Kåre P. Hagen

# Verdsetting av fremtiden. Tidshorisont og diskonteringsrenter

Concept rapport Nr 27

NTNU
Det skapende universitet

concept

Kåre P. Hagen

# Verdsetting av fremtiden. Tidshorisont og diskonteringsrenter

Concept rapport Nr 27

Concept rapport nr. 27

**Verdsetting av fremtiden. Tidshorisont og diskonteringsrenter**

Kåre P. Hagen

ISSN: 0803-9763 (papirversjon)
ISSN: 0804-5585 (nettversjon)
ISBN: 978-82-92506-93-6 (papirversjon)
ISBN: 978-82-92506-94-3 (nettversjon)

Sammendrag: I denne rapporten diskuteres diskonteringsrentens tidsstruktur i nytte-kostnadsanalyser ut fra ulike teoretiske tilnærminger. Dette er særlig relevant ved langsiktige investeringer, eksempelvis i transportinfrastruktur eller miljøtiltak. I noen tilfelle kan det argumenteres for å benytte en fallende diskonteringsrente over tid, i kontrast til gjeldende praksis i Norge og mange andre land. Dette gjelder uavhengig av beslutningstakers preferanser, og trenger derfor ikke nødvendigvis å skyldes hyperbolske tidspreferanser som kan lede til tidsinkonsistent planlegging.

Dato: 27.09.2011

Utgiver: Concept-programmet
Fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi
Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet
Høgskoleringen 7A
7491 NTNU – Trondheim

Tel. 73594640
Fax. 73597021
http://www.concept.ntnu.no

# Forord

Ved analyse av investeringsprosjekter har vi behov for å sammenstille virkninger som inntrer på ulike tidspunkter i prosjektets levetid. Til dette benyttes en diskonteringsrente som kan tolkes som prosjektets avkastningskrav. Gjeldende praksis ved nytte-kostnadsanalyser i Norge og mange andre land er å benytte såkalt eksponensiell diskontering med konstant, risikojustert rente over hele prosjektets levetid. Mange har påpekt dette som problematisk og hevdet at det neppe er i samsvar med reell utvikling i risikoen for de fleste prosjekter. Det har også fordelingsmessige konsekvenser ved at virkninger for fremtidige generasjoner tillegges liten vekt.

Denne studien går nærmere inn på ulike teoretiske forklaringsmodeller for diskonteringsrenten og ser på hva disse kan si om utviklingen i diskonteringsrenten over tid. Det er ofte vanlig å forbinde fallende diskonteringsrente med tidsinkonsistente eller såkalte hyperbolske preferanser. I denne rapporten argumenteres imidlertid for at fallende diskonteringsrente også er i samsvar med tidskonsistent planlegging. Både en konsumbasert Ramsey-modell og en alternativkonstnadsbasert rentemodell kan benyttes til å forklare at diskonteringsrenten følger en fallende profil over tid.

Studien er gjennomført av Kåre P. Hagen, professor emeritus i samfunnsøkonomi ved Norges Handelshøyskole, som også har skrevet rapporten. Forfatteren vil takke Gro Holst Volden for gode kommentarer og innspill til et tidligere utkast.

Trondheim, september 2011

Knut Samset,

Programleder, Concept-programmet, NTNU

# Innhold


Sammendrag ........ 4

Summary ........ 6

1. Innledning ........ 8
   - 1.1. Hvorfor diskontering? ........ 8
   - 1.2. Rapportens innhold ........ 10

2 Nåverdi og internrente som lønnsomhetskriterier ........ 12

3. Kapitalverdimodellen som utgangspunkt for risikovurdering og diskontering ........ 16

4. Eksponensiell diskontering med konstant diskonteringsrente og samfunnsøkonomisk lønnsomhet ........ 20

5. Optimale konsumbaserte diskonteringsrenter for langsiktige prosjekter under sikkerhet ........ 26

6. Optimale diskonteringsrenter for langsiktige prosjekter under usikre rammebetingelser ........ 29
   - 6.1. En konsumbasert optimal tidsstruktur for langsiktig diskonteringsrente ........ 29
   - 6.2. Konsumbaserte avkastningskrav: Håndtering av prosjektspesifikk risiko ........ 32

7. En rentebasert optimal tidsstruktur for diskonteringsrenter ........ 36
   - 7.1. Rentebaserte avkastningskrav: Håndtering av prosjektspesifikk risiko ........ 39

8. Fallende diskonteringsrenter og dynamisk konsistens ........ 41

9. Hyperbolsk diskontering og intertemporale preferanser ........ 42

10. Konkluderende merknader ........ 47

Appendiks ........ 48
   - Appendiks I ........ 48
   - Appendiks II ........ 49

# Sammendrag

I nytte-kostnadsanalyser av investeringsprosjekter har vi behov for å sammenstille og veie sammen virkninger som kommer på ulike tidspunkter. Dette gjøres ved å diskontere fremtidige verdier til nåverdi der diskonteringsrenten er gitt ved avkastningskravet til investeringen. Avkastningskravet skal reflektere den avkastningen kapitalen som bindes i investeringen, kunne ha oppnådd i beste alternative anvendelse. Normal praksis har vært å anvende en konstant risikojustert rente uavhengig av prosjektets levetid, såkalt eksponensiell diskontering. Dette innebærer at virkninger som kommer langt frem i tid kan få svært liten betydning. For eksempel betyr det uunngåelig at f.eks. miljøtiltak og jernbaneprosjekter, som krever store initiale investeringer og som typisk gir nytte på lang sikt, kan komme relativt dårlig ut. Dette har blitt påpekt som problematisk, både ut fra et etisk perspektiv (hensynet til senere generasjoner) og ut fra en vurdering av hvordan risikoen reelt utvikler seg over tid sett fra investeringstidspunktet.

I denne studien gjennomgås ulike teoretiske tilnærminger for å forklare den optimale diskonteringsrentens tidsprofil, og vi ser spesielt på forhold som kan tilsi at renten *faller over tid* sett fra investeringstidspunktet. Optimalt valg av diskonteringsrente påvirkes både av:

- Den makroøkonomiske utviklingen over tid og usikkerhet knyttet til denne
- Usikkerhet om prosjektets eget bidrag til fremtidig velstand.
- Beslutningstakernes preferanser

Det fokuseres i denne rapporten primært på usikkerhet knyttet til den fremtidige makroøkonomiske utviklingen, altså forhold som er uavhengig av prosjektets egen risikoprofil. Bruken av en konstant diskonteringsrente hviler blant annet på forutsetningen om en stasjonær velstandsutvikling over tid slik at konsum og befolkning vokser i samme takt. En forventning om fortsatt vekst i konsumet pr capita tilsier at nåværende generasjon ikke trenger å spare så mye til fordel for senere generasjoner, fordi de sistnevnte uansett blir rikere enn oss. Dette impliserer isolert sett et avkastningskrav som øker over tid. Dersom det derimot er grunn til å forvente at *velstandsveksten vil avta*, for eksempel grunnet ressursmessige begrensninger i forhold til befolkningsveksten, bør diskonteringsrenten være fallende over tid.

En investering kan enten finansieres ved utsatt konsum eller ved omkanalisering av midler fra andre investeringsformål. I det førstnevnte tilfellet er diskonteringsrenten gitt ved konsumentens avkastningskrav, og i det sistnevnte tilfellet ved den rentebaserte alternativavkastningen. Utredningen påviser at uansett om en legger et konsumbasert eller rentebasert alternativavkastningsbegrep til grunn, vil *økende usikkerhet med hensyn til fremtidig*

*konsum eller avkastning* være et selvstendig argument for fallende diskonteringsrente over tid. En klassisk tilnærming er Ramsey-modellen som legger til grunn at investeringen dekkes ved redusert konsum på investeringstidspunktet. Konsumentene vil kreve en kompensasjon for å utsette konsumet. Det kan da utledes at voksende usikkerhet over tid med hensyn til konsumutviklingen trekker i retning av en fallende diskonteringsrente. Sparingen er her dels motivert ut fra muligheten for en ugunstig velstandsutvikling i fremtiden slik at den har karakter av forsiktighetsmotivert sparing. I en rentebasert modell legges det til grunn at investeringen fortrenger andre rentebærende plasseringer, og avkastningskravet gis da ved alternativavkastningen i finansmarkedet. Også her kan det utledes en fallende tidsstruktur for renten, når fremtidige markedsrenter er usikre og det er noen grad av seriekorrelasjon i renteutviklingen over tid. Dette innebærer at renteusikkerheten vokser over tid sett fra investeringstidspunktet. Dette gjelder selv om prosjektavkastningen i seg selv er risikofri.

Rapporten kommer mot slutten inn på en annen mulig årsak til fallende rentebane, nemlig tilfellet hvor beslutningstakerne har *tidsbetingede (hyperbolske) preferanser*. Dette innebærer at tidspreferansene endrer seg over tid slik at en har sterkere preferanser for fremskyndet konsum på kort enn på lang sikt. En kan f.eks. foretrekke ett eple i dag fremfor to i morgen, men vil likevel foretrekke to epler om ti dager fremfor ett eple om ni dager. Problemet med hyperbolske preferanser er at de kan føre til investeringsbeslutninger som er inkonsistente over tid. Dette kan også forklare at langsiktige intensjoner ofte ikke gir seg utslag i kortsiktig handling (jf. også fra dagliglivet; jeg skal slutte å røyke, men ikke i dag).

Fallende diskonteringsrente over tid forbindes ofte med nettopp hyperbolske preferanser. Et viktig poeng i denne studien har vært å påvise at fallende rente også kan begrunnes ved den makroøkonomiske utviklingen og at det dermed ikke trenger å føre til inkonsistente beslutninger.

# Summary

When performing a cost-benefit analysis of investment projects, it is necessary to compare and evaluate the consequences that occur at different points in time. The normal procedure is to transform estimated future values to present values by using a discount rate. The discount rate is interpreted as the required rate of return reflecting what could obtained if the capital was put to the best alternative use. Traditionally, a constant risk-adjusted rate of return has been used, independent of the project's time horizon (exponential discounting). This implies that costs and benefits that occur far into the future will have little impact today. For example, environmental efforts and railway infrastructure projects that involve large costs up-front and for which benefits only occur in the long run, will inevitably experience difficulties in achieving a positive net present value. This has been seen as problematic, both from an ethical point of view, bearing in mind future generations, and from an investment point of view, based on considerations of how such risks actually develop.

In this study we examine different theoretical models that explain the optimal time profile for the discount rate, and especially we look at factors that may lead to a decreasing discount rate. The optimal level of the discount rate is influenced by the following factors:

- The macroeconomic development over time and uncertainty related to it
- Uncertainty about the project's own contribution to future wealth
- Decision-makers' preferences.

We focus primarily on uncertainty related to future macroeconomic development, factors that are independent of the project's own risk profile. The use of a constant rate of return rests on the assumption that growth in welfare (consumption per capita) remains at the same rate, implying that consumption and population increase at the same rate. An expectation of steady *growth* in consumption per capita over time should imply that the discount rate increases over time, given that there is little need to save for future generations because each generation will be richer. If, on the other hand, there is reason to believe that *the growth in wealth will decrease*, for example due to resource limitations relative to population growth, the discount rate should decrease over time.

An investment can either be financed by postponing consumption or by renouncing other investment alternatives. In the former case, the discount rate is determined by the consumer's required rate of return, while in the latter case it is determined by the alternative rate of return in the financial market. We show that in both approaches,

*increasing uncertainty (with respect to future consumption or the market's rate of return)* leads to a decreasing optimal discount rate over time. The classical Ramsey model assumes that investment is financed by postponing consumption. Consumers will claim compensation for postponed consumption. It can be deduced that increasing uncertainty with respect to future consumption growth implies a decreasing discount rate. This may be interpreted as precautionary saving. Other models explain the discount rate by the alternative rate of return in the financial market.  In these models as well, a decreasing time profile for the discount rate may be derived when future rates of return in the market are uncertain and there is some serial correlation over time. This outcome will hold even when the project's own rate of return is certain.

Towards the end of the report we also discuss another possible explanation for decreasing discount rates, namely when *decision-makers have time-dependent (hyperbolic) preferences*. This means that their time preferences change over time and that postponing benefits is worse in the short run than in the long run. For example, people may prefer to have one apple today rather than two apples tomorrow, but they still prefer two apples in ten days' time to one apple in nine days' time. The problem with hyperbolic preferences is that they may lead to investment decisions that are inconsistent over time. This may explain why good intentions in the long run often do not materialize as concrete efforts in the short run. This can be shown by another example taken from everyday life: 'I will stop smoking one day, but not today'.

