construction.»* Og i ein minnetale, referert same stad, uttrykte Fredrik Lange–Nilsen det slik*: «His courses of lectures were exceptionally well thought out and organized. They were vastly different from the standard text-book presentations, every word being wholly and entirely his own original work. Everyone who has come into contact with Professor Thue will always retain the impression of his rare personality. He was impervious to fashion, he cared nothing for what was considered to be scientifically in vogue or out of date. As a thinker and as a person, he possessed qualities which have eternal value.»*

Parallelt med å utføra undervisingspliktene i professoratet skreiv han ei rad arbeid innan sine matematiske spesialitetar. Men han kom aldri til å ha nokon stilling som medførde undervisingsoppgåver i matematikk. Berre ein einaste person kan reknast som elev av Thue i streng vitskapleg meining, men det var til gjengjeld Thoralf Skolem.

Det Thue i ettertid er mest kjend for er hans bidrag til talteorien. Dei strekkjer seg frå enkle restteorem for kongruensar til djupe resultat om diofantiske likningar og rasjonal approksimasjon av algebraiske tal. Bidraga på det siste feltet kom til å innleia ein ny æra i teorien for diofantiske likningar. Vi skal gje ein kort omtale av nokre av Thues meir kjende resultat, og dernest gå litt nærare inn på eitt av dei to arbeida som han publiserte i DKNVS Skrifter.

Eit algebraisk tal er er eit tal som er løysing av ei likning av forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots.. + a_1 x + a_0 = 0$, der a_0 , a_1 ,……….a_{n-1} , a_n er heile tal. Alle rasjonale tal (det vil seia kvotientar av heile tal) er algebraiske (idet $z = p/q$ er løysing av likninga $qz–p=0$), men også irrasjonale tal kan vera algebraiske, for eksempel $z=\sqrt{2}$ (idet $z^2–2=0$) og andre rotutrykk. Joseph Liouville viste i 1844 at det eksisterer transcendente (det vil seia ikkje-algebraiske) tal, og Georg Cantor viste i 1874 at nesten alle reelle tal er transcendente, idet dei algebraiske tala utgjer ei ei uendeleg mengde som kan teljast ved dei naturlege tala. I 1873 greidde Charles Hermite å visa at e (grunntalet for den naturlege logaritmen) er transcendent, og Ferdinand Lindemann viste i 1882 at π (flateinnhaldet av ein sirkel med radius 1) er transcendent. (Dette resultatet medfører at eit kvadrat med same flateinnhald som ein gjeven sirkel ikkje kan konstruerast med passar og linjal.) Medan Thue var i Leipzig, oppdaga han eit bevis for at det eksisterer transcendente tal, men då han vart klår over at Liouville hadde kome opp med nesten same bevis, publiserte han det ikkje. Han la det seinare fram i eit foredrag i DKNVS. Det går fram av brevet hans til Elling Holst som det er sitert frå ovanfor at han seinare også hadde kome fram til ein teori som blant anna medførde dei nemnde resultata av Hermite og Lindemann.

Thues mest kjende resultat har å gjera med rasjonal tilnærming av algebraiske tal, og i den samanhang løysing av visse diofantiske likningar. Ei diofantisk likning er i denne samanhang ei likning av forma
$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)=C$, der $F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ er eit polynom med heiltallege koeffisientar, C eit heilt tal, og det krevst at løysingane $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ er heile tal. Eit velkjent eksempel er likninga $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, som blant andre har løysinga x=3, y=4, z=5, og løysinga x=5, y=12, z=13. I 1908 publiserte Thue arbeidet «*Om en generel i store hele tal uløsbar ligning*» i *Kristiania Videnskabers Selskabs (*no *Det Norske Vitenskapsakademis) Skrifter*, og i 1909 trykte *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* det meir utførlege arbeidet *«Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen»,* der også resultatet om tilnærming av algebraiske tal inngår. Meir presist: Det han viste var at ei diofantisk likning F(x,y)=C, der C er eit heilt tal og F(x,y) er eit homogent , irredusibelt polynom av grad minst lik 3 med heiltallege koeffisientar, berre har endeleg mange løysingar i heile tal x, y. (Eit polynom er homogent dersom den totale graden i alle ledda er den same, og irredusibelt dersom det ikkje kan faktoriserast i mindre faktorar.) Den kjende tyske matematikaren Edmund Landau sa til Carl Størmer i Oslo: «*Sein berühmter Satz ist die bedeutendste Entdeckung aus der elementaren Zahlentheorie, die ich erlebt habe.*»

