Del III

Matematikk & fysikk

Høydepunkter i Skrifter og Forhandlinger

1761-2011

IX.

Undersøgning,

hvorledes

man paa den korteste Maade kan opløse saadanne Eqvationer, som indeholde flere eller mange ubekiendte Størrelser tillige,

af

Fr. Chr. Holb. Arentz.

Ji

$$aA + bB + cC = m$$
$$dA + eB + fC = n$$
$$gA + hB + iC = p$$

lad den første multipliceres med d, den anden med a, saa faaes

$$daA + dbB + dcC = dm$$
$$adA + aeB + afC = an$$
$$(db - ae)B + (dc - af)C = dm - an$$

fremdeles bliver

$$gaA + gbB + gcC = gm$$
$$agA + ahB + aiC = ap$$
$$(gb - ah)B + (gc - ai)C = gm - ap$$

sæt at, $db - ae = \alpha$ ligeledes $gb - ah = \delta$

$dc - af = \beta$ $\quad gc - ai = \varepsilon$

$dm - an = \gamma$ $\quad gm - ap = \xi$

hvorved faaes $\alpha B + \beta C = \gamma$ og $\delta B + \varepsilon C = \xi$

følgelig

$$\delta\alpha B + \delta\beta C = \delta\gamma$$
$$\alpha\delta B + \alpha\varepsilon C = \alpha\xi$$
$$(\delta\beta - \alpha\varepsilon) C = \delta\gamma - \alpha\xi \text{ og } C = \frac{\delta\gamma - \alpha\xi}{\delta\beta - \alpha\varepsilon} = \eta$$

... her kaldet η, isteden

At udfinde Maader, hvor... fornøieligt, saasom ... noget eller at opnaae et og ... paa; men sæt, at ... nstelighed er ved sig e... taber Sagen meget ... et saadant Arbeide ... roblemata, som paa ... e, til hvis Opløs... stride igiennem og ... der kunne komp... Laberne vilde ... udfinde Met... kunde naae ... ved Anled... in Analy... ubekien... tere ...

Det Kongelige Norske
Videnskabers Selskabs Skrifter
(*Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Skr.* 2011 (4), 85-89)

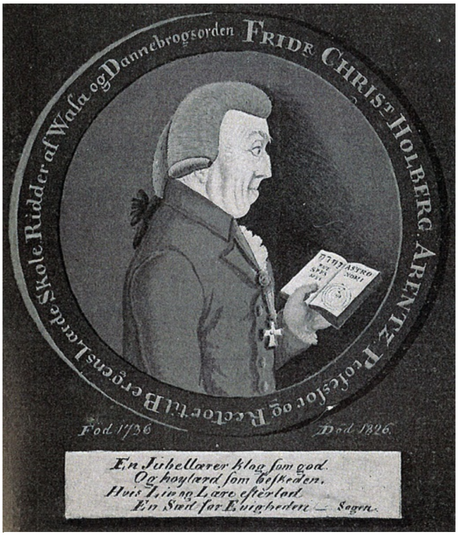
Frederich Arentz
Undersøgning, hvorledes man paa den korteste Maade kan opløse saadanne Æqvationer, som inneholde flere eller mange ubekiendte Størrelser tillige
DKNVS Skrifter 1788[1]

Olav Njåstad
Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet

Frederich Christian Holberg Arentz var fødd i Askvoll i 1736. Faren var sokneprest i Askvoll i 31 år og vart deretter biskop i Bergen. Mor hans var brordotter av Ludvig Holberg. Med vegleiing av faren las han teologi som sjølvstudium, og tok embetseksamen ved Universitetet i København i 1756 med beste karakter. Deretter studerte han filosofi og matematikk i København i to år. Han fekk tilbod om å vera med som matematikar på ein ekspedisjon til Arabia som Fredrik V planla å senda av garde. Fleire av dei andre deltakarane skulle studera i Göttingen i to år som førebuing til reisa. Derfor drog også Arentz til eit utanlandsk universitet, i hans tilfelle i Leiden. Der studerte han fysikk og matematikk, først og fremst under fysikaren Musschenbroek, som i si tid sjølv hadde vore elev av Newton.

Heimkomen frå Leiden i 1760 vart han utan søknad konstituert som lektor ved Seminarium Frederikianum i Bergen. Denne institusjonen var oppretta i 1750 som eit slag høgre realskule, der elevar ved Bergen Katedralskole vart underviste i fag som ikkje stod på katedralskulens timeplan. Dermed gav han opp å reisa til Arabia, og slo seg frå då av ned i Bergen. I 1762 vart han utnemnd til

[1] DKNVS Skrifter 1788, artikkel nr. IX, s. 251-286.



Fr. Chr. Holberg Arentz

lektor ved seminaret, og denne stillinga hadde han i 20 år. I 1769 vart han også konrektor ved katedralskulen, og i 1781 vart han rektor same stad. Han fungerte som rektor til 1825, då han var nesten 89 år. Han døydde seinare same året.