Decreasing discount rates over time is often seen as a symptom of hyperbolic preferences. An important aim of this study, however, is to show that decreasing discount rates may also be explained by factors related to macroeconomic development and that this does not necessarily lead to inconsistent decisions.

# 1. Innledning

## 1.1. Hvorfor diskontering?

Verdsetting av og valg mellom økonomiske størrelser som inntreffer på ulike tidspunkt er en viktig problemstilling både i det økonomiske liv og i folks privatliv. Viktige problemstillinger innenfor privatsfæren er hvor mye en skal investere i utdanning, og hvor mye bør en spare med sikte på pensjonsalderen. I valget mellom konsum nå eller senere vil folk flest - alt annet likt - foretrekke konsum nå. Tiden har dermed i seg selv en pris. I den sammenheng står diskonteringsbegrepet sentralt. Diskonteringsfaktoren er en omregningsfaktor for å uttrykke økonomiske størrelser på ulike tidspunkter i samme verdienhet. Mer presist muliggjør diskontering sammenligning av økonomiske virkninger som oppstår på ulike tidspunkt ved å regne fremtidige verdier om i kontantekvivalenter vurdert i pengeverdien på et bestemt tidspunkt. Vanligvis velges dagens verdi som verdienhet. Den kontantekvivalente verdien kalles da nåverdi. Prisendringer over tid kan skyldes at reelle prisforhold endrer seg, men det kan også skyldes inflasjon som betyr at den pengeverdien – eller kjøpekraften - som varepriser og verdier måles i, reduseres over tid. I investeringsanalyser løses problemet med endret pengeverdi ved at inntekter og kostnader måles i ett bestemt års kroneverdi (basisårets kroneverdi). I det følgende vil vi se bort fra inflasjon og fokusere på realpriser og realrenter.

Rentebegrepet kan tolkes subjektivt som et avkastningskrav i form av økonomisk kompensasjon pr krone investert som kreves for at en vil være villig til å avstå fra konsum nå mot å få et høyere konsum en periode senere. Det kan alternativt tolkes som en markeds-bestemt alternativkostnad ved at det er det merbeløp en ville ha hatt etter en periode ved å plassere en krone i banken eller i annen rentebærende plassering i stedet for å konsumere den nå. Individets konsum- og spareprofil er optimal når individets subjektive avkastningskrav er lik alternativkostnaden til konsum. Med en inflasjonskorrigert rente (realrente) på 3 % pr år vil et konsum på 100 kroner i dag koste 103 kroner målt i beløpets reelle kjøpekraft om ett år. Det er det inflasjonskorrigerte beløpet en ville ha hatt om ett år om pengene i stedet hadde blitt plassert rentebærende til en realrente på 3 %.

Investeringsanalyse tar sikte på å finne den mest lønnsomme investeringen blant flere mulige. For å avgjøre dette trengs et sammenligningsgrunnlag eller en referanseinvestering å sammenligne lønnsomheten mot. Sammenligningsgrunnlaget er vanligvis å investere kapitalbeløpet i finansmarkedet i en plassering med sammenlignbar risiko. I så fall blir avkastningen i finansmarkedet alternativkostnaden ved å binde kapitalen i prosjektet. Investeringen er lønnsom om den gir en høyere avkastning enn alternativavkastningen. Positiv nåverdi kalkulert med alternativavkastningen som diskonteringsrente betyr at kapitalens gjennomsnittsavkastning i investeringsprosjektet er høyere enn avkastningen i det beste alternativet når denne benyttes som diskonteringsrente.

En investering er normalt karakterisert ved en betalingsstrøm eller verdien av en tjenestestrøm fratrukket nødvendige kostnader over investeringens levetid. Normalt vil den innebære et initialt offer eller kontantutlegg med en etterfølgende serie av realisert netto nytte eller kontantoverskudd. Over levetiden kan det også være nødvendig med reinvesteringer for at prosjektet en har investert i skal kunne fungere optimalt. Begrepet nåverdi henspeiler på at en refererer kontantverdien av investeringen til initialtidspunktet for investeringen. Men lønnsomhetsrangeringen av investeringene ville ikke blitt endret om en hadde valgt et annet referansetidspunkt. Om vi antar at $NV_0$ er nåverdien relatert til tidspunktet 0 for investeringen med en kontantstrøm diskontert med en konstant diskonteringsrente *r*, så ville kontantverdien definert ved et alternativt referansetidspunkt *t* være $[NV_0](1+r)^t$. Det er klart at når nåverdiene multipliseres med en felles faktor, vil lønnsomhetsrangeringen være den samme på tidspunkt *t* som på initialtidspunktet 0. I stedet for nåverdier kunne en også ha regnet lønnsomhet i form av sluttverdier. Sluttverdien på tidspunkt *T* ville da være det beløp en ville ha sittet med om kontantstrømmen eller verdiskapingen fra prosjektet hadde blitt løpende plassert til en rente lik diskonteringsrenten. Nåverdien blir da den neddiskonterte verdien av sluttverdien.

I et perfekt kapitalmarked uten usikkerhet vil markedsverdien $V_t$ på et bestemt tidspunkt *t* av en investering med en gitt kontantstrøm være gitt ved nåverdien av kontantstrømmen på tidspunkt *t* med markedsrenten som diskonteringsrente. Om markedsverdien av prosjektet var forskjellig fra nåverdien, ville det gitt muligheter for arbitrasjegevinster[1]. Hvis for eksempel markedsverdien av et investeringsobjekt er lavere enn nåverdien av dets kontantstrøm, $V_t < NV_t$, vil en gjøre en gevinst ved å kjøpe objektet til markedsverdi og finansiere kjøpet med lån til markedsrenten (= diskonteringsrenten). Om $V_t > NV_t$, vil en gjøre en gevinst ved å selge objektet og investere salgsbeløpet til markedsrenten. Mer generelt vil det foreligge potensielle arbitrasjegevinster dersom ett og samme objekt verdsettes til forskjellig pris i markedet. Dersom $V_t < NV_t$, ville for eksempel verdien for kjøper, $NV_t$ være høyere enn verdien for selgeren, $V_t$. Fravær av arbitrasjegevinster vil være en nødvendig betingelse for likevekt i et perfekt finansmarked. Dette krever at økonomisk identiske objekter blir priset likt i markedet. Dette blir ofte referert til som *loven om en pris*. Dette er da å oppfatte som en likevektsbetingelse[2].

1 En arbitrasjegevinst er en gevinst som kan realiseres kostnads- og risikofritt.

2 Lønnsomheten av en investering kan imidlertid bli vurdert forskjellig på de to sidene av markedet på grunn av markedsimperfeksjoner. Det kan for eksempel skyldes informasjonsasymmetrier i form av ulik informasjon på kjøper- og selgersiden om fremtidig lønnsomhet, eller at kjøper og selger står overfor ulike renter etter skatt på grunn av skattesystemet.

Lønnsomheten av prosjekter som har en viss varighet ved at de strekker seg utover flere perioder, måles enten ved den gjennomsnittlige kapitalavkastningen (internrenten), eller ved nåverdien. Prosjektet er lønnsomt dersom den gjennomsnittlige kapitalavkastningen er minst like stor som kapitalens alternativavkastning, eller som er ekvivalent med dette, hvis dets nåverdi er positiv[3].

Eksponensiell diskontering betyr at diskonteringsfaktoren som regner om fremtidige verdistørrelser til nåverdi, har formen $(1+r)^{-t}$ eller $e^{-rt}$ avhengig av om en regner i diskret eller kontinuerlig tid. Betegnelsen brukes vanligvis om det tilfellet at det benyttes en konstant diskonteringsrente over tid. Men den eksponensielle formen på diskonteringsfaktoren gjelder også med varierende renter over tid.
Det har vært vanlig å ta høyde for økonomisk risiko knyttet til prosjektet ved å øke avkastningskravet med en risikokomponent. Dette betyr et risikotillegg i diskonteringsrenten for å kompensere for risiko. Med konstant diskonteringsrente kan det føre til at nåverdien av økonomiske størrelser som ligger langt frem i tid blir svært liten og denne problemstillingen forsterkes ved bruk av et konstant risikotillegg. Dette kan være problematisk i et langsiktig generasjonsperspektiv.

## 1.2. Rapportens innhold

I denne utredningen vil vi diskutere forhold som gjør at den optimale diskonteringsrenten for et prosjekt vil falle over tid innenfor prosjektets tidshorisont. Det innebærer at kostnadene ved å binde kapital i prosjektet er lavere for langsiktige prosjekter enn for kortsiktige. Det innledes i kapittel 2 med en diskusjon om sammenhengen mellom nåverdi og internrenter som lønnsomhetskriteringer for investeringer. Dernest redegjør vi i kapittel 3 for kapitalverdimodellen (CAPM) som har vært det mest vanlige metodiske grunnlag for lønnsomhetsvurdering av investeringsprosjekter. Ved denne tilnærmingen ivaretas usikkerhet knyttet til prosjektets lønnsomhet ved et tillegg i den risikofrie renten. Normalt blir det benyttet en konstant risikojustert diskonteringsrente uavhengig av tidshorisont, noe som betyr at diskonteringsfaktoren faller eksponensielt over tid. Det kan fremmes ulike innvendinger mot denne praksisen, disse presenteres i kapittel 4.

Fallende diskonteringsrenter kan skyldes usikkerhet mht prosjektets fremtidige makroøkonomiske rammebetingelser eller egenskaper ved beslutningstakernes preferanser. Det er viktig å skille mellom disse to årsakene til fallende rentekurver over tid. I det førstnevnte tilfelle skyldes det forhold som er eksogene i forhold til beslutningstakeren. I det sistnevnte tilfelle skyldes det egenskaper ved beslutningstakerens tidsbetingede (intertemporale) preferanser. Fallende diskonteringsrenter som har sin årsak

[3] Sammenhengen mellom nåverdi og internrente blir imidlertid litt mer problematisk hvis prosjektet har flere internrenter. Formelt sett inntreffer det om polynomet som definerer internrenten har flere røtter (nullpunkter).

i beslutningstakerens intertemporale preferanser, blir kalt hyperbolsk diskontering på grunn av at diskonteringsfaktoren har en hyperbellignende funksjonsform.

I dette arbeidet fokuserer vi mest på det førstnevnte tilfellet. Dette er tema i kapitlene 5, 6 og 7. Kapitalverdimodellen baserer seg på informasjon fra finansmarkedet når det gjelder prising av risiko og risikotillegg i diskonteringsrenten for prosjekter med usikker avkastning. Det kan imidlertid hevdes at aktørene i finansmarkedene fra et samfunnsperspektiv kan ha for kortsiktige interesser til å kunne være representative for dem som bærer den økonomiske risikoen ved langsiktige prosjekter. I tillegg kan markedssegmentene for langsiktige papirer være for tynne til kunne gi informasjon om prising av risiko på lang sikt. For spesielt langsiktige prosjekter kan det da være hensiktsmessig å utlede diskonteringsrenten ved mer direkte tilnærminger til kapitalkostnadsproblemet. Avhengig av hvordan vi antar at investeringene realøkonomisk sett finansieres, kan det anlegges en konsumbasert eller en rente- eller produksjonsbasert tilnærming. Ved bruk av begge disse tilnærmingene drøfter vi mer inngående hvilke økonomiske krefter som vil trekke i retning av diskonteringsrenter som faller over tid, og hvilke implikasjoner dette vil ha for lønnsomhetsvurderingen av langsiktige prosjekter. Spesielt vil det bli fokusert på usikkerhet om fremtidige makroøkonomiske forhold og den rolle det kan spille for diskonteringsrentens tidsutvikling. Kapittel 8 argumenterer for at fallende diskonteringsrente kan legges til grunn selv om beslutningstakers preferanser er tidskonsistente.

Til slutt, i kapittel 9, diskuteres implikasjoner av intertemporale preferanser som leder til hyperbolsk diskontering, og hvilken betydning dette kan ha for lønnsomhetsvurdering og dynamisk konsistent investeringsplanlegging.

Kapittel 10 presenterer konklusjonene i denne studien.