Resultatet om rasjonal tilnærming av algebraiske tal har dette som bakgrunn: Johann Lejeune Dirichlet hadde i 1842 vist at for kvart irrasjonalt algebraisk tal α av grad $n \geq 3$ har ulikskapen

$$\left|\alpha - p/q\right| < q^{-2}$$

uendeleg mange løysingar p/q, der p og q er heile tal, medan Joseph Liouville i 1844 hadde vist at ulikskapen

$$\left|\alpha - p/q\right| < q^{-n}$$

med dei same føresetnadene har berre endeleg mange løysingar. (Graden n er graden til eit irredusibelt polynom med heiltalskoeffisientar som har α som nullpunkt.) Det Thue viste var: For kvart irrasjonalt algebraisk tal α av grad $n \geq 3$ og kvart positivt tal ε har ulikskapen

$$|\alpha - p/q| < q^{-(1 + n/2 + \varepsilon)}$$

berre endeleg mange løysingar. Thues idear og metodar har seinare inspirert til vidareføring av arbeid i same retning av kjende matematikarar som Carl Ludwig Siegel, Klaus Friedrich Roth, Wolfgang M. Schmidt, Alan Baker. Spesielt viste Roth at

$$|\alpha - p/q| < q^{-(2 + \varepsilon)}$$

har berre endeleg mange løysingar for kvart positivt tal ε . Dette er då i ei viss meining eit «beste» resultat. At dette har vore eit viktig forskingsområde går blant anna fram av at Roth og Baker fekk Fields-medaljen for sin innsats i 1958 og 1970. (Fields-medaljen vert utdelt kvart fjerde år i samband med dei internasjonale matematikk-kongressane.)

Også innan matematisk logikk gav Thue vektige bidrag med arbeid om teiknrekkjer. Desse ideane kom først til sin rett etter Thues tid. Han formulerte i 1914 det såkalla ord-problemet for semigrupper (nært i slekt med det såkalla «halting problem» for Turing maskiner).Han greidde å løysa problemet i nokre spesialtilfelle, medan det generelle problemet vart vist av Post og Markov i 1947 å ikkje ha løysing. Også innan geometri og mekanikk publiserte Thue arbeid av varig verdi. Universitetsforlaget gav i 1977 ut opptrykk av Thues samla skrifter innan talteori og logikk.

Thue publiserte som nemnt to avhandlingar i *DKNVS Skrifter*. Den eine var over eit geometrisk emne, *«Ein Theorem über die Regelflächen»* , den andre over eit talteoretisk emne, *«Über die Auflösbarkeit einiger unbestimmten Gleichungen»,* begge i 1896. Denne siste avhandlinga har to deler. For å gje eit inntrykk av den første delen refererer vi hovudresultatet derifrå. Det kan formulerast slik: La $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stå for eit heiltalleg homogent polynom av grad $n-1$. Då har likninga $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ alltid heiltallege løysingar dersom funksjonen $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kan framstellast som ein differans mellom to produkt av $n-1$ lineære heiltallege faktorar i dei ukjende $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Vi skal sjå nærare på den andre delen, som har slektskap med den vidkjende «Fermats siste setning». Pierre de Fermat hevda i 1637 utan bevis at likninga

$$x^n + y^n = z^n$$

ikkje har heiltalsløysingar når $n \geq 3$. Som kjent publiserte Andrew Wiles eit bevis i 1995, etter at ei lang rad med kjende og ukjende matematikarar hadde arbeidt med problemet i meir enn 350 år. Fermat skisserte i ein annan samahang eit bevis for tilfellet $n=4$. Leonhard Euler greidde i 1753 med utgangspunkt i dette resultatet å føra eit bevis for tilfellet $n=3$. Det fylgjer straks av dette at resultatet gjeld også for alle tal som 3 går opp i, blant anna for $n=6$.

