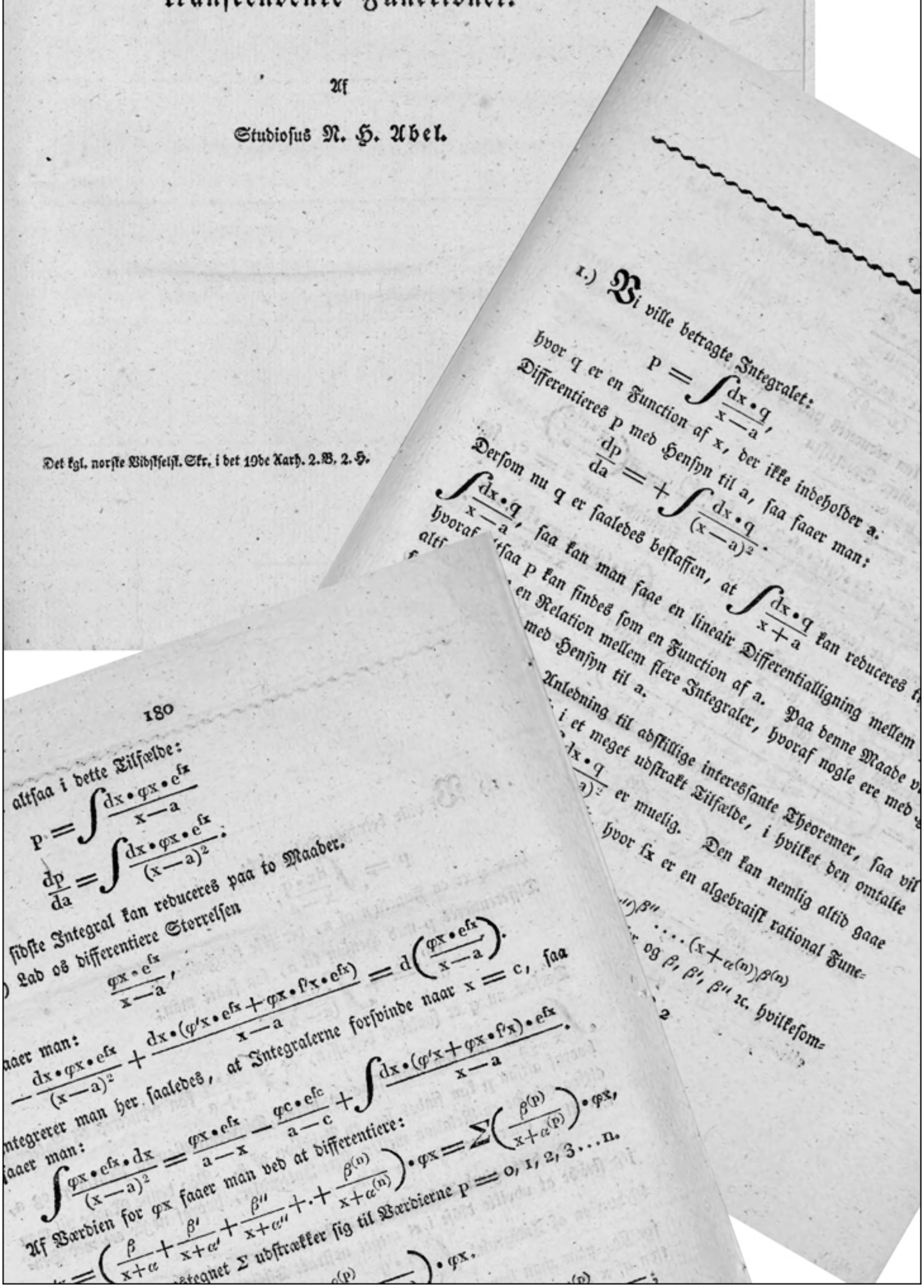
III.

Et lidet Bidrag til Læren om adskillige transcendente Functioner.

Af

Studiosus N. H. Abel.