Arentz var ein framståande lærar i alle dei faga han underviste i. Blant desse var matematikk hans yndlingsfag. Jamvel «umatematiske individer» fekk han til å interessera seg for og forstå matematikk. Lærargjerninga hans spende over eit langt og interessant tidsrom i katedralskulens og Noregs historie. Ei lang rad av namn som seinare skulle gjera seg gjeldande i politisk, religiøst og kulturelt liv sat under Arentz' kateter. Blant desse var forfattaren Claus Fasting, diktarpresten Jens Zetlitz, biskop Peder Olivarius Bugge, stiftamtmann og stortingspresident Wilhelm Frimann Koren Christie, presten og Eidsvollmannen Nicolai Wergeland, teologen og zoologen Michael Sars, statsminister Frederik Stang og diktaren Johan Sebastian Welhaven.

Arentz dreiv lærde studiar innan høgst ulike fagområde: teologi, klassisk filologi, hebraisk, historie, filosofi, fysikk, astronomi og ikkje minst matematikk. Han tok magistergraden i 1773. Året etter vart han innvald i DKNVS og året deretter att i vitskapsselskapet i København. Han vart utnemnd til titulær professor i 1806. Hans to første vitskaplege arbeid er trykte i vitskapsselskapets skrifter i København i 1777: «*Friktionen i den cirkulære Bevegelse*» og «*Observationer over Regnens Mængde i Bergen med nogle derhos føyede Anmerkninger*». Hans første arbeid i DKNVS Skrifter var: «*Forslag til en almindeligere og kortere Maade at forfatte og prøve Fornuftsslutninger*».

Arentz publiserte to arbeid av matematisk karakter i vitskapsselskapets skrifter i København. I *DKNVS Skrifter* publiserte han tre matematiske avhandlingar. Den første, frå 1788, skal vi koma tilbake til. Dei to andre, «*Om de ubestemte algebraiske Æqvationer*» og «*Forsøg til en med mathematisk Nøyaktighed fremsat Theorie om parallele Linjer og deres Egenskaber*» kom ut i *Skrifter* for 1824-1827. Dei kan ikkje seiast å ha stor interesse i dag. Det kan vera verdt å merka at i det same volumet av *Skrifter* der den 88 år gamle Arentz publiserte desse avhandlingane, publiserte også den unge Niels Henrik Abel eit arbeid, «*Et lidet Bidrag til Læren om adskillige transcendente Functioner*».

Arentz' avhandling frå 1788 har tittel «*Undersøgning, hvorledes man på den korteste Maade kan opløse saadanne Æqvationer, som indeholde flere eller mange ubekiendte Størrelser tillige*». Før vi går inn på arbeidet skal vi sjå litt på den matematiske bakgrunnen. Gabriel Cramer, som var professor i Geneve, gav i 1750 ut eit verk på 650 sider, «*Introduction à l'Analyse des Lignes courbes algébriques*». I eit tre siders tillegg formulerte han, med bruk av determinantar, det som i dag blir kalla *Cramers regel* for løysing av lineære likningssystem med like mange likningar som ukjende. (Allereide Leibnitz omtala metoden i eit brev til de l'Hospital i 1693, men brevet vart offentleggjort først i 1850. Ein merknad av Leibnitz *i Acta Eruditorum* i 1700 fekk heller ingenting å seia for den vidare utviklinga.) Ute i Europa vart Cramers metode snart kjend, og matematikarar som Bézout, Vandermonde, Laplace og Lagrange gav nye bidrag til likningsteorien og determinantomgrepet.

Arentz' metode svarar til Cramers framgangsmåte, men utan eksplisitt determinantnotasjon. Arbeidet var originalt frå Arentz' side. I den isolerte situasjonen han var i, kjende han ikkje til Cramers verk eller nokon av dei seinare arbeida som handsama dei problema det gjeld. I paragraf 1 av avhandlinga skreiv han: «s*aasom jeg hverken hos en Wolf, Clairaut, Euler, Sender eller andre, som mig ere forekomne, har fundet at nogen har været betenkt paa at angive nogen lettere Methode, end de sædvanlige, holdt jeg det Umagen verd at anvende nogen Undersøgning paa at udfinde en kortere Maade i at opløse dette P r o b l e m a*».

