DET KGL. NORSKE VIDENSKABERS SELSKABS SKRIFTER. 1896. No. 6.

EIN THEOREM

ÜBER DIE

REGELFLÄCHEN

VON

AXEL THUE.

AKTIETRYKKERIET I TRONDHJEM.
1897

Ein Theorem über die Regelflächen

von

Axel Thue.

Auf zwei beliebigen — in den parallelen Ebenen A und B gezogenen — ebenen Kurven a und b bewegt sich eine Gerade, die A und B respective in den Punkten n und m schneidet.

Ist p ein Punkt auf nm, so beschaffen dass $4pn = nm$ und ferner q die Projektion von p auf der Ebene A, dann hängt das von dem Dreiecke pqn beschriebene Volumen nur von den Endstellungen der Geraden nm ab.

Um dieses Theorem zu beweisen werden wir zuerst annehmen, dass die zwei Kurven a und b zwei Geraden sind.

In dem gewöhnlichen Koordinatensysteme wählen wir a zur Y Axe, A zur XY Ebene und die Senkrechte auf a und b zur Z Axe. Es sei k der Abstand und φ der Winkel zwischen a und b.

Bezeichnen wir ferner die wariablen Abstände von n und m bis zur Z Axe respektive mit α und β, so werden die Gleichungen der Geraden nm:

$$y = \frac{\beta \cos \varphi - \alpha}{\beta \sin \varphi} x + \alpha$$

$$z = \frac{k x}{\beta \sin \varphi}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man für konstantes x

$$dy = \frac{\alpha \, d\beta - \beta \, d\alpha}{\beta^2 \sin \varphi} x + d\alpha$$

Der Inhalt I unseres Körpers wird also

$$k \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{0}^{\frac{3 \sin \varphi}{4} \beta} \left(\frac{\alpha \, d\beta - \beta \, d\alpha}{\beta^3 \sin^2 \varphi} x^2 + \frac{d\alpha}{\beta \sin \varphi} x \right) dx$$

wo α_1 und α_2 die Endstellungen der Geraden nm angeben

Führen wir die Integration aus, so erhält man

$$\mathrm{I} = (\tfrac{3}{8})^2 \sin \varphi \, k \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha \, d\beta + \beta \, d\alpha =$$

$$(\tfrac{3}{8})^2 \sin \varphi \, k \, [\alpha_2 \, \beta_2 - \alpha_1 \, \beta_1]$$

wo β_1 und β_2 die zu α_1 und α_2 gehörigen Werthe von β bezeichnen.

Der specielle Satz ist somit berwiesen. Interessant ist der Fall, wo $\alpha_2 \, \beta_2 = \alpha_1 \, \beta_1$ aber damit wollen wir uns nicht beschäftigen.

Es sei jetzt vorausgesetzt, das unser Theorem richtig ist für die zwei Kurvenpaare PQ, ST und QR, ST, welche beide in denselben zwei parallelen Ebenen A und B gezogen sind. Wir wollen zeigen, dass der Satz auch richtig bleibt für das neue Kurvenpaar PQR, ST, wo die erste Kurve PQR aus den zwei Bögen PQ und QR zusammengesetzt ist. P, Q, R, S, T sind Punkte auf ihren respectiven Kurven.

Durch das Kurvenpaar PQR, ST und zwei beliebige Generatricen PS und RT konstruiren wir zwei willkührliche Regelflächen L_1 und L_2. Wir wollen beweisen, dass die Volumina U_1 und U_2 ihrer entsprechenden Körper einander gleich sind. Es sei QQ_1 eine Generatrice von L_1 und QQ_2 eine Generatrice von L_2, wo Q_1 und Q_2 zwei Punkte auf ST sind.

Wir konstruiren eine dritte Regelfläche L_3, die mit L_1 das Stück $PQSQ_1$ und mit L_3 das Stück $RQTQ_2$ gemein hat.

Wenn nun L_3 die Kegelfläche $Q_1 QQ_2$ mit der Spitze Q auch enthält, so sieht man leicht dass.

$$U_1 = U_3 = U_2$$

wo U_3 das zu L_3 gehörige Volumen bedeutet.

Durch diese Betrachtung, die sehr verallgemeinert werden kann, ist also unsere allgemeine Behauptung bewiesen.

Wir können diese auch ganz direct erledigen.

Es seien $y = \psi(x), \qquad z = o$

die Gleichungen der Kurve a und

$$y = \varphi(x), \qquad z = k$$

die Gleichungen der Kurve b.

Die Gleichungen der Geraden um werden dann:

$$y = \frac{\psi(\alpha) - \varphi(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \alpha) + \psi(\alpha)$$

$$z = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} k$$

wenn α und β respektive die Abstände von den Punkten n und m bis zur YZ Ebene bedeuten.

Weiter hat man

$$dy = \frac{[(\alpha-\beta)\psi' + \varphi - \psi]\,d\alpha + [(\beta-\alpha)\varphi' + \psi - \varphi]\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}(x-\alpha) + \left(\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta} + \psi'\right)d\alpha$$

Setzen wir $x - \alpha = u$

so bekommt man für das gesuchte Volumen

$$k\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{o}^{\frac{3}{4}(\beta-\alpha)}\left(\frac{[(\alpha-\beta)\psi'+\varphi-\psi]\,d\alpha+[(\beta-\alpha)\,\varphi'+\psi-\varphi]\,d\beta}{(\alpha-\beta)^3}u^2+\left(\frac{(\varphi-\psi)d\alpha}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{\psi'\,d\alpha}{(\alpha-\beta)}\right)u\right)du$$

$$= (\tfrac{3}{8})^2\, k\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}[\varphi - \psi + (\alpha - \psi)\,\psi']\,d\alpha + [\varphi - \psi + (\alpha - \beta)\,\varphi']\,d\beta$$

Man sieht gleich, dass die zu integrirende Grösse ein vollständiges Differential ist.

Das Volumen wird gleich

$$(\tfrac{3}{8})^2\, k \left\{ \Big| \big((\varphi(\beta) + \psi(\alpha)\big)(\alpha - \beta) \Big|_1^2 + 2 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \varphi(\beta)\, d\beta - 2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha)\, d\alpha \right\}$$

und hängt nur von den Endstellungen der Geraden nm ab.

Das gefundene Resultat läszt sich auch weiter ausdehnen, aber die Erweiterung hat weniger Interesse. Das Theorem scheint indessen ziemlich isolirt zu stehen.