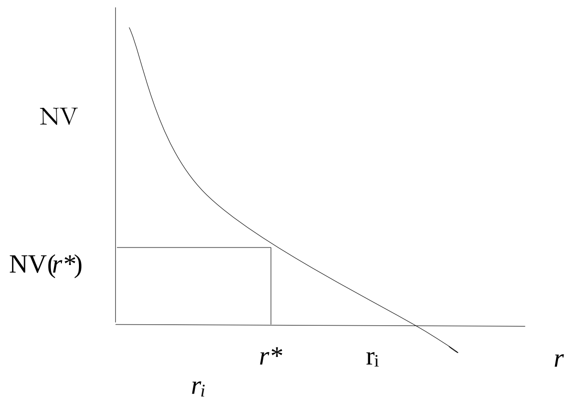
# 2 Nåverdi og internrente som lønnsomhetskriterier

Vi lar $K_0$ stå for en engangsinvestering på tidspunkt 0, og antar at prosjektet genererer årlig netto nytte eller overskudd $X_t$ på tidspunkt $t$, prosjektets levetid er $T$ perioder, og at diskonteringsrenten (alternativavkastningen) over prosjektets levetid er konstant og lik $r$. Hvis alle fremtidige størrelser er kjent med sikkerhet, er nåverdien - forutsatt diskret forrentning - gitt ved

$$(i) \quad NV_0 = -K_0 + \frac{X_1}{(1+r)} + \frac{X_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{X_T}{(1+r)^T}$$

I dette uttrykket kan vi anse en eventuell restverdi (utrangeringsverdi) av prosjektet på tidspunkt $T$ som inkludert i prosjektoverskuddet $X_T$.

Vi anskueliggjør sammenhengen mellom nåverdi, diskonteringsrente og avkastningskrav i nedenstående figur. Anta at vi har en investering der nåverdien $NV_0$ er gitt ved uttrykket (i) Den diskonteringsrenten som gir nåverdi lik null, er prosjektets internrente. Den uttrykker den gjennomsnittlige kapitalavkastningen i prosjektet. Nåverdien er normalt en fallende funksjon av diskonteringsrenten siden positive årlige overskudd normalt er dominerende. Dersom diskonteringsrenten settes lik alternativavkastningen, som er den avkastning som investert kapital kunne ha oppnådd ved beste alternative plassering, vil en nåverdi større eller lik null vise at kapitalen oppnår en avkastning i prosjektet som er minst like høy som alternativavkastningen. Dette er illustrert i figur 1. Her er NV($r^*$) nåverdien kalkulert med diskonteringsrenten $r^*$, og $r_i$ er prosjektets internrente. Vi ser at NV($r^*$) >= 0 impliserer $r_i >= r^*$. Dersom diskonteringsrenten settes lik alternativavkastningen, dvs. avkastningen i den beste alternative plassering, ser vi fra figuren at en positiv nåverdi impliserer at internrenten (kapitalavkastningen) i prosjektet, ($r_i$), er høyere enn i det beste alternativet ($r^*$)




**Figur 1** Sammenhengen mellom nåverdi og internrente

Som en oppsummering kan vi si:

- Internrenten er definert ved den diskonteringsrente som gir nåverdi lik null.
- Nåverdien er normalt en fallende funksjon av diskonteringsrenten. Jo høyere diskonteringsrente, desto lavere nåverdi.
- Hvis internrenten er $r_i$ og diskonteringsrenten $r^*$, vil nåverdien være positiv dersom $r_i > r^*$. Diskonteringsrenten uttrykker dermed avkastningskravet.

Alternativavkastningen kan variere over prosjektets tidshorisont. Hvis renten på tidspunkt $t$ er $r_t$, blir diskonteringsfaktoren (nåverdien av en krone på tidspunkt T) i diskret tid lik $\left[(1+r_1)(1+r_2)...(1+r_T)\right]^{-1}$ i stedet for $(1+r)^{-T}$ som i tilfellet med konstant rente over tid.

Med varierende renter over tid kan vi definere gjennomsnittlig, eller effektiv, diskonteringsrente $\bar{r}_T$ ved $\left[(1+r_1)(1+r_2)...(1+r_T)\right]^{-1} = (1+\bar{r}_T)^{-T}$

Effektiv rente, $\bar{r}_T$ , er da gitt ved det geometriske gjennomsnittet

$$\bar{r}_T = \left((1+r_1)(1+r_2) \;\cdots (1+r_t)\right)^{\frac{1}{T}} - 1.$$

Om f. eks. $r_1 = 0{,}02$, $r_2 = 0{,}10$, $r_3 = 0{,}15$, har vi $\bar{r}_3 = (1{,}02*1{,}10*1{,}15)^{1/3} - 1 = 8{,}87$ % mens det aritmetiske gjennomsnittet er 9 %.

Hvis vi antar kontinuerlig tid, vil nåverdien av en krone diskontert med varierende renter fra tidspunkt *T* til 0 være $e^{-\bar{r}_T T} = e^{-\sum_{t=1}^{T} r_t}$ der $\bar{r}_T$ er gjennomsnittlig rente frem til T. Ved å ta logaritmen på begge sider får vi

$$\bar{r}_T = -\frac{1}{T}\ln e^{-\sum_{i=0}^{T} r_i} = \frac{\sum_{i=0}^{T} r_i}{T}.$$

I kontinuerlig tid blir dermed gjennomsnittlig rente det aritmetiske gjennomsnittet.
Vi kan da skrive nåverdien av en krone på tidspunkt *t* som $NV = \exp(-t\bar{r}_t)$ der exp(.) er eksponensialfunksjonen og $\bar{r}_t$ er gjennomsnittlig rente per år frem til tidshorisonten t. Eksponensiell diskontering er definert ved at diskonteringsfaktoren har form av en eksponensialfunksjon[4]. Den effektive (gjennomsnittlige) renten kan være konstant eller variere med tidshorisonten avhengig av om perioderentene (spotrentene) varierer over tid eller er konstante. Av spesiell interesse for lønnsomheten av langsiktige prosjekter er forhold som fører til at den effektive renten pr år er fallende over tid. Som det vil bli vist senere i denne rapporten, kan det skyldes usikkerhet knyttet til fremtiden. Det kan enten gjelde usikkerhet om de fremtidige alternativkostnadene, eller usikkerhet vedrørende konsumnivå og grensenytte på det tidspunkt avkastningen på investeringen materialiserer seg.

En omdiskutert variant av fallende diskonteringsrenter, som ikke er forenlig med eksponensiell diskontering, er den som har sitt opphav i egenskaper ved preferansestrukturen over tid. Det blir kalt for hyperbolsk diskontering[5]. Med hyperbolsk diskontering vil diskonteringsfaktoren ikke bare avhenge av på hvilket tidspunkt beløpet realiseres i forhold til referansetidspunktet. Den vil også avhenge av hvor lenge det er til beløpet blir realisert. Det betyr at ventetiden til realiseringen av et gitt beløp vil være med på å bestemme diskonteringsrenten. Jo kortere ventetid, desto høyere vil diskonteringsfaktor og nåverdi alt annet likt være. Et prosjekt med levetid på *T* år og som er lønnsomt på tidspunkt 0, vil da ikke nødvendigvis være lønnsomt på tidspunkt $0 < \tau < T$ siden ventetiden til beløp som inntreffer etter tidspunkt $\tau$ er kortere regnet fra dette referansetidspunktet enn fra tidspunkt 0, og dette vil påvirke diskonteringsfaktoren for

4 Eksponensiell diskontering forutsetter kontinuerlig forrentning som betyr at rentesrenten legges fortløpende til beløpet ved at renteperioden blir "uendelig" liten i motsetning til diskret diskontering der rentesrenten legges til beløpet på diskrete tidspunkt, f.eks. en gang i måneden. Analytisk er det enklest å operere med kontinuerlig forrentning

5 Noen forfattere kaller noe misvisende også eksponensiell diskontering med fallende effektive diskonteringrenter for hyperbolsk diskontering. Jf. Eric Rasmussen, "Some confusion about hyperbolic discounting", *WP 2008-11,* Indiana University, Kelley School of Business. I denne rapporten skal vi reservere begrepet hyperbolsk diskontering til fallende diskonteringsrenter som skyldes at de intertemporale preferansene endrer seg over tid.

fremtidige beløp. Hvis lønnsomheten av investeringen reverseres på et gitt tidspunkt $\tau$ , vil beslutningen truffet på tidspunkt 0, være det som blir kalt for dynamisk inkonsistent.

# 3. Kapitalverdimodellen som utgangspunkt for risikovurdering og diskontering

Diskontering gjør det mulig å uttrykke inntekter og kostnader som inntreffer på ulike tidspunkt i et felles verdimål. Dette er åpenbart nødvendig for at økonomiske størrelser med ulik datering kan inngå i lønnsomhetsanalyser på en meningsfull måte. Problemet med asynkrone kostnader og inntekter blir satt på spissen når det gjelder klimatiltak som innebærer store initiale kostnader eller investeringer, og der eventuelle gevinster normalt vil høstes langt inn i fremtiden. Nytte-kostnads-analyser av slike prosjekter ville vært meningsløse uten diskontering som redskap for henføring av kostnader og inntekter til samme referansetidspunkt.  Det sier seg selv at å sammenligne kroner i dag med verdier målt i kroner om 100 år blir meningsløst selv i det tilfellet at de måles til samme prisnivå. Det sentrale spørsmålet blir hva vi ofrer i form av alternativ verdiskaping ved å investere i klimatiltak i dag sammenlignet med hvilke klimagevinster vi og fremtidige generasjoner får igjen for dette. Alternativkostnaden reflekteres ved diskonteringsrenten, mens den fremtidige verdien av klimagevinster vil avhenge av hvordan de blir prissatt. Det som skaper problemer for vurderingen, er at både fremtidig velferd uten prosjektet og klimagevinster fra prosjektet kan være svært usikre.

Når vi håndterer avveininger over tid og under usikkerhet ved diskontering, vil diskonteringsrenten avhenge både av eksterne markedmessige forhold og av risiko knyttet til det enkelte investeringsprosjekt.  Det enkleste tilfellet er hvor selve prosjektet isolert sett er risikofritt og der en har tilgang til et perfekt kredittmarked hvor en fritt kan låne og plassere midler til en gitt rente. Her vil det optimale prosjektvalg være det som maksimerer nåverdien av kostnads- og inntektsstrømmen som prosjektet genererer diskontert med den risikofrie markedsrenten.

Lønnsomheten av langsiktige investeringer avhenger imidlertid av forhold som ligger langt ut i fremtiden, og som vil være beheftet med betydelig økonomisk risiko. Det gjelder ikke bare klimatiltak, men også langsiktige investeringer i infrastruktur. Spørsmålet er hvordan en skal ta hensyn til denne usikkerheten i investeringskalkylen. Lærdommen fra porteføljeteorien er at man kan ikke se på risikoen til en enkeltstående investering isolert. Den relevante risikoen er gitt ved det bidraget som investeringen gir til beslutningstakerens samlede risiko-eksponering. Risikoen til en investering vil dermed avhenge av det aktuelle analysenivået da dette er bestemmende for beslutningstakerens totalportefølje som investeringen inngår i. Det kan være investeringsporteføljen for en bedrift, en offentlig etat eller hele sektoren, en næring, eller for nasjonen som helhet. Lønnsomhetsanalysen varierer tilsvarende fra det bedriftsøkonomiske til det samfunnsøkonomiske perspektivet. I det samfunnsøkonomiske perspektivet er det nasjonen som helhet som er analysenivået.