I Thues avhandling er tilfellet $n=6$ handsama under føresetnad av at z ikkje er deleleg med 3. Vi skal sjå på framgangsmåten. Thue tek seg først føre å finna forma på dei tala a, b, c som oppfyller likninga

$$a^3 + b^3 = c^2 ,$$

der a og b er innbyrdes primiske positive eller negative heile tal. Der er føresett at c ikkje er deleleg med 3. Vi kan skriva

$$a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)\ .$$

Dersom $(a+b)$ og $(a^2 - ab + b^2)$ har ein felles faktor d, så må også $(a+b)^2$ og dermed differansen $(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = 3ab$ ha faktoren d. Då d også er faktor i c medan a og b ikkje har d som faktor, fylgjer det at $d = 3$, som var utelukka. Altså har $(a+b)$ og $(a^2 - ab + b^2)$ ingen felles faktor. Då produktet er lik c^2 får vi av det føregåande at $(a + b)$ og $(a^2 - ab + b^2)$ begge er kvadrattal, altså

$$(a + b) = A^2 ,\ (a^2 - ab + b^2) = B^2 ,$$

der A og B er heile tal. (Dette gjer ikkje Thue greie for med så mange ord!)

Etter fleire kvar for seg elementære omformingar og resonnement kjem ein fram til at det som skal til for at likninga $a^3 + b^3 = c^2$ er oppfylt er at det finst innbyrdes primiske tal α og β slik at

$$a = 4\alpha\,(\alpha^3 - \beta^3)\ ,\ b = \beta\,(\beta^3 + [2\alpha]^3)$$

(eller med rollebyte for a og b). Ein finn så A og B uttrykt ved α og β, og $c = AB$.

Hovudresultatet er innehalde i det neste steget. Det gjeld å visa at likninga

$$P^6 + Q^3 = R^2$$

ikkje har heiltalsløysingar ulike null, med R ikkje deleleg med 3. Vi kan utan tap av generalitet gå ut frå at P og Q , og dermed P^2 og Q , er innbyrdes primiske. La oss gå ut frå at det finst ei løysing P , Q , R. Med P^2 i rolla som a og Q i rolla som b får vi

$$P^2 = 4\,\alpha\,(\alpha^3 - \beta^3\,)\,,\; Q = \beta\,(\beta^3 + [2\alpha]^3\,)\,,$$

og med P^2 i rolla som b og Q i rolla som a får vi

$$P^2 = \beta\,(\beta^3 + \{2\alpha]^3\,)\,,\; Q = 4\alpha\,(\alpha^3 - \beta^3\,)\,,$$

i begge tilfelle med α og β innbyrdes primiske. Vi har då også at α og $\alpha^3 - \beta^3$ er innbyrdes primiske og β og $\beta^3 + [2\alpha]^3$ er innbyrdes primiske. Dei to uttrykka $\alpha^3 - \beta^3$ og $\beta^3 + [2\,\alpha]^3$ kan ikkje begge vera delelege med 3, for i så fall ville også R vera det, mot føresetnaden.