Det kgl. norske Vidsksselsk. Skr. i det 19de Aarh. 2.B. 2.H.



Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr. 2011 (4), 91-100)

Niels Henrik Abel
Et lidet Bidrag til Læren om adskillige transcendente Functioner
DKNVS Skrifter 1824-1827[1]

Christian Skau
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet


Niels Henrik Abel

Avhandlingen «Et lidet Bidrag til Læren om adskillige transcendente Functioner» (som vi vil referere til som «Trondheim-avhandlingen») ble skrevet like før Abel foretok sin store utenlandsreise, som varte fra september 1825 til mai 1827. Sannsynligvis er det denne avhandlingen det siktes til i et brev fra Abel til sin tidligere lærer Bernt Michael Holmboe, sendt fra København og datert 15. september 1825, ved starten av sin reise. Avhandlingen er tilsynelatende redigert i all hast siden det har sneket seg inn en banal regnefeil et sted som gjør at en rekke formler må rettes opp, uten at det svekker betydningen av arbeidet. Selve oppdagelsene som ligger til grunn for Trondheim-avhandlingen ble gjort av Abel allerede høsten 1823 og vinteren 1823/24. Han skrev en liten avhandling (A) om dette, og kort tid etter skrev han en lengre avhandling (B) der han generaliserte resultatet fra den første.

[1] Abels avhandling. Denne ble overrakt DKNVS i Trondheim 22. mars 1826 - formidlet gjennom Christopher Hansteen - og ble trykt i selskapets skrifter 1824-1827, s. 177-207.

Trondheim-avhandlingen er basert på (A) og utvikler innholdet i denne i en litt annen retning enn i (B). Avhandlingene (A) og (B) ble ikke publisert i Abels levetid, men de kom med i Holmboes utgave av Abels Oeuvres Complètes fra 1839, nemlig i bind II der de posthume arbeidene til Abel var samlet. Titlene på de to avhandlingene var «Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes» og «Extension de la théorie précédente», henholdsvis. Uforståelig nok valgte Holmboe ikke å ta med Trondheim-avhandlingen i bind I. Årsaken var ifølge Holmboe at innholdet i Trondheim-avhandlingen overlappet med inneholdet i (A) og (B).

Da Sophus Lie og Ludvig Sylow utga Abels Oeuvres Complètes på nytt i 1881 så inkluderte de Trondheim-avhandlingen (i fransk oversettelse) i bind I. Dessuten hadde de med Abels berømte Pariser-avhandling, «Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes», som først ble gjenfunnet og trykt i 1841. I tillegg hadde Lie og Sylow utførlige kommentarer til de forskjellige arbeidene, i motsetning til Holmboes utgave som ikke hadde slike.

Disse opplysningene gjør at når man skal omtale Trondheim-avhandlingen, så må man se denne i nær sammenheng med avhandlingene (A) og (B). Dessuten var det disse to som først ble kjent for matematikere ute i Europa og dermed fikk betydning, mens den norsk-språklige Trondheim-avhandlingen ikke ble kjent før Lies og Sylows utgave av Abels samlede verker utkom. Når det er sagt så skal det også sies at Trondheim-avhandlingen er det første arbeidet Abel publiserte som omhandler integraler av algebraiske funksjoner (senere kalt «abelske integraler»), spesielt elliptiske og hyperelliptiske. De sistnevnte er integraler av typen