Relativt til det aktuelle analysenivået skilles det mellom såkalt systematisk og usystematisk risiko. Usystematisk risiko er prosjektspesifikk og er ukorrelert med risikoen knyttet til de andre investeringene i porteføljen. Den har en tendens til å bli "vasket bort" i totalporteføljen som følge av de store talls lov. Det kan skje ved aktiv diversifisering som går ut på å spre investeringene på ulike prosjekter med uavhengig risiko. Systematisk risiko er knyttet til risikofaktorer som i varierende grad er felles for alle investeringer i porteføljen og som en derfor ikke kan redusere i særlig grad ved diversifisering. Eksempler på usystematiske risikofaktorer for investeringer i transportsektoren kan være geologiske forhold for tunneldriving, vanskelige værforhold ved installering av navigasjonsinnretninger langs kysten, og lignende. Eksempler på systematisk risiko kan være risiko knyttet til konjunktursituasjonen som kan ha betydning for innenlandsk pris- og lønnsnivå, og kronekursen som vil ha betydning for importkostnader og vil dermed berøre all importavhengig virksomhet. Det ligger i sakens natur at jo mer omfattende porteføljen er, desto større muligheter vil det være for å redusere risikoeksponeringen ved diversifisering. Risiko knyttet til en investering som er systematisk for en enkeltstående bedrift, vil ikke nødvendigvis være det dersom en ser landets investeringsportefølje under ett. Bedriften kan imidlertid også redusere risikoen ved å investere i finansobjekter der avkastningen er negativt korrelert med avkastningen på bedriftens investeringsportefølje og tilsvarende kan et land diversifisere ved å investere i det internasjonale finansmarkedet.[6]

De gjeldende norske retningslinjer for håndtering av risiko i nytte-kostnadsanalyser av offentlige prosjekter bygger på en analogi med prising av risiko i finansmarkedet.[7] Finansmarkedet priser risiko ved et tillegg i avkastningskravet utover den risikofrie renten. Dette er i samsvar med den såkalte kapitalverdi-modellen som er en teoretisk forklarings-modell for prisdannelsen i aksjemarkedet. For en privat bedrift vil denne risikopremien være markedets vurdering av risikokostnaden for prosjekter med tilsvarende risikoprofil. Prosjektets risikoprofil er gitt ved dets bidrag til risikoen knyttet til bedriftens totalportefølje. Sammenhengen mellom prosjektets risikoprofil og risikoprofilen til totalporteføljen blir vanligvis referert til som prosjektets beta-verdi[8] ($\beta$). Denne uttrykker prosjektets netto bidrag til den totale porteføljerisikoen.
I en direkte analogi med prisingen av risiko i finansmarkedene kan det risikojusterte avkastningskravet til en investering $k$ uttrykkes som[9]

---

6 Dette blir kalt forsikringshandel (hedging) i faglitteraturen.

7 Se Nytte-Kostnadsanalyser: *Prinsipper for lønnsomhetsvurderinger i offentlig sektor*. NOU 1997:27 og Finansdepartementets veileder i samfunnsøkonomisk analyse (2005).

8 Beta-verdien er gitt ved kovariansen mellom prosjektavkastningen og porteføljeavkastningen dividert med variansen til porteføljeavkastningen.

9 $E(\cdot)$ betegner forventningsverdier

(1) $\hat{r}_k = r + \beta_k (E(R_M) - r)$

der $R_M$ er den usikre avkastningen på markedsporteføljen (totalporteføljen) bestående av alle finansaktiva i markedet, og $\beta_k$ er investeringens risikoprofil som gitt ved kovariansen med avkastningen på totalporteføljen. Uttrykket $[E(R_M) - r]$ er forventet meravkastning som markedet krever for å være villig til å bære risikoen knyttet til markedsporteføljen, der $r$ er den risikofrie renten. Kravet til forventet meravkasting blir vanligvis referert til som markedets risikopremie. Dersom $\beta_k = 1$, har investeringen samme risikoprofil som markedsporteføljen og risikojustert avkastningskrav er gitt ved avkastningen til markedsporteføljen.

Dersom $\beta_k = 0$, er investeringen å anse som risikofri og avkastningskravet er gitt ved den risikofrie renten. I det tilfellet at $\beta_k < 0$, bidrar investeringen til å redusere totalrisikoen, og har dermed også en forsikringsfunksjon. Dermed blir det risikojusterte avkastningskravet lavere enn den risikofrie renten. Prosjektet kan være lønnsomt til tross for at det gir en negativ forventet avkastning. Det som da gjør prosjektet lønnsomt, er utelukkende dets sikringsfunksjon i forhold til avkastningen på totalporteføljen[10].

Det er som nevnt, en tillemping av denne markedsmodellen for prising av risiko som norske myndigheter ved Finansdepartementet har lagt til grunn for beregning av risikojusterte samfunnsøkonomiske diskonteringsrenter for offentlige investeringer[11]. I en samfunnsøkonomisk analyse må avkastningen på markedsporteføljen justeres slik at den reflekterer den samfunnsøkonomiske avkastningen[12]. Videre må risikoprofilen på markedsporteføljen antas å være representativ for risikoprofilen til samfunnets investeringsportefølje, som det i denne sammenheng er naturlig å definere som landets samlede formue (nasjonalformuen). Dersom vi antar en risikofri realrente på 2 % og en risikopremie på 5 %, vil realavkastningskravet til en investering med beta-verdi lik 1 være 7 %, og 5 % for en investering med beta-verdi lik 0,6.

En kan oppfatte det risikojusterte avkastningskravet som den risikojusterte alternativ-avkastningen til den kapitalen som bindes i prosjektet. Også prosjektvalg basert på

10 Som eksempel kan nevnes at det er lønnsomt for privatpersoner å forsikre huset, selv om forventet avkastning på forsikringskjøpet er negativ.

11 Nytte-Kostnadsanalyse, og Finansdepartementet (2005) *op.cit.*

12 Den kapitalavkastningen som prises på børsen, er selskapenes overskudd til eierne etter selskapsskatt, mens selskapets samfunnsøkonomiske avkastning utgjøres av selskapenes brutto overskudd før nasjonal selskapsskatt. Det er derfor risikopremien før selskapsskatt og personlig kapitalskatt som bør legges til grunn for prising av prosjektets samfunnsøkonomiske risiko. I tillegg må en ved beregning av totalkapitalens avkastning også ta hensyn til at en andel av investeringen kan være finansiert ved gjeld.

nåverdier på grunnlag av risikojusterte avkastningskrav kan motiveres ut fra en arbitrasjebetraktning. Avkastningskravet er den avkastning med samme risikoprofil som kapitalen som bindes i prosjektet, kunne ha oppnådd i det eksterne finansmarkedet. Når en diskonterer forventet netto prosjektoverskudd med den risikojusterte diskonteringsrenten, må prosjektet gi en risikojustert avkastning som minst "matcher" denne risikojusterte alternativavkastningen for at det skal gi et positivt nettobidrag til samfunnsøkonomisk verdiskaping i form av positiv nåverdi.

Alternativet til å ta hensyn til risiko i avkastningskravet er å justere ned usikre inntekter og justere opp usikre kostnader direkte for å ta høyde for risiko. Det risikojusterte overskuddet er det naturlig å kalle for et sikkerhetsekvivalent overskudd. Det er det sikre beløpet som er nyttemessig ekvivalent med det risikofylte resultatet. De fremtidige sikkerhetsekvivalente overskuddene blir så neddiskontert med den risikofrie renten. Med risikoaversjon vil et sikkerhetsekvivalent overskudd være lavere enn forventet overskudd dersom det bidrar til å øke porteføljevariansen, og omvendt om det reduserer porteføljevariansen. Med usikre netto kostnader blir det motsatt. Den sikkerhetsekvivalente kostnaden vil være høyere enn den forventede kostnaden dersom den medfører en økt risiko for totalporteføljen, og vise versa. Ved risikoaversjon vil en derfor justere ned forventet nåverdi av en usikker inntekt og justere opp forventet nåverdi av en usikker kostnad. Det kan enten gjøres i telleren ved å ta hensyn til risikoen i form av et sikkerhetsekvivalent overskudd, eller i nevneren ved å benytte en risikojustert diskonteringsrente.

# 4. Eksponensiell diskontering med konstant diskonteringsrente og samfunnsøkonomisk lønnsomhet

Tidsstrukturen på diskonteringsrenter utledet på grunnlag av kapitalverdimodellen vil avhenge av hvordan prosjektets systematiske risiko endrer seg over tid. Det avhenger ikke bare av hvordan tidsprofilen på prosjektets avkastning endrer seg, men også av risikoutviklingen for markedsporteføljen. I praksis blir det normalt benyttet en konstant diskonteringsrente uavhengig av prosjektets tidshorisont[13]. Dette kan synes rimelig i en verden uten risiko for prosjekter som har virkninger som ikke strekker seg utover en generasjon. Men når fremtidige økonomiske størrelser er beheftet med risiko, kan det selv for prosjekter som ikke har virkninger for fremtidige generasjoner, reises motforestillinger mot denne forutsetningen. Ett problem er at den risikojusterte diskonteringsrenten skal håndtere to uavhengige problemstillinger ved at den skal fange opp både den rene tidspreferansen og investors holdning til prosjektets risiko. Med kontinuerlig tid betyr det at diskonteringsfaktoren faller eksponensielt over tid når risikotillegget antas å være konstant. Med en risikojustert diskonteringsrente bestående av et risikofritt element $r$ og et risikotillegg $\beta P$, der $P$ er markedets risikopremie, vil diskonteringsfaktoren for prosjektoverskudd $t$ perioder frem i tid og diskontert til nåverdi i diskret tid være $D(t) = 1/(1+r')^t$ der r' er det risikojusterte avkastningskravet gitt ved $r' = r + \beta P$.

En innvending mot konstant diskonteringsrente er at det forutsetter en bestemt tidsutvikling for risikoen slik den reflekteres ved forholdet mellom de fremtidige forventede og sikkerhetsekvivalente verdistørrelsene som prosjektet genererer. For å anskueliggjøre hva det betyr, kan vi anta at vi har en usikker netto nytte på tidspunkt 1 med forventet verdi $\overline{X}_1$ og sikkerhetsekvivalent verdi $X_1^* < \overline{X}_1$. Vi antar videre at den risikofrie renten er $r$ og den risikojusterte renten $r' > r$. Risikojustert nåverdi basert på diskontering av forventningsverdier med risikojustert rente eller sikkerhetsekvivalente verdier med risikofri rente må gi samme resultat, siden den ene kan utledes fra den andre. Det betyr her at $\frac{\overline{X}_1}{(1+r')} = \frac{X_1^*}{(1+r)}$. Dette impliserer $\frac{X_1^*}{\overline{X}_1} = \frac{1+r}{1+r'}$. En konstant risikojustert rente over tid impliserer dermed $\frac{X_t^*}{\overline{X}_t} = \left(\frac{1+r}{1+r'}\right)^t = \left(\frac{X_1^*}{\overline{X}_1}\right)^t$ for alle perioder $t$ innenfor prosjekthorisonten. En konstant risikojustert diskonteringsrente over tid forutsetter dermed en bestemt tidsprofil for risikoen knyttet til årlig netto nytte ved at

---

[13] Dette gjelder f.eks. retningslinjene for nytte-kostnad analyse for offentlige investeringer i Norge, jf. Nytte-Kostnadsanalyse, *Op. cit.*

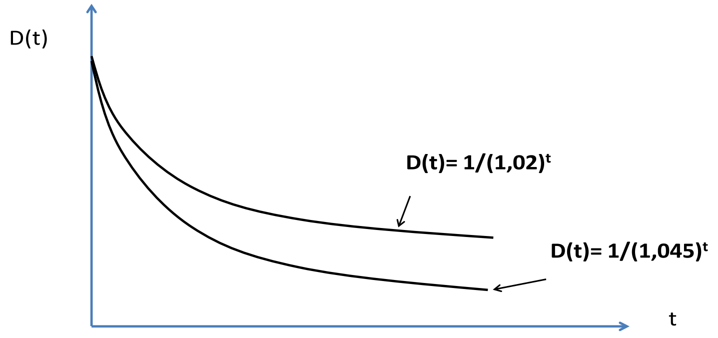
forholdet mellom sikkerhetsekvivalent og forventet netto nytte må falle geometrisk over tid med den tidsinvariante raten (1+r)/(1+r')<1. Denne restriksjonen vil normalt ikke være tilfredsstilt i praksis. Om noen av prosjektoverskuddene er negative, vil vi dessuten måtte ha r'< r og $\frac{X_t^*}{\overline{X}_t} > 1$.

Noen former for risiko er av typen milepælsrisiko. Dette er risiko som knytter seg til realiseringen av bestemte begivenheter. Når begivenheten har inntruffet, vil risikoen være redusert eller helt oppløst. Det kan for eksempel gjelde usikkerhet knyttet til forhold som skal fastsettes gjennom en avtale. Når avtalen er inngått, er risikoen eliminert. Her er avtaler om klimatiltak et godt eksempel. I slike tilfelle blir geometrisk diskontering med en konstant risikojustert diskonteringsrente direkte galt.

Nedenstående tabell viser nåverdien av en krone med sikkerhet på ulike tidspunkt diskontert ned med en antatt risikofri rente på 2% sammenlignet med en antatt usikker krone der diskonteringsrenten har fått et risikotillegg på 2,5 prosentpoeng slik at den blir 4,5%. Tabellen viser tidsutviklingen for diskonteringsfaktoren uten risikojustering i kolonnen til venstre og med risikojustering til høyre. I et slikt langsiktig perspektiv virker denne sjablongmessige måten å korrigere for risiko på nokså tilfeldig. I Figur 2 illustrerer kurvene for tidsutviklingen av diskonteringsfaktoren under henholdsvis sikkerhet (2 %) og usikkerhet med et konstant risikotillegg i renten (4,5 %) det samme renteforholdet som i tabellen.