La for eksempel $\alpha^3 - \beta^3$ ikkje vera deleleg med 3 . (Eit tilsvarande argument kan førast dersom $\beta^3 + [2\alpha]^3$ ikkje er deleleg med 3.) Det finst då heile tal h og k slik at $\alpha = h^2$, $\alpha^3 - \beta^3 = k^2$ (sidan α og $\alpha^3 - \beta^3$ ikkje har nokon felles faktor og $4\alpha(\,\alpha^3 - \beta^3\,)$ er eit kvadrattal). Vi set

$$P_1 = h\,,\; Q_1 = -\beta\,,\; R_1 = k\,.$$

Då kan $\alpha^3 - \beta^3 = k^2$ skrivast som

$$P_1^{\,6} + Q_1^{\,3} = R_1^{\,2}\,,$$

med R_1 ikkje deleleg med 3. Vi ser av definisjonane at P_1 , Q_1 og R_1 er ulike null, sidan P, Q og R er det (og med P_1 og Q_1 innbyrdes primiske). Vi har altså kome fram til ei likning av same form som den opprinnelege, med same føresetnad. Vi ser også at absoluttverdiane av P_1 , Q_1 og R_1 er mindre enn absoluttverdiane av P , Q og R . Vi kan no gjenta argumentet og får ei «nedstiging» som til slutt fører til at minst eitt av ledda er lik null. Dette er ei motseiing, og derfor finst det ingen heiltalsløysingar av $P^6 + Q^3 = R^2$, med R ikkje deleleg med 3.

Ei løysing x, y, z av likninga $x^6 + y^6 = z^6$ gjev ei løysing også av $P^6 + Q^3 = R^2$ med $P=x$, $Q=y^2$, $R=z^3$. Derfor kan $x^6 + y^6 = z^6$ ikkje ha heiltalsløysingar med z ikkje deleleg med 3.

Referansar

Axel Thue: *Selected Mathematical Papers*. Med biografi av Thue ved Viggo Brun og matematisk omtale ved Carl Ludwig Siegel. Universitetsforlaget 1977.

Sigmund Selberg: *Axel Thue*. Biografi på Høytidsdagen 26. Februar 1978. DKNVS Forhandlinger 1978.

Abstract

Axel Thue was born in 1863 in Tønsberg, a town in the south-east of Norway. He studied science and mathematics at the University of Oslo, and mathematics during stays in Leipzig and Berlin. He held a position as senior teacher in mechanics at an engineering college in Trondheim from 1894 to 1903. In 1903 he was appointed professor of applied mathematics (which meant rational mechanics) at the University of Oslo, a position he held until his death in 1922. Thue never held a position with teaching obligations in mathematics, but he published a number of papers in his special fields of research. These were mainly in number theory, but also in mathematical logic, geometry and mechanics. He was an extremely original thinker, and very rarely referred to results of other researchers. His results in number theory spanned from simple rest theorems for congruence to deep results on Diophantine equations and rational approximation of algebraic numbers. He proved the existence of transcendental numbers as well as later the transcendence of the numbers e and π , but he did not publish these results since they were already known. His most famous result is a theorem on Diophantine equations and in that connection on rational approximation of irrational algebraic numbers. The theorem on Diophantine equations states that such an equation of the form $F(x , y) = C$, where C is an integer and $F(x , y)$ is a homogenous and irreducible polynomial of degree $n \geq 3$, has only a finite number of solutions. The approximation result states that for every irrational algebraic number α of degree $n \geq 3$ and every positive number ε , the inequality $\left| \alpha - p/q \right| < 2^{-(1 + n/2 + \varepsilon)}$ has only a finite number of solutions p/q with p and q integers.

Thue published two papers in the *DKNVS Skrifter*. One of these was in a problem in geometry, the other on a topic in number theory. The first part of this last paper contains conditions for solvability of a certain type of Diophantine equations. The second part deals with a problem related to «Fermat's last theorem». Thue here shows by an elementary but complicated argument of «descent» that the equation $P^6 + Q^3 = R^2$ has no integer solutions with P and Q relatively prime and R not divisible by 3. A consequence is that the equation $x^6 + y^6 = z^6$ has no integer solutions where z is not divisible by 3.