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$$

der $P(x)$ er et polynom i x (av grad ≥ 3) og $R(x, y)$ er en rasjonal funksjon av x og y. Dette temaet skulle bli Abels hovedbeskjeftigelse, og også av den grunn er Trondheim-avhandlingen av stor historisk interesse. Men mer enn det, resultatet inneholdt i denne (og i (A) og (B)) ble fanget opp av store matematikere som Jacobi, Fuchs og Frobenius. Disse publiserte arbeider i Journal für die Reine und Angewandte Mathematik («Crelles journal») i årene 1846, 1873 og 1874, henholdsvis, der de essensielt utbroderer og omformulerer Abels resultater i pakt med de nye begrepene som var vokst frem (sterkt influert av Abels øvrige oppdagelser). Dessuten, og det er kanskje viktigere enn noe, Abels hovedresultat fra Trondheim-avhandlingen, som i tysk matematisk litteratur ble kalt «Die Vertauschung von Parameter und Argument» (ombytting av argument og parameter), lå til grunn for Weierstrass' gjennombrudd med den såkalte inverteringen av hyperelliptiske integraler. Sammen med Riemanns arbeider ledet dette til et imponerende byggverk, nemlig teorien for abelske funksjoner og algebraiske kurver (over de komplekse tall) - en vidtrekkende generalisering av teorien for elliptiske funksjoner og elliptiske kurver.

I et brev fra Weierstrass til Sophus Lie, datert Berlin 10. april 1882, skriver denne at det var Abels brev til Legendre (datert Christiania 25. november 1828, og publisert i Crelles journal etter Abels død), som ble avgjørende for retningen av hans egen matematiske forskning. (I brevet til Legendre gir Abel en konsis oversikt over sine viktigste arbeider og resultater.) Weierstrass skriver: «Die von Abel angegebene Darstellungsform der von ihm mit $\lambda(x)$ bezeichneten Function unmittelbar aus der diese Function definirenden Differentialgleichung herzuleiten, war die erste wichtigere mathematische Aufgabe, die ich mir stellte, und deren glückliche Lösung mich L ganz der Mathematik zu widmen». Det Weierstrass sikter til her, nemlig til spesielle såkalte theta-funksjoner og differensialligninger de er løsninger av, er relevant for det som er nevnt overfor, nemlig inverteringen av hyperelliptiske integraler. Det bør også sies at Abels største oppdagelse, addisjonsteoremet, som vil bli omtalt nedenfor, spiller en avgjørende rolle for å oppnå dette epokegjørende resultatet. Weierstrass formante senere igjen og igjen sine mange studenter med ordene: «Lesen Sie Abel!».

Det er av interesse å notere seg at Abel ser ut til å ha ansett sin «Vertauschungsatz» så viktig at han på et tidspunkt tenkte på å inkludere en paragraf om dette i sin Pariser-avhandling. Hans matematiske dagbok fra Pariseroppholdet, i tidsrommet fra august til oktober 1826, der Abel skriver sitt første utkast til avhandlingen han presenterte for L'Academie des Sciences den 30 oktober 1826, så finnes en paragraf, §11, med overskrift

$$(i) \qquad \text{Sur l'intégrale} \int \frac{dx}{x-a} e^{-\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx} = y$$

etterfulgt av to sider med formler som angår generalisering av satsen om parameter og argument. Men Abel oppga å inkludere dette stoffet i sin Pariser-avhandling, som forøvrig består av 10 paragrafer. (Uttrykket i (i) forekommer en tanke kamuflert både i Trondheim-avhandlingen og i (A).)

Før vi går nærmere inn på det rent matematiske innholdet i Trondheim-avhandlingen, så vil det være interessant og opplysende å omtale tilblivelseshistorien for denne. Dette vil samtidig kaste lys over en periode i Abels liv − fra høsten 1823 til våren 1825 − som var hans «anni mirabiles» (de mirakuløse årene). I isolasjon i Christiania, i forberedelse for sin utenlandsreise, gjorde Abel oppdagelser som kom til å innlede en helt ny epoke i matematikkhistorien og kom til å sette tonen for store deler av matematikken i det 19de århundre. Den kreative raptusen − som kun et geni opplever − som fant sted i denne toårsperioden kan sammenlignes med Newtons «anni mirabiles» i toårsperioden 1664-1666, da han, på samme alder som Abel, i isolasjon (pga. pesten som herjet i Cambridge) på hjemstedet Woolsthorpe i Lincolnshire, gjorde sine mest fundamentale oppdagelser.