**Tabell 1** Nåverdi av en krone med hhv risikofri og risikojustert rente

| t | $(1/1,02^t)$ | $(1/1,045^t)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,9804 | 0,9569 |
| 5 | 0,9057 | 0,8025 |
| 10 | 0,8203 | 0,6439 |
| 20 | 0,673 | 0,4146 |
| 40 | 0,4529 | 0,1719 |
| 60 | 0,3048 | 0,0713 |
| 80 | 0,2051 | 0,0295 |




**Figur 2** Nåverdi av en krone med risikofri og risikojustert rente

Et annet problem er at risikopremien som ligger til grunn for avkastningskravet, er basert på risikoprisingen i dagens finansmarked. Der er markedssegmentene for langsiktige investeringsobjekter typisk tynne. Obligasjoner har for eksempel en løpetid på maksimum ca 30 år. Det innebærer at risikoprisingen i dagens finansmarked kan gi et dårlig holdepunkt for vurdering av den samfunns-økonomiske risikoen for prosjekter med lang levetid dvs. utover 30 år.

Speilbildet av dette er at nåverdien av økonomiske størrelser som ligger langt frem i tid, kan bli så små at de i praksis er uten betydning for prosjektets kalkulerte lønnsomhet. Det gjelder for eksempel for investeringer i langsiktig infrastruktur i samferdselssektoren. Levetiden for en investering i kjøreveien for jernbane er ca 70 år, og en veitunnel har enda lengre levetid. Samferdselsdepartementets anbefaling for inflasjonsjustert diskonteringsrente for sine underliggende etater har vært 4,5 %. Med denne rentesatsen er nåverdien av en krone om 70 år 4,59 øre, og 1,23 øre om 100 år. Når det gjelder investeringer i klimatiltak, vil nytten av slike tiltak strekke seg over flere hundre år og mange generasjoner. Andre eksempler er tiltak for å opprettholde biologisk mangfold, og investeringer i kjernekraft. I sistnevnte eksempel innebærer lagringsproblemet for radioaktivt avfall at dette blir et svært langsiktig prosjekt.

Det er en voksende forståelse for at eksponensiell (eller geometrisk) diskontering med tidsinvariante diskonteringsrenter i denne størrelsesorden er problematisk, bl.a. ved at det kan favorisere kortsiktige prosjekter sammenlignet med langsiktige prosjekter som krever store initiale investeringer og der nytten strekker seg over lang tid. Det kan også føre til en relativt bedre lønnsomhet av langsiktige prosjekter der en betydelig del av kostnadene påløper i sluttfasen av prosjektet i form av avviklingskostnader. Det kan for eksempel være tilfelle med dekommisjonering av kjernekraftanlegg der fremtidige deponeringskostnader via diskontering kan få en beskjeden vekt i nåverdianalysen. Med risikoaversjon burde usikkerhet om fremtidige deponeringskostnader for radioaktivt avfall, alt annet likt, ha være et argument for å oppjustere nåverdien av den forventede kostnaden. Et annet og kanskje enda viktigere eksempel er investeringer i klimatiltak som kan fortone seg som ulønnsomme selv med moderate diskonteringsrenter.

En positiv diskonteringsrente kan begrunnes med en iboende utålmodighet når det gjelder å oppnå nytte fra konsum slik at nytte i dag er relativt mer verdt enn nytte oppnådd senere. Dette impliserer en positiv diskonteringsrente for fremtidig nytte. Utover dette kan diskontering av fremtidig konsum begrunnes med fremtidig konsumvekst og avtakende grensenytte av konsum, slik at en krones konsum blir mindre verdt jo lengre ute i tid det skjer. På denne måten blir rentebegrepet sammensatt av to ledd: et utålmodighetsledd og et ledd som avhenger av preferansene for konsum.

De langsiktige fordelingsmessige konsekvensene forårsaket av diskontering av fremtidig nytte reiser etiske spørsmål har opptatt økonomer gjennom flere generasjoner. Den kjente engelske økonomen Pigou[14] refererte til diskonteringens uheldige virkninger for fremtidig velferd som noe som oppsto på grunn av vår iboende ”*defective telescopic faculty*”. Samme synspunkt tilkjennega den like kjente engelske økonomen Ramsey i sin grunnleggende artikkel fra 1928[15] om teorien for optimal kapitalakkumulasjon: ”…*it is assumed that we do not discount later enjoyments in comparison with earlier ones, a practice which is ethically indefensible and arises merely from the weakness of imagination”*. Økonomen Harrod var mer direkte i sitt syn på at diskontering av nytte fører til at nåtidsgenerasjonen utbytter fremtidens konsumenter ved utsagnet[16] …” *discounting utility represents ’rapacity’ and the conquest of reason by passion”*. Weitzman[17] oppsummerer diskonteringsproblemet med følgende betraktning: ”… *to think about the future in terms of standard discounting is to have an uneasy intuitive feeling that something is wrong, somewhere”.*[18]

Debatten om klimaendringer og hvilke mottiltak som bør iverksettes i den sammenheng, har aktualisert diskonteringsrentespørsmålet i forbindelse med hva som burde være fornuftige avkastningskrav for investeringer der gevinstene i hovedsak vil høstes av fremtidige generasjoner. En mulig løsning som er blitt foreslått av flere, er å basere seg på eksponensiell diskontering med fallende gjennomsnittlig diskonteringsrente over tid.[19] Det vil si at jo lengre ut i tid prosjektets økonomiske konsekvenser ligger, desto lavere bør den gjennomsnittlige diskonteringsrenten være.

---

14 A. Pigou, 1932, *The Economics of Welfare,* 4. Utg. Macmillan, London

15 F. P. Ramsey, 1928, ”A Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal, 38, 543-559*

16 Harrod, R. *Towards a Dynamic Economics,* London: 1948, Macmillan.

17 M. Weitzman, 1998, Why the Far Distant Future Should be Discounted at its Lowest Possible Rate”, *Journal of Environmental Economics and Management, 36,* 201-208..

18 Bemerk at disse motforestillingene gjelder diskontering av nytte og ikke markedsmessige verdistørrelser.

19 Dette blir også av noen litt misvisende kalt for hyperbolsk diskontering. Jf. Eric Rasmussen, “Some confusion about hyperbolic discounting”, *WP 2008-11,* Indiana University, Kelley School of Business.

Det er flere argumenter i favør av en fallende gjennomsnittlig diskonteringsrente over tid for langsiktige prosjekter.

(i) **Redusert fremtidig vekst-argumentet**: Det ene er at det kan være konsistent med en regel som representerer en optimal balansering av velferden til dagens generasjon mot velferden til fremtidige generasjoner. Fremtidens generasjoner kan på grunn av ressursmessige begrensninger i forhold til befolkningsveksten ventes å få en lavere velferd enn dagens generasjon og denne forverringen blir større jo lengre frem i tid vi ser. Hensynet til fremtidig velferd kan da innebære et avkastningskrav som faller over tid. Dette betyr at fremtidig konsum blir tillagt relativt større vekt i dagens nåverdikalkyler og denne relative vektingen i favør av fremtiden øker med prosjektets tidshorisont. Det som driver dette argumentet er økende grensenytte over tid som følge av redusert gjennomsnittskonsum.

(ii) **Forsikringsargumentet**: For det andre kan økt usikkerhet om fremtidige konsummuligheter eller alternativavkastning til bundet kapital, føre til en fallende effektiv diskonteringsrente. Når det gjelder investeringer finansiert ved økt sparing, kan fallende diskonteringsrenter sees på som uttrykk for et forsikringsbehov (såkalt "precautionary saving")

(iii) **Hyperbolske tidspreferanser**: For det tredje viser det seg at beslutningstakere under sikkerhet ofte tilpasser seg som om den marginale tidspreferansen er fallende over tid. Dette betyr at den *nære nytten* oppjusteres relativt mer enn *nytte som ligger lenger ute i tid* når tidsperspektivet forkortes. Dermed vil også den relative avveining mellom nytten av konsum i to på hverandre følgende perioder endre seg når de rykker nærmere vurderingstidspunktet. Dette fører til at den marginale "trade-off" mellom nytte i to på hverandre følgende perioder avtar over tid. Dette innebærer at diskonteringsfaktoren som funksjon av tiden flater ut, mens den med eksponensiell diskontering og konstant rente går asymptotisk mot null.

Årsaken til en fallende diskonteringsrente over tid under punkt (i) og (ii) skyldes forhold som er eksogene i forhold til dem som skal fatte beslutningene. En fallende diskonteringsrente vil derfor i disse tilfellene ikke være uttrykk for at preferansene endrer seg over tid, og vil derfor ikke nødvendigvis lede til dynamisk inkonsistente beslutninger. Under punkt (iii) endrer derimot de intertemporale preferansene seg over tid med det resultat at prioriteringen mellom konkurrerende prosjekter kan endre seg ettersom tiden går. Til tross for at beslutningstakeren har full oversikt over alle fremtidige økonomiske konsekvenser av det optimale valg av prosjekt på beslutningstidspunktet, kan hun ønske å prioritere annerledes på et senere tidspunkt uten at andre ytre ting har endret seg enn at tiden har gått. Dette blir gjerne kalt intertemporal preferansereversering. Det er ensbetydende med såkalt dynamisk inkonsistens.

Fallende langsiktige, effektive diskonteringsrenter som følge av pkt (i) og (ii) vil bli drøftet mer inngående i fortsettelsen. Implikasjonene fra pkt (iii) mht til diskonteringsrenten vil bli behandlet mer summarisk da det er vanskelig å argumentere for at dette bør legges til grunn for en rasjonell samfunnsplanlegging, siden det impliserer at planer som er optimale i dag, ikke nødvendigvis vil være det i fremtiden selv om de økonomiske rammebetingelser forblir uendret.

# 5. Optimale konsumbaserte diskonteringsrenter for langsiktige prosjekter under sikkerhet

Vi analyserer dette ved hjelp av et enkelt eksempel. En mer rigorøs utledning er gitt i appendiks I. Problemet er analytisk enklere hvis vi analyserer det i kontinuerlig tid. Vi antar identiske konsumenter og vi betrakter en representativ konsument som konsumerer i to perioder (formelt sett på to tidspunkter), periode 0 (i dag) og periode *t*. Nyttefunksjonen er gitt ved $u(c_0) + e^{-\rho t}u(c_t)$ der $c_0$ og $c_t$ er pr capita konsumet på henholdsvis tidspunkt 0 og *t*. $\rho$ er en diskonteringsrente for nytte som vi vil kalle konsumentens tidspreferanserate slik at $e^{-\rho t}$ blir diskonteringsfaktoren for nytte på tidspunkt *t*[20]. Vi antar videre at konsumenten på tidspunkt 0 investerer et "lite" beløp $\varepsilon$ til en konstant forrentning *r*. På tidspunkt *t* er dette beløpet da vokst til $\varepsilon e^{\bar{r}_t t}$ der $\bar{r}_t$ gjennomsnittlig avkastning per år frem til år *t*. Denne investeringen er lønnsom dersom den gir en ikke negativ netto nyttegevinst. Det betyr at nåverdien av netto nytteøkningen må være større eller lik null.

$$(2) \quad -u'(c_0)\varepsilon + e^{-\rho t}u'(c_t)\varepsilon e^{\bar{r}_t t} \geq 0$$

Avkastningen gitt ved $\bar{r}_t$ som fører til at betingelsen (2) holder som likhet, blir avkastningskravet for en lønnsom investering. En høyere avkastning vil gi en ekte positiv diskontert netto nyttegevinst. Når vi lar diskonteringsrenten være lik avkastningskravet, vil nåverdien av nytteeffektene være positiv hvis avkastningen er høyere enn avkastningskravet.

Gitt at (2) holder som likhet, får vi ved en enkel omforming optimal diskonteringsfaktor på tidspunkt *t* gitt ved

$$(3) \quad e^{-\bar{r}_t t} = e^{-\rho t}\frac{u'(c_t)}{u'(c_o)}$$

Ved å ta logaritmen på begge sider av (3) får vi

$$(4) \quad \bar{r}_t = \rho - \frac{1}{t}\ln\left[\frac{u'(c_t)}{u'(c_0)}\right]$$

[20] Det kan, i et flergenerasjonsperspektiv argumenteres for at tidspreferanseraten bør være lav eller endog lik null (jf. Ramsey (1928), *op.cit*)

Ifølge (4) er optimal effektiv diskonteringsrente $\bar{r}_t$ på tidspunkt *t* gitt ved tidspreferanseraten minus gjennomsnittlig endring i grensenytten av konsum pr tidsenhet fra tidspunkt 0 til *t*. Med fallende grensenytte vil tallverdien til dette leddet være avtakende over tid dersom det er konsumvekst frem til tidshorisonten t. Avkastningskravet blir dermed avhengig av tidshorisonten *t* ved at $\bar{r}_t$ øker med *t* dersom det er konsumvekst i perioden, siden leddet i klammeparentesen da er avtakende. Med konsumnedgang blir diskonteringsrenten fallende.

For å få et empirisk mer operativt uttrykk for diskonteringsrenten må vi gjøre mer spesifikke antagelser med hensyn til nyttefunksjonens form. For dette formålet antar vi at grensenytten av konsum kan representeres ved funksjonen $u'(c) = c^{-\eta}$, $\eta > 0$. Vi ser at $\eta = -[(u''(c)/u'(c)]c$ der høyresiden av dette uttrykket er (tallverdien) for grensenytte-elastisiteten. Betingelsen (4) kan da skrives som

$$\bar{r}_t = \rho - \frac{1}{t}\ln\left[\frac{c_t}{c_0}\right]^{-\eta} = \rho + \eta\bar{g}_t \tag{5}$$

Siste leddet på høyresiden av (5) kalles Ramsey-betingelsen for optimal sparing (se Appendiks I)

I (5) er $\bar{g}_t = (1/t)\ln(c_t/c_0)$ som er gjennomsnittlig konsumvekst frem til tidspunkt *t*. Den optimale diskonteringsrenten $\bar{r}_t$ er her en konsumbasert gjennomsnittlig rente i den forstand at det er et avkastningskrav i form av det fremtidige merkonsum som investeringen må generere pr krones reduksjon av konsumet i dag for å være lønnsom. En positiv tidspreferanserate ($\rho$) trekker i favør av konsum i dag. Det andre leddet i uttrykket er konsumavhengig ved at det er et produkt av absoluttverdien til grensenytteelastisiteten, $\eta$, og gjennomsnittlig konsumvekst pr år $\bar{g}_t$ frem til tidspunkt *t*. Absoluttverdien til grensenytteelastisiteten måler prosentvis endring i grensenytten når konsumet endrer seg med én prosent. Multiplisert med konsumendringen viser dette da *prosentvis endring i grensenytte som følge av den prosentvise konsumendringen*. Den gjennomsnittlige konsumveksten vil normalt avhenge av tidshorisonten for prosjektet. Ved at dette leddet inngår additivt i uttrykket for optimal diskonteringsrente, bidrar det til å utjevne den optimale konsumprofilen over tid. En høyere diskonteringsrente betyr at en legger relativt større vekt på konsum i dag fremfor å få realisert mer konsum senere. Med en høy diskonteringsrente vil et prosjekt være lønnsomt bare i det tilfellet det gir en relativt høy avkastning i senere perioder. Det kan derfor synes nærliggende å kalle effekten på diskonteringsrenten gitt ved leddet $\eta\bar{g}_t$ for en *velstandseffekt*. Jo høyere gjennomsnittlig konsumvekst, desto mer velstående vil fremtidige konsumenter bli, og desto høyere vil optimal diskonteringsrente være. Dette impliserer at dagens konsumenter blir mindre villig til å ofre konsum nå for å få realisert mer konsum i fremtiden. Omvendt vil en forventet konsumnedgang trekke i retning av lavere diskonteringsrente og et slakkere avkastningskrav, som da bidrar til å øke investeringene til beste for fremtidige konsumenter. En fallende gjennomsnittlig konsumendring over tid fører dermed til en fallende diskonteringsrente over tid.

Med risikofri avkastning på investeringer vil konstant per capita konsum over tid implisere en tidsinvariant optimal diskonteringsrente.
Fallende (stigende) per capita konsum over tid vil implisere en fallende (stigende) optimal diskonteringsrente over tid.

Grensenytteelastisiteten ($\eta$) måler krumningen på nyttefunksjonen. Sterk krumning (høy verdi på $\eta$) trekker i favør av konsumutjevning over tid, slik at ved relativt høyt konsum i fremtiden, vil en med dagens briller i større grad ønske å prioritere dagens konsum ved å investere mindre. Med en fremtidig konsumnedgang blir det omvendt. En høy verdi på grensenytteelastisiteten betyr dermed at velstandseffekten får en større innvirkning på den optimale diskonteringsrenten både til pluss og minus. Størrelsen på grensenytteelastisiteten får dermed i kraft av sin betydning for diskonteringsrenten virkninger for inntektsfordelingen over tid.

# 6. Optimale diskonteringsrenter for langsiktige prosjekter under usikre rammebetingelser

Vi ser her på hvordan optimal diskonteringsrente henger sammen med usikkerhet omkring de makroøkonomiske rammebetingelsene for prosjektet. Vi ser på to typer av usikkerhet. Den ene typen er usikkerhet med hensyn til fremtidig konsum og velferd eksklusive bidraget fra prosjektet. Dette er tema for avsnitt 6.1. Vi ser med andre ord på betydningen av usikkerhet med hensyn til prosjektets rammebetingelser, mens vi for prosjektet isolert sett legger forventningsverdien til grunn. Et "lite" prosjekt betyr her at prosjektet ikke kan påvirke grensenytten av konsum når investeringen går på bekostning av konsum. Analysen er derfor innenfor rammen av partiell likevekt. Den andre typen usikkerhet gjelder prosjektets egen avkastning. Dette er tema i avsnitt 6.2.

## 6.1. En konsumbasert optimal tidsstruktur for langsiktig diskonteringsrente

Vi ser først på den situasjonen at investeringen dekkes opp ved redusert konsum (økt sparing). Problemstillingen er også her hvor stor forventet avkastning i form av fremtidig merkonsum en langsiktig investering må gi for at det skal være lønnsomt å avstå konsum i dag til fordel for langsiktige formål. For å forenkle diskusjonen videreføres antagelsen om at alle konsumenter er identiske. Analysen gjelder derfor en representativ konsument[21].

Vi tar utgangspunkt i optimumsbetingelse (5) gitt ved

$$\bar{r}_t = \rho - \frac{1}{t}\ln\left[\frac{c_t}{c_0}\right]^{-\eta}$$

Videre antas nå det at det hersker usikkerhet knyttet til fremtidig konsumvekst $c_t / c_0$. Mer presist antas konsumveksten fra tidspunkt 0 til tidspunkt $t$ å være normalfordelt, slik at konsumveksten er definert ved $X_t \equiv \ln c_t - \ln c_0$, der $X_t$ er normalfordelt.

Innsetting i (5) (repetert ved formelen ovenfor) gir

$$(5') \quad \bar{r}_t = \rho - \frac{1}{t}\ln\frac{E[c_t^{-\eta}]}{c_0^{-\eta}}$$

*)Vi har $X_t = \ln\frac{c_t}{c_0}\, slik\ at\ \frac{c_t}{c_0} = e^{X_t}$

[21] I et langsiktig perspektiv må vi da anta at konsumenten lever evig eller tar perfekt hensyn til sine etterkommere.

der $X_t \sim N(\mu_t, \sigma_t)$ der $E[X_t] \equiv \mu_t$ og $Var(X_t) \equiv \sigma_t^2$. $\mu_t$ og $\sigma_t$ er hhv forventet avkastning og standardavviket til avkastningen frem til t.

Dette betyr at $\bar{r}_t = \rho - \frac{1}{t} E(e^{-\eta X_t})$

Videre er det et kjent resultat fra statistisk teori at for $X_t$ normalfordelt, har vi
$E\left[e^{-\eta X}\right] = e^{-\eta(\mu - 0,5\eta\sigma^2)}$
Med en gjennomsnittlig prosentvis konsumvekst pr år lik $\bar{x}_t$ har vi at $c_t = c_0 e^{t\bar{x}_t}$

Innsatt i (5') får vi da
(9) $\bar{r}_t = \rho + \frac{1}{t}\left[\eta\mu_t - 0,5\eta^2\sigma_t^2\right]$
der $\bar{r}_t$ er effektiv diskonteringsrente pr år for nytte realisert i periode *t*.

Vi lar $g_t$ stå for forventet total konsumvekst frem til t.
*) Nedenstående utledning er litt teknisk. Lesere kan gå direkte til resultatet (10) uten å miste sammenhengen.

Ved å sette $\eta$ = - 1 i uttrykket for $E\left[e^{-\eta X}\right]$ får vi at

$$g_t = \ln E[c_t / c_0] = \ln E\left[e^{X_t}\right] = \mu_t + 0,5\sigma_t^2$$

Vi lar $\bar{g}_t = g_t / t$ stå for gjennomsnittlig forventet konsumvekst frem til t. Vi har da

$\mu_t = t\bar{g}_t - 0,5\sigma_t^2$ og ved innsetting i (9) får vi

$$(10) \qquad \bar{r}_t = \rho + \eta\bar{g}_t - \frac{1}{t}(0,5\eta(1+\eta)\sigma_t^2)$$

I (10) er $\bar{r}_t$ effektiv (gjennomsnittlig) diskonteringsrente for nytte på tidspunkt *t*.
Dette er avkastningskravet under usikkerhet basert på at den stokastiske konsumveksten frem til tidspunkt *t* er normalfordelt.

Diskonteringsrenten $\bar{r}_t$ kan her tolkes som den risikojusterte gjennomsnittlige diskonteringsrenten for prosjektets (risikofrie) bidrag til konsum på tidspunkt *t*. En høyere gjennomsnittlig avkastning vil gi positiv forventet nåverdi pr capita av nytteeffektene. Med samme begrunnelse som i tilfellet med sikker konsumvekst, bidrar dette til et høyere avkastningskrav. Siden forholdet mellom grensenytten på tidspunkt t og 0 vil avhenge av tidshorisonten *t*, vil også den gjennomsnittlige diskonteringsrenten frem til tidspunkt *t* avhenge av *t*. Det presiseres igjen at risikoen knytter seg til konsumsituasjonen på tidspunkt *t* og ikke til prosjektets bidrag til konsumet per se. Det skyldes at vi har antatt at prosjektoverskuddet er risikofritt.

Når vi åpner for at fremtidens økonomiske rammebetingelser og konsummuligheter kan være usikre, kan det ved risikoaversjon oppstå et behov for å forebygge virkningene av uheldige konjunkturer i fremtiden gjennom økt sparing og investering. Virkningen på diskonteringsrenten fremkommer ved at leddet $0{,}5\eta(1+\eta)Var(X_t)/t$ kommer til fradrag slik at avkastningskravet blir redusert.

Det er nærliggende å kalle denne effekten for en *forsiktighetseffekt*[22]. Jo større elastisiteten $\eta$ er, desto større aversjon vil en ha overfor variasjoner i konsumet over tid. En vil derfor ta høyde for en fremtidig risikofylt konsumutvikling gjennom et slakkere avkastningskrav.[23] Hvis for eksempel $\eta$ varierer mellom 1 og 2, vil fradragsleddet i diskonteringsrenten variere mellom 1 og 3 ganger gjennomsnittlig varians pr tidsenhet. Hvis usikkerheten om fremtidig konsumvekst gitt ved variansen øker over tid, vil avkastningskravet falle over tid, og vil falle raskere jo mer risikoaverse preferansene er målt med risikoaversjonsfaktoren $\eta$ [24].

Med en tidspreferanserate på 0,5 %, grensenytteelastisitet på 2 og forventet konsumvekst på 2 %, vil vi med en varians til årlig konsumrate på 0,004 % få en diskonteringsrente på 3,3 % mot 4,5 % i fravær av usikkerhet om fremtidig konsum. Dette vil imidlertid innebære en betydelig konsumrisiko da en varians på 0,004 svarer til et standardavvik på 6,32 %.

Med de ovenfor gitte parameterverdiene og i fravær av risiko er en gjennomsnittlig avkastning på 4,5% pr år den minste avkastning som et marginalt prosjekt må gi for at det skal oppfattes som lønnsomt. Risiko vedrørende fremtidig konsumvekst bidrar til å redusere avkastningskravet når dagens konsumenter har risikoaversjon mht til fremtidige konsummuligheter, og derfor ønsker å spare mer for å trygge fremtiden for seg selv eller sine etterkommere. Økt sparing får dermed karakter av forsikring mot fremtidig konsumrisiko.

22 Det engelske uttrykket for dette er *prudence*.

23 Mer presist kan det vises at størrelsen på leddet $\eta(1+\eta)$ er relatert til krumningen av grensenyttekurven ved at den er avhengig av størrelsen og fortegnet til den tredje-deriverte av grensenytten slik at u''' > 0.

24 Under usikkerhet vil grensenytteelastisiteten være ensbetydende med risikoaversjonsmålet kalt relativ risikoaversjon.

Den usikkerhetsjusterte Ramsey-regelen (10) for optimal sparing er en teori for hvordan optimal gjennomsnittlig diskonteringsrente vil variere over tid opp til prosjektets tidshorisont. Denne avhengigheten avhenger av utviklingen i forventet generell konsumvekst og gjennomsnittlig varians. Om vekstprosessen for konsumet er stasjonær slik at årlig konsumvekst er uavhengig og identisk fordelt, vil optimal diskonteringsrente være konstant over tid. Hvis gjennomsnittlig konsum er positivt korrelert over tid, vil gjennomsnittlig varians øke over tid og usikkerhetsleddet i diskonteringsrenteformelen vil trekke i retning av en fallende gjennomsnittlig diskonteringsrente.

## 6.2. Konsumbaserte avkastningskrav: Håndtering av prosjektspesifikk risiko

I den foranstående analysen var risikoen knyttet til konsumsituasjonen på det tidspunktet avkastningen på investeringen skal høstes, mens prosjektets forventede bidrag til konsumet var kjent. Her ser vi nå på det tilfellet at prosjektet også har en egenrisiko som kan være korrelert med konsumrisikoen[25]. Risikoen knyttet til prosjektet vil dermed være gitt ved interaksjonen mellom prosjektrisikoen og den makroøkonomiske risikoen[26].

Vi antar at regnet pr capita, krever et investeringsprosjekt en investering lik $\varepsilon$ på tidspunkt 0, og gir i periode $t$ et netto bidrag til konsum lik $Y_t$ pr krone investert. Nettobidraget $Y_t$ er en stokastisk variabel som kan være korrelert med konsumet $c_t$ på tidspunkt $t$.

Nytten av dette investeringsprosjektet er gitt ved

$$W = u(c_0 - \varepsilon) + e^{-\rho t} E\left[u(c_t + \varepsilon Y_t)\right]$$

En marginal investering gir dermed et bidrag til økonomisk velferd som er større eller lik null hvis

$$-u'(c_0) + e^{-\rho t} E\left[Y_t u'(c_t)\right] \geq 0$$

Denne lønnsomhetsbetingelsen kan omformes til

---

25 En tilsvarende utledning vil en finne i C. Gollier: *Pricing the future: The economics of discounting and sustainable development.* Upublisert manuskript. Toulouse 2010.

26 Dette er analogt med prosjektets beta-verdi i kapitalverdimodellen.

(11) $\quad NNV = -1 + e^{-\rho t} \dfrac{E[u'(c_t)]}{u'(c_0)} \dfrac{E[Y_t u'(c_t)]}{E[u'(c_t)]} \geq 0$ der NNV står for netto nåverdi av forventet marginal nytte som følge av prosjektet.

Utrykket $e^{-\rho t} \dfrac{E[u'(c_t)]}{u'(c_0)}$ kan tolkes som diskonteringsfaktoren for usikkert konsum på tidspunkt *t* mens uttrykket $\dfrac{E[Y_t u'(c_t)]}{E[u'(c_t)]}$ kan tolkes som sikkerhetsekvivalent konsum. Vi benevner diskonteringsfaktoren $e^{-\bar{r}_t t}$ der $\bar{r}_t$ er diskonteringsrenten for konsum på tidspunkt t. Den er da gitt ved

$$\bar{r}_t = \rho - \frac{1}{t} \ln \frac{E[u'(c_t)]}{u'(c_0)} \quad (jf \ (5')$$

Ved å definere det marginale bidraget til sikkerhetskevivalent konsum på tidspunkt t ved

$S_t = \dfrac{E[Y_t u'(c_t)]}{E[u'(c_t)]}$ kan det marginale lønnsomhetskriteriet formuleres som

$$NNV = -1 + e^{-r_t t} S_t \geq 0$$

Vi definerer $h(c_t) \equiv \dfrac{u'(c_t)}{E[u'(c_t)]}$ slik at $E[h(c_t)] = 1.$ [27]

Det sikkerhetsekvivalente overskuddet kan da uttrykkes ved

$$S_t = Cov(Y_t, h(c_t)) + E[Y_t].$$

Den makroøkonomiske usikkerheten er her reflektert i diskonteringsrenten, mens prosjektets bidrag til usikkerheten er reflektert i det sikkerhetsekvivalente prosjektoverskuddet.

Vi har da

(12) $\quad S_t \geq (<) E[Y_t] \ for \ Cov(Y_t, h(c_t)) \geq (<) 0$

27 Uttrykket $h(c_t)$ er det som i finansteori blir kalt risikonøytrale sannsynligheter.

Siden $h(c_t)$ er en fallende funksjon av $c_t$, kan betingelse (12) alternativt formuleres som

$$S_t < (>) E[Y_t] \text{ for } Cov(Y_t, c_t) > (<) 0 . \qquad (13)$$

Fra betingelse (13) ser vi at den relevante prosjektrisikoen er gitt ved kovariansen mellom prosjektets overskudd og verdiskapingen i økonomien for øvrig. Prosjektets usystematiske risiko er antatt diversifisert bort i porteføljen til den representative konsumenten. I det tilfellet at prosjektoverskuddet er ukorrelert med pr capita konsumet, er sikkerhets-ekvivalenten til prosjektoverskuddet lik forventet prosjektoverskudd. I offentlig økonomi blir dette resultatet referert til som Arrow & Linds teorem[28]. I denne sammenhengen betyr det at det kun er den makroøkonomiske risikoen som har betydning for den prosjektspesifikke diskonteringsrenten på samme måte som i seksjon 5.1. Dette innebærer at det ikke skal gis noe påslag i diskonteringsrenten for prosjektets egenrisiko.
Betingelse (13) impliserer at dersom prosjektoverskuddet er negativt korrelert med pr capita-konsumet, vil det sikkerhetsekvivalente overskuddet være større enn forventet overskudd og prosjektet har da en sikringsfunksjon i forhold til verdiskapingen for øvrig. Om denne korrelasjonen er positiv, bidrar prosjektet derimot til økt samlet risikoeksponering som fører til en positiv risikopremie[29] og lavere sikkerhetsekvivalent prosjektoverskudd[30].

Eksempel[31]

Anta at $u'(c) = c^{-\eta}$, der tallverdien av $\eta$ er målet på den relative risikoaversjonen (grensenytteelastisiteten). Vi tenker oss at vi har et prosjekt med en risikoprofil som er identisk med den makroøkonomiske risikoen knyttet til BNP per capita. Det betyr at når $c_t$ øker med 1%, vil også $Y_t$ øke med 1%. Under forutsetning av at $Y_t$ og $c_t$ har en tidsutvikling som følger en geometrisk Brownsk prosess kan det vises at risikotillegget i diskonteringsrenten blir $\eta\sigma_c^2$. På amerikanske data er $\sigma_c$ estimert til 3,6%. For $\eta = 2$ utgjør da det prosjektrelaterte risikotillegget i diskonteringsrenten 0,26 prosentpoeng, og for $\eta = 1{,}5$ blir risikotillegget 0,19 prosentpoeng.

Vi tar utgangspunkt i formelen (10) for diskonteringsrenten under usikkerhet mht fremtidig konsum, gitt ved

28 Arrow & Lind (1970), op. cit.

29 Risikopremien er her definert som differansen mellom forventet overskudd og sikkerhetsekvivalent overskudd.

30 Dette er parallelt med betydningen av systematisk risiko i CAPM-modellen

31 Gollier(2010). *Op.cit.*

$$\bar{r}_t = \delta + \eta\bar{g} - 0{,}5\eta(1+\eta)\frac{\sigma_t^2}{t}$$

der $\sigma_t^2$ er variansen til konsumveksten på tidspunkt t og vi har brukt at

$t\bar{g}_t = \ln(E(c_t / c_0) = \mu_t + 0{,}5\sigma^2$ der $\bar{g}_t$ er gjennomsnittlig konsumvekst pr år inn til år *t*. Med parameterverdiene $\delta$ =0,5 %, $\bar{g}_t$ = 1,5 %, η=2, og gjennomsnittlig standardavvik pr år på 3,6 %, blir avkastningskravet for et gjennomsnittsprosjekt $r_t^*$ = (0,5 + 3,0 – 0,39 + 0,26)% = 3,28 %. Dersom prosjektoverskuddet var ukorrelert med BNP pr capita, ville avkastningskravet vært 3,11 % (dvs. 0,26 prosentpoeng lavere). Dersom grensenytteelastisiteten alternativt var 1,5, ville diskonteringsrenten, alt annet likt, vært 2,51 % for et ukorrelert prosjekt, og 2,70 % for et perfekt korrelert prosjekt.

# 7. En rentebasert optimal tidsstruktur for diskonteringsrenter

I kapittel 5 og 6 antok vi at diskonteringsrenten var gitt ved konsumentenes avkastningskrav på sparing. Det blir ofte kalt den marginale intertemporale substitusjonsraten som viser konsumentenes bytteforhold mellom konsum i dag og konsum i fremtiden. Det vil si den økonomiske kompensasjon i form av merkonsum senere som konsumenten må ha for å være villig å overføre kjøpekraft til fremtidig konsum gjennom sparing. Her skal vi nå anlegge en alternativ betraktningsmåte for bestemmelse av diskonteringsrenten som vi kan kalle for alternativkostnadsbasert. Den går ut på at når vi binder kapital i et bestemt prosjekt, vil dette gå på bekostning av alternativ lønnsom anvendelse. Kostnaden ved dette er den verdiskaping som går tapt ved det (beste) alternativet som blir valgt bort. I en økonomi uten kapitalrasjonering vil normalt alle prosjekter som gir en avkastning som er høyere enn kapitalens alternativavkastning i finansmarkedet bli realisert. Avkastningen i finansmarkedet blir da avkastningen på det marginale prosjekt, og markedsrenten blir bestemmende for etterspørselen etter kapital på investeringssiden. Den konsumbaserte diskonteringsrenten viser på den annen side hvordan tilbudet av kapital gjennom sparing avhenger av avkastningen på sparing. I likevekt i kapitalmarkedet må kapitalavkastningskravet på henholdsvis tilbuds- og etterspørselssiden i kapitalmarkedet være sammenfallende.

Vi antar her at prosjektfinansiering skjer ved finansiering i finansmarkedet til renten $r_t$ på tidspunkt $t$ (eller kapital kunne alternativt ha blitt plassert til denne renten). Disse fremtidige spotrentene[32] kan da betraktes som alternativavkastningen for den langsiktige investeringen. Det antas at det råder usikkerhet om de fremtidige spotrentene på investeringstidspunktet. Når det gjelder avkastningen på investeringen, antas den i første omgang å være risikofri[33].

Vi definerer den effektive (sikkerhetsekvivalente) diskonteringsrenten som den konstante diskonteringsrenten som ville ha gitt samme forventede nåverdi for inntektsstrømmen som vi ville ha fått ved å diskontere ned med de aktuelle spotrentene i hver periode. Generelt vil den effektive renten avhenge av tidsutviklingen for den fremtidige spotrenten. Vi lar $r_\tau$ stå for markedsrenten fra tidspunkt $\tau$ -1 til $\tau$ . Med spotrentene som diskonteringsrenter er forventet nåverdi til en "marginal" investering som koster $\varepsilon$ i dag og som gir en nytte målt i penger lik $\varepsilon e^{\delta_t t}$ på tidspunkt t, gitt ved

[32] Med spotrenter menes her løpende årlige renter

[33] Eller alternativt at beslutningstakeren kun er interessert i forventet avkastning

$$ENV = E\left[-\varepsilon + \varepsilon e^{\delta_t t} e^{-\sum_{i=1}^{t} r_i}\right]$$

Når ENV settes lik null, får vi avkastningskravet som er den gjennomsnittlige avkastningen $\delta_t$ som investeringen må "matche" for at den skal gi en positiv nåverdi.

Avkastningskravet etter *t* perioder er da gitt ved[34]

$$(14)\quad e^{-\delta_t t} = E\left[e^{-\sum_{i=1}^{t} r_i}\right]$$

Størrelsen på dette avkastningskravet avhenger av hvordan spotrentene er korrelerte over tid. Det enkleste tilfellet er hvor de kortsiktige rentene er stasjonære, dvs. at de er identisk og uavhengig fordelte over tid. Dette impliserer

$$\delta_t = -lnE\left[e^{-r_1}\right]$$

Dette betyr at når markedsrentene er ukorrelerte over tid, vil den optimale diskonteringsrentekurven over tid være flat.

Den andre ytterligheten er at de er perfekt korrelerte over tid. I dette tilfellet er den optimale diskonteringsrenten gitt ved

$$e^{-\delta_t t} = E\left[e^{-r_t t}\right]$$

Dette betyr at

$$(15)\qquad \delta_t = -\frac{1}{t}\ln\, E\left[e^{-r_t t}\right]$$

Det kan vises[35] at $\delta_t$ er i dette tilfellet en fallende funksjon av *t*. Intuitivt kan det begrunnes med at permanente sjokk med hensyn til alternativkostnadene innebærer at den makroøkonomiske risikoen mht alternativavkastningen øker over tid. Denne

34 Dette bygger på C. Gollier, P. Koundoiri og T. Pantelidis, "Declining discount rates: Economic justifications and implications for long-run policy". Publisert i G. De Menil, R. Portes og H-W Sinn: *Economic Policy*, Wiley InterScience, 2009.

35 Se Weitzman, M (1998), "Why the Far Distant Should be Discounted at its Lowest Possible Rate", *Journal of Environmental Economics and Management,* 36, 201 – 208.

økningen i usikkerheten med hensyn til fremtidig lønnsomhet vil reflekteres i et lavere avkastningskrav.

Vi illustrerer dette ved et numerisk eksempel basert på betingelsen for optimalt avkastnings-krav gitt ved formel (15). Vi ser på to rentescenarioer der begge innebærer samme forventede rente, men at renteusikkerheten målt med variansen er forskjellig. I det ene scenarioet vil renten i hver periode anta verdiene 3 eller 6 pst med lik sannsynlighet, og i det andre er den 1 eller 8 pst med lik sannsynlighet. Innenfor hvert scenario er rentene perfekt korrelerte over tid. Forventet rente er 4,5 % i hver periode i begge scenarioer. Vi ser på hvordan effektiv rente varierer med tiden i begge scenarioene.

Fra tabellen kan vi merke oss følgende forhold. For det første ser vi at i begge scenarioene er den effektive renten en fallende funksjon av tiden. Rentekurven faller raskere i scenarioet med størst renteusikkerhet. For det andre går den effektive (sikkerhetsekvivalente) renten i begge scenarioer asymptotisk mot det laveste utfallet for renten når tidshorisonten går mot uendelig.

**Tabell 2** To rentescenarier med ulik spredning rundt forventningsverdi

| År | Rentescenario 1<br>3 % eller 6 % | Rentescenario 2<br>1 % eller 8 % |
|---|---|---|
| 10 | 4,38 | 3,9 |
| 20 | 4,28 | 3,36 |
| 30 | 4,17 | 2,93 |
| 40 | 4,07 | 2,59 |
| 50 | 3,98 | 2,23 |
| 60 | 3,9 | 2,13 |
| 70 | 3,82 | 1,98 |
| 80 | 3,76 | 1,86 |
| 90 | 3,71 | 1,77 |
| 100 | 3,64 | 1,69 |

Usikkerhet omkring renteutviklingen og persistensen med hensyn til rentesjokkene synes å være de viktigste driverne bak den fallende rentefunksjonen. Dette kan illustreres mer generelt ved hjelp av en autoregressiv modell for renteutviklingen[36]. Det antas at renten på tidspunkt t er gitt ved en første-ordens autoregressiv modell av formen

(16) $$r_t = c + a_t,\ \ a_t = pa_{t-1} + h_t$$

[36] Se Newell, R. og W. Pizer, "Discounting the Benefits of Climate Change Mitigation: How Much Do Uncertain Rates Increase Valuations?" *Journal of Environmental Economics and Management*, 2003, 46, 52-71

I (16) er $h_t$ identisk og uavhengig normalfordelt med forventning null og varians $\sigma_h^2$, og forventningsverdien $c$ til prosessen er normalfordelt med forventning $\bar{c}$ og varians $\sigma_c^2$. Jo høyere $\sigma_c^2$ er, desto høyere er usikkerheten om forventningsverdien til renten. Jo nærmere $p$ er 1 i tallverdi, desto mer persistent er den stokastiske renteutviklingen.

Det kan vises at den effektive renten for diskontering ned til tidspunkt 0 av verdier som realiseres på tidspunkt $t$, er gitt ved

(17) $$\delta_t = \bar{c} - t\sigma_c^2 - \sigma_h^2 f(p,t)$$

I (17) er $f(p,t)$ er en stigende funksjon i $p$ og $t$. Vi ser at den effektive renten faller med usikkerheten målt ved variansene til $c$ og $h$ og persistensen i renteutviklingen målt ved $p$. Om utvikling av markedsrentene hadde vært usystematisk ved at perioder med stigende renter hadde blitt avløst av perioder med fallende renter, ville den effektive diskonteringsrenten ha vært mer stabil over tid[37].

## 7.1. Rentebaserte avkastningskrav: Håndtering av prosjektspesifikk risiko

Nå tenker vi oss at prosjektet vil påvirke den systematiske risikoen knyttet til landets totale investeringsformue. Spørsmålet er om vi bør diskontere prosjektoverskuddet med den risikofrie renten eller med den usikre avkastningsraten for totalformuen eller med noe imellom de to. I analogi med kapitalverdimodellen som bygger på et alternativkostnadsresonnement, bør diskonteringsrenten avhenge av korrelasjonen mellom prosjektavkastningen og markedsavkastningen.

En krone investert i finansmarkedet som gir en nåverdi som er korrelert med nåverdien til avkastningen på markedsporteføljen, ville da gi en nåverdi gitt ved[38]

$$e^{-\bar{r}_e t} = e^{-rt} + \beta\left[e^{\bar{r}_M t} - e^{-rt}\right] = (1-\beta)e^{-rt} + \beta e^{-\bar{r}_M t}$$

der $\beta$ uttrykker korrelasjonen mellom *nåverdien* av avkastningen på finansinvesteringen og *nåverdien* av avkastningen på markedsporteføljen, $r$ er den risikofrie markedsrenten, og $\bar{r}_e$ og $\bar{r}_M$ er hhv gjennomsnittlig risikojustert diskonteringsrente og gjennomsnittlig

[37] Et eksempel på dette er såkalt "mean reversion"

[38] Denne betraktningen bygger på Weitzman, M. L.: " A Review of the Stern Review of Climatic Change". *Journal of Economic Literature,* (2007), Vol XLV No 3.

avkastning pr år på markedsporteføljen og *t* er tiden fra investeringstidspunktet. Dersom β= 0, blir nåverdien pr krone på referanseprosjektet $e^{-rt}$ mens den blir $e^{-\bar{r}_M t}$ for β=1. Generelt vil $e^{-\bar{r}_t t}$ være den benchmark mht nåverdi som en investering med risikoprofil gitt ved $\beta$ må konkurrere mot for kunne anses som samfunnsøkonomisk lønnsom.

Avkastningskravet som en lønnsom investering må møte, blir i henhold til dette gitt ved

$$\bar{r}_e = -\frac{\ln\left[\beta \exp(-\bar{r}_M t) + (1-\beta)\exp(-rt)\right]}{t}$$

der $\exp(\cdot)$ står for eksponensialfunksjonen. (Betaverdien er her å forstå som korrelasjon mellom nåverdier og ikke mellom spotrenter). Dette uttrykket for den risikojusterte diskonteringsrenten innebærer en fallende rente over tid.

Hvis vi antar en risikofri realrente på 2 %, en langsiktig reell gjennomsnittsavkastning på markedsporteføljen på 7 %, og en betaverdi på 0,5 får vi en risikojustert spotrente på 4,5 % og 4,0 % for betaverdi lik 0,4.

For ulike verdier for *t* får vi nedenstående risikojusterte diskonteringsrenter for $\beta$ lik hhv 0,5 og 0,4.

**Tabell 3** Avkastningskrav over tid, avhengig av betaverdi

| | $\beta$= 0,5 | $\beta$= 0,4 |
|---|---|---|
| t | $\bar{r}_e$ % | $\bar{r}_e$ % |
| 1 | 4,47 | 3,97 |
| 10 | 4,20 | 3,71 |
| 20 | 3,90 | 3,60 |
| 30 | 3,64 | 3,24 |
| 40 | 3,42 | 3,06 |
| 60 | 3,07 | 2,80 |
| 80 | 2,84 | 2,62 |
| 100 | 2,68 | 2,46 |

# 8. Fallende diskonteringsrenter og dynamisk konsistens

Vi har vist at under visse betingelser vil optimal diskonteringsrente være fallende over prosjektets tidshorisont. Varierende diskonteringsrenter over tid blir vanligvis assosiert med tidsinkonsistent planlegging når planen kan endres i hver periode[39]. Det gjelder spesielt også for investeringsplanlegging. Tidsinkonsistens betyr at en investering som anses som optimal på et bestemt tidspunkt, ikke lenger vil bli ansett som optimal på et senere tidspunkt uten at noe annet har skjedd enn at tiden har gått.

Det vil imidlertid være fornuftig å endre en på forhånd fastlagt plan dersom det inntreffer endringer i de eksterne rammebetingelser som er av betydning for planens lønnsomhet. Dette synes i og for seg å være nokså opplagt. Det kan en si er tilfelle når de usikre kortsiktige rentene som utgjør alternativkostnadene for den kapitalen som bindes i en langsiktig investering, endrer seg over tid. Det samme gjelder usikkerhet om den fremtidige konsumsituasjonen i den konsumbaserte modellen for optimal diskonteringsrente. Årsaker til tidsinkonsistent atferd over tid må derfor skyldes egenskaper ved beslutningstakerens intertemporale preferanser. Spesielt vil endring i beslutningstakerens tidspreferanserate gi opphav til dynamisk inkonsistens.

Det vises i appendiks II ved hjelp av et eksempel at fallende diskonteringsrente over tid er i samsvar med tidskonsistent atferd hvis beslutningstakerens tidspreferanserate mellom nytte i to på hverandre følgende perioder er konstant.

[39] Se Strotz, R. " Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization", *Review of Economic Studies,* 1965, 23, 165-180.

# 9. Hyperbolsk diskontering og intertemporale preferanser

I det forangående har vi analysert optimale avkastningskrav for investeringer og kartlagt forhold som gjør at effektiv diskonteringsrente vil være fallende over tid frem mot prosjektets tidshorisont. Dette vil for eksempel kunne være tilfelle dersom befolkningsvekst eller andre makroøkonomiske forhold gjør at per capita konsumet faller over tid. Videre vil både makroøkonomisk usikkerhet med hensyn til fremtidig konsumnivå, og usikkerhet knyttet til kapitalens fremtidige alternativavkastning kunne føre til fallende optimale diskonteringsrenter over tid. Analysene har vært baserte på eksponensiell diskontering i den forstand at diskonteringsfaktoren blir en eksponsialfunksjon der eksponenten er bestemt ved effektiv diskonteringsrente og tiden fra referansetidspunktet for nåverdien til tidspunktet for realisasjon av den størrelsen som skal diskonteres. I den senere tid er det imidlertid blitt reist spørsmål om den empiriske relevansen av antagelsen om at det kun er tidsspennet mellom referansetidspunktet og tidspunktet for realiseringen av det aktuelle beløpet som er relevant for verdsettingen av fremtidige økonomiske størrelser.

Resultater fra eksperimentelle studier og empiriske observasjoner synes å indikere at det er forskjeller mellom folks langsiktige intensjoner og deres kortsiktige handlinger. For valg mellom handlinger med konsekvenser som ligger langt frem i tid, har de fleste en tilbøyelighet til å utvise større tålmodighet enn for handlinger med konsekvenser som ligger nært i tid. For eksempel gir eksperimenter klar støtte til hypotesen om at individer er mer sensitive med hensyn til utsettelse av konsum på kort sikt enn på lang sikt. Dette leder til det fenomenet som går under betegnelsen dynamisk inkonsistens i form av reversering av preferanser over