Vi skal sjå noko nærare på innhaldet i avhandlinga. Arentz brukar mange sider på å gjennomgå vanlege løysingsmetodar, vesentleg skrittvis substitusjon og skrittvis eliminasjon, og diskuterer ulemper ved desse, særleg med omsyn til talet på rekneoperasjonar som trengst. Han tek så for seg systemet

$$aA + bB + cC = m$$

$$dA + eB + fC = n$$

$$gA + hB + iC = p\ ,$$

der altså A , B, C er dei ukjende. Han brukar vanleg eliminasjon ved suksessive multiplikasjonar og subtraksjonar til først å finna C, deretter B og så A, uttrykt ved dei kjende storleikane. Han observerer at alle dei tre ukjende kan uttrykkjast som brøkar med same nevnar. Og så kjem det i paragraf 9: «*End videre merkes: 1) At i den fælles Nævner, saavelsom enhver Tæller kommer ikkun tre Bogstaver for i ethveert Led eller Facto, det er just saa mange, som der i Æqvationerne ere ubekiendte Størrelser (dog settes her forud, at Æqvationerne ere bragte til sin behørige Form,* *hvorom det i det følgende videre skal tales) . 2) I Nævneren forekommer ingen av de Størrelser, som udtrykkede den bekiendte Deel av Æqvationerne; det er at sige, hverken m, n eller p, derimot komme her alle de ukiendte Størrelsers Coeffisienter for paa en ordentlig Maade, hver lige mange Gange med afvexlende Tegn. 3) I hver Tæller derimod forekommer alle de bekiendte Størrelser, som udgiorde den bekiendte Deel Æqvationer i samme Orden, som de øvrige Coeffisienter af de ubekiendte; men i det Sted udelukkes alle de Coefficienter, som har multipliceret just den ubekiendte Størrelse, hvis Værdi søges.»*

For å få meir systematiske oppsett fører han inn ein meir tenleg notasjon, slik at likningssystemet får forma

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C = M_1$$

$$a_2 A + b_2 B + c_2 C = M_2$$

$$a_3 A + b_3 B + c_3 C = M_3 .$$

(Arentz brukar eigentleg ein for formålet greiare notasjon, med indeksar rett *under* dei bokstavane det gjeld, i staden for subscript.) Av dei formlane han har kome fram til vert då den felles nevnaren $a_1 b_3 c_2 - a_1 b_2 c_3 + a_2 b_1 c_3 - a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1 - a_2 b_3 c_1$, teljaren i A vert $M_1 b_3 c_2 - M_1 b_2 c_3 + M_2 b_1 c_3 - M_3 b_1 c_2 + M_3 b_2 c_1 - M_2 b_3 c_1$, og tilsvarande for B og C. Deretter skriv han i paragraf 12 : *«Jeg vil ikke opholde Læseren med at anstille Betraktninger over flere Exempler, hvor der skulde forekomme flere ubekiendte Størrelser; thi enhver, som vilde giøre Forsøg at udføre disse vidløftige Regninger, skulde dog altid befinde, som og af Sagens Beskaffenhed er noksom klart, at de Regler, vi have udledet af dette ene Exempel, ere almindelige, naar kun Æqvationerne have samme Form.»*

Arentz set opp tabellar for systematisk utrekning for n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 ukjende. Berre nevnaren er sett opp eksplisitt, men ut frå hans generelle regel fylgjer då forma av teljarane utan vidare. For n=3 ser tabellen slik ut:

$$\begin{array}{cccc} & a.b.c & & a.b.c \\ + & 3.2.1 & - & 3.1.2 \\ - & 2.3.1 & + & 1.3.2 \\ + & 2.1.3 & - & 1.2.3 \end{array}$$

Dette skal altså lesast som uttrykket for den felles nevnaren som er skrive opp ovanfor, med ei noko anna rekkjefylgje av ledda. Det vert generelt n! = n×(n−1)×……×2×1 ledd i uttrykket for nevnarenn og for kvar av teljarane når systemet har n likningar med n ukjende. For n=6 er n!= 720, og tabellen hjå Arentz går over fem sider. Vi får såleis stadfesta at determinantnotasjonen som vi er vande med er praktisk, og også at Cramers (og Arentz') regel generelt ikkje er brukeleg til praktisk utrekning av løysingar.

Referansar

Ole Peder Arvesen: «*Frederich Christian Holberg Arentz*. Tale på Høytidsdagen 26. Februar 1940», DKNVS Forhandlinger 1940.
Viggo Brun: «Regnekunsten I det gamle Norge», Universitetsforlaget 1962.

Abstract

Frederich Christian Holberg Arentz was born in 1736 and died in 1825. He graduated in theology at the University of Copenhagen in 1756, and then studied philosophy and mathematics at the University of Copenhagen, and physics and mathematics in Leiden. From 1760 to 1825 he was a high school teacher and from 1781 rector of the Cathedral School in Bergen. He became a remarkably learned person in several diciplines, and he was awarded a titular professorship in 1806. He was elected a member of DKNVS in 1774.

Arentz published three mathematical treatises in *DKNVS Skrifter,* one in 1788 and the other two in the volume for 1824−1827. These last two are of little interest today. The first one has in English translation the title «*Investigation on how one in the shortest manner can solve such equations, which contain several or many unknown quantities*». Here Arentz developes independently of earlier authors a method equivalent to Cramer's rule for solution of systems of equations, without explicit determinant notation. He constructs tables for calculation of the denominators of the solutions of n equations with n unknown variables, for n =1,2,3,4,5,6. (The numerators then follow by the stated rule.) Since there are n! terms in each denominator, there are 720 terms when n=6, and the corresponding table covers five pages in the treatise.