I et brev fra professor Ferdinand Degen ved København universitetet til Hansteen i Christiania datert 21. mai 1821, er det et avsnitt om Abel som denne ble gjort kjent med. Degen skriver at de åndskrefter et hode som Hr. Abel er i besittelse av bør brukes på et emne som vil ha de viktigste følger for hele analysen, nemlig de elliptiske transcendenter. Med en nesten profetisk forutseenhet og med en poetisk uttrykksmåte skriver Degen: «Ved tilbørligt Anlæg for Undersøgelser af dette Slags vil den alvorlige Gransker ingenlunde blive staaende ved disse ellers i og for sig selv høyst mærkværdige Functioners mange og smukke Egenskaber, men opdage maghellanske Gjennomfarter til store Partier af eet og samme uhyre analytiske Ocean». Sommeren 1823 besøkte Abel professor Degen i København, og Degen henviste Abel til Legendres to-binds verk «Exercises de Calcul intégral sur divers ordres des transcendantes et sur les quadratures». Høsten 1823 i Christiania vet vi at Abel leste Legendres «Exercises». Han hadde tidligere studert arbeider av Euler, Lagrange og Gauss inngående. Vi kan følge i hans matematiske dagbok fra høsten 1823 og vinteren 1823/24 de mange oppdagelsene han gjorde i den perioden. Han skriver: «Jeg har paa et andet Sted beviist at

$$\int \frac{(\log x)^{\alpha}}{c+x}\,dx$$

paa ingen Maade lader sig integrere ved de hidentil antagne Functioner, og at det altsaa er en egen Classe af transcendente Functioner». (Dette var første eksemplet noensinne på at det (ubestemte) integralet til en elementær funksjon ikke behøver være elementær.) Videre i dagboken vises hvordan man kan redusere det generelle hyperelliptiske integralet

$$\int f(x,\sqrt{v})\,dx$$

der $v = v(x)$ betegner et polynom av grad $n \geq 5$ i x, til integraler av formene

$$\int x^m \sqrt{v}dx \,\text{og} \int \frac{\sqrt{v}}{x+a}\,dx, \text{eller} \int \frac{x^m}{\sqrt{v}}\,dx \text{ og } \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{v}}$$

og det på en slik måte at m kun har verdiene fra 0 til $n-2$. Dette er en generalisering av Legendres redusering av de elliptiske integralene (svarende til at

$n = 3$ eller 4) til tre hovedtyper (første, andre og tredje slag), nemlig normalformene

$$F(k,x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E(k,x) = \int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\Pi(a,k,x) = \int_0^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Her er x argumentet, k modulen og a parameteren. Vi kaller de tilhørende bestemte integralene mellom 0 og 1 for de komplette integralene, og betegner disse med $F(k,1) = F(k), E(k,1) = E(k), \Pi(a,k,1) = \Pi(a,k)$, henholdsvis. ($F(k)$ er nært knyttet til den ene perioden til den elliptiske funksjonen som fås ved å invertere $F(k,x)$.)

Dagboken til Abel fortsetter med en generalisering av Legendres setning om ombytting av parameter og argument («Vertauschungsatz») slik at den omfatter hyperelliptiske integraler. Dessuten vises eksempler på elliptiske integraler av tredje slag som kan reduseres til integraler av første slag og logaritmer. Alt dette er tydelig foranlediget ved Abels studium av Legendres «Exercises». Men snart etter oppsto herav virkelige store oppdagelser. Han hadde bemerket at Legendres bevis for sin «Vertauschungsatz» i det elliptiske tilfellet beror på at kvadratroten under integraltegnet tilfredsstiller en homogen lineær differensialligning av første orden med polynomer i den variable som koeffisienter. Eksempelvis, dersom $y = \sqrt{P(x)}$, der $P(x)$ er et polynom, så er y en løsning av den homogene differensialligningen

$$2P(x)y' - P'(x)y = 0.$$

Han utviklet derfor en mer generell, men ganske analog sats, der denne kvadratrot er avløst av en hvilken som helst løsning av en slik differensialligning. Dette foranlediget avhandlingen (A) omtalt tidligere, og i sin tur Trondheim-avhandlingen. Kort tid etter generaliserte han dette ved at han gikk utfra en homogen lineær differensialligning av vilkårlig orden med polynomer i den variable som koeffisienter. Dette avstedkom avhandlingen (B). Det er verdt å bemerke at Abel var oppmerksom på (vi kan dokumentere dette fra hans dagbok fra september 1827, men han visste muligens dette langt tidligere) at enhver algebraisk funksjon, dvs. en funksjon $y = f(x)$ definert implisitt ved $R(x,y) = 0$, der R er et polynom i x og y, tilfredsstiller en differensialligning av denne type. Alt dette viser et typisk trekk ved Abels geni, nemlig at han visste å gi sine undersøkelser en høy grad av generalitet uten å miste noe av essensen eller kraften i resultatene han oppnådde.

La oss kort omtale et av hovedresultatene fra Trondheim-avhandlingen, nemlig Abels «Vertauschungsatz». For ikke å gjøre det for komplisert, la oss kun betrakte det hyperelliptiske tilfellet. Abel viser følgende identitet:

$$(ii)\quad \begin{cases} \sqrt{\varphi(a)}\int_c^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{\varphi(x)}} - \sqrt{\varphi(x)}\int_c^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{\varphi(a)}} \\ \quad = \sum \frac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n+2}\int_c^x \frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \cdot \int_c^a \frac{a^m da}{\sqrt{\varphi(a)}} \end{cases}$$

der $\varphi(x)$ er et polynom i x av grad ≥ 3, α 'ene er koeffisientene til $\varphi(x)$ og nedre grense c i integralene er et vilkårlig nullpunkt til $\varphi(x)$, altså $\varphi(c) = 0$. Dersom $\varphi(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, så viser Abel at man får Legendres «Vertauschungsatz» i det elliptiske tilfellet (vi henviser til tidligere innført notasjon):

$$(iii)\quad \begin{cases} \sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)}\Pi(a,k,x) - \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\Pi(x,k,a) \\ \quad = k^2E(k,x)F(k,a) - k^2F(k,x)E(k,a). \end{cases}$$

(se §4,d i Trondheim-avhandlingen.)

Abel bemerket (noe Legendre også hadde observert) at fra (iii) så følger den berømte Legendre-identiteten (se notasjonen vi innførte ovenfor):

$$(iv)\quad \begin{cases} F(k)E(\sqrt{1-k^2}) + E(k)F(\sqrt{1-k^2}) \\ \quad -F(k)F(\sqrt{1-k^2}) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ligningen (iv) tilsvarer den såkalte Weierstrasske perioderelasjonen i teorien for abelske integraler.

Det som ligger til grunn for beviset av «Vertauschungsatz» (ii) er følgende identitet:

$$(v)\ \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sqrt{\varphi(x)}}{(x+a)\sqrt{\varphi(a)}}\right]-\dfrac{d}{da}\left[\dfrac{\sqrt{\varphi(a)}}{(x+a)\sqrt{\varphi(x)}}\right] \\ =\dfrac{U}{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\varphi(a)}} \end{cases}$$

der $U=\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(a)}{x+a}-\frac{\varphi(a)-\varphi(x)}{(x+a)^2}$.

Ved å integrere (v) to ganger, henholdsvis mhp. x og a, så får man (ii) ved tilbørlig behandling av høyresiden.

Dessverre så er en (muligens to) av de matematiske dagbøkene til Abel fra før han dro på sin utenlandsreise forsvunnet. Det er mulig at en brann i Holmboes hus i 1849 er årsaken, idet det er sannsynlig at Holmboe oppbevarte disse i sitt hus. Derfor må vi søke til andre kilder for å kartlegge omfanget av de oppdagelsene Abel gjorde i tidsrommet 1823-1825. Heldigvis finnes flere, ved siden av Holmboes egne erindringer. Et av de mest interessante er et brev fra Abel til Degen, datert Christiania den 2den mars 1824. Her forekommer oppsikts-vekkende opplysninger om de fremskritt han har gjort siden han besøkte Degen i København sommeren 1823. I brevet forekommer følgende (idet Abel henviser til et resultat han har vist om summer av integraler av en og samme algebraiske funksjon):

«Dette Theorem og en Afhandling derom har jeg tænkt at sende til det franske Institut, da jeg synes det vil udbrede Lys over de transcendente Functioner i det Hele. Af alle transcendente Functioner har jeg dog især gjort mig Umag med de elliptiske Transcendenter, da jeg altid har havt for Øje Hr. Professorens Raad til mig i et Brev til Hr. Professor Hansteen. Jeg har derfor bestræbt mig for at udarbejde en «Theorie des transcendantes elliptiques», i hvilken jeg saa vidt jeg har kunnet har søgt at vise den Methode man bør følge for at gjøre denne interessante og overmaade nyttige Theorie saa fuldkommen, som det, efter Analysens nuværende Tilstand, er mueligt».

Det går fram av dette brevet, sammenholdt med avhandlingen «Sur la comparaison des fonctions transcendantes» som Abel forfattet kort tid etter, at han var i besittelse av sitt addisjonsteorem i sin mest generelle form allerede da. Denne mest berømte av alle Abels oppdagelser er fundamentet som hans Pariser-avhandling bygger på, og beviset for addisjonsteoremet som forekommer i paragraf 1 og 2 av Pariseravhandlingen, er nærmest identisk med beviset gitt i den posthumt publiserte avhandlingen nevnt ovenfor.

I tillegg vet vi ifølge Holmboe at Abel før sin utenlandsreise hadde invertert det elliptiske integralet av første slag

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

og vist at $x = \varphi(u)$ er en entydig definert meromorf funksjon med to perioder, altså en elliptisk funksjon. Han utsatte å skrive en avhandling om denne oppdagelsen til etter han returnerte fra sin utenlandsreise. Dette kom han til å angre på, siden uvitende for Abel så var den tyske matematikeren Jacobi på sporet av å gjøre samme oppdagelse. Dette førte til en berømt kappestrid mellom de to, men med publiseringen av sin lange avhandling «Recherches sur les fonctions elliptiques» ble det klart for den matematiske offentlighet at Abel hadde prioritet i oppdagelsen av de elliptiske funksjonene. [I parentes bemerket, Gauss hadde oppdaget de elliptiske funksjonene mer enn 20 år tidligere, men hadde ikke publisert noe om disse. Siden Abels liv ble så kort så var det faktisk en fordel at han ikke besøkte Gauss i Göttingen på utenlandsreisen sin, slik planen opprinnelig var. Ved et slikt besøk ville utvilsomt Gauss ha gjort Abel oppmerksom på sine oppdagelser, og det kunne ha forskjøvet Abels plass i matematikkhistorien. Når det er sagt, så bør det også sies at da «Recherches» ble publisert i Crelles journal så roser Gauss med sterke ord Abels fremstilling av denne teorien i et brev til Bessel.]

For å summere opp, i tidsrommet 1823-1825 gjorde Abel følgende epokegjørende oppdagelser, listet i tilnærmet kronologisk rekkefølge (men man skal være klar over at han behandlet flere emner samtidig – det har relevans for spesielt de tre siste punktene):

i. Løsningen av den første integralligningen i matematikkhistorien. Det gjorde han ved en helt ny teknikk: brudden derivasjon. (Det viste seg senere at denne integralligningen ved en enkel omforming er identisk med den såkalte Radon-transformen. Denne sistnevnte er det matematiske fundamentet som moderne røntgentomografi bygger på, og som Hounsfield og McCormack fikk Nobelprisen i medisin for i 1979.)
ii. Bevis for at det finnes elementære funksjoner hvis (ubestemte) integral ikke er en elementær funksjon.
iii. Beviset for umuligheten å løse den generelle n'te gradsligningen algebraisk («ved rottegn») når $n \geq 5$.
iv. En vidtrekkende generalisering av Legendres «Vertauschungsats». (Avhandlingene (A), (B) og Trondheim-avhandlingen.)
v. Oppdagelsen av addisjonsteoremet – hans største oppdagelse.

vi. Oppdagelsen av de elliptiske funksjonene ved invertering av det elliptiske integralet av første slag.

Abel skulle bruke resten av sitt korte liv til å utarbeide og å ramme inn i teoribygninger de oppdagelsene han gjorde i dette tidsrommet. Kanskje det kan våre passende med å avslutte med de ord Leopold Kronecker, en av det 19de århundrets største matematikere, brukte i sin omtale av Abel overfor den svenske matematikeren Mittag-Leffler da de møttes i Berlin i 1874: «Hele den moderne matematikkens veldige bygning hviler på skuldrene av denne skandinaviske kjempen». (Husk at Norge var i union med Sverige i 1874!).

Summary

Abel's paper, titled «Et lidet Bidrag til Læren om adskillige transcendente Functioner» (which in Lie's and Sylow's edition from 1881 of Abel's Oeuvres Complètes got the title «Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes»), was submitted to DKNV's publication series March 22, 1826. It was communicated by Christopher Hansteen, one of Abel's mentors in Oslo (at that time named Christiania), and it was published in volume 2 (1824-1827), p.177-207. The paper was written by Abel just before he embarked on his journey abroad, which lasted from September 1825until May 1827, where he visited Berlin and Paris, but not Göttingen and Gauss as was originally planned.

The main result of his paper is a vast generalization of a result proved by Legendre for elliptic integrals of the third kind, which later in German mathematical literature was named «Die Vertauschung von Parameter und Argument» (the exchange of parameter and argument). In Legendre's two-volume monograph «Exercises de Calcul intégral», which Abel studied assiduously in the autumn of 1823, elliptic integrals were reduced to three normal types, the first, second and third kind, and many beautiful identifies between these were shown. Abel soon went way beyond Legendre's results. He inverted the elliptic integral of the first kind and showed that it was a meromorphic function with two periods, what subsequently was called an elliptic function. Then he generalized Legendre's «Vertauschungsatz» to hyperelliptic integrals, i.e. integrals of the form

$$\int f\,(x, \sqrt{v(x)})dx$$

where $f(x, y)$ is a rational function in x and y and $v(x)$ is a polynomial in x of degree ≥ 5. He proved the following identity:

$$(*)\begin{cases}\sqrt{\varphi(a)}\displaystyle\int_c^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{\varphi(x)}}-\sqrt{\varphi(x)}\int_c^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{\varphi(a)}}\\ =\displaystyle\sum \frac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n+2}\int_c^x \frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\cdot\int_c^a \frac{a^m da}{\sqrt{\varphi(a)}}\end{cases}$$

where $\varphi(x)$ is a polynomial of degree ≥ 3, the α's are the coefficients of $\varphi(x)$ and c is an arbitrary zero of $\varphi(x)$, i.e. $\varphi(c)=0$. (a is the parameter, and x is the argument.) If $\varphi(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$ the identity $(*)$ becomes Legendre's «Vertauschungsatz» for elliptic integrals of the third kind.

Abel goes far beyond the hyperelliptic case, though. He realized that what made Legendre's proof work was that the square root under the integral satisfies a homogeneous linear differential equation of degree one with polynomials in the variable as coefficients. He therefore proved a much more general, but analogous identity as $(*)$, and this is contained in the publication under consideration.

Later he generalized this further by considering solutions of homogeneous linear differential equations of any degree (with polynomials in the variable as coefficients). He wrote a paper on this which was posthumously published. This was later taken up Jacobi, Fuchs and Frobenius, and they published papers which largely reformulated Abel's results in terms of new settings and structures that had been introduced in the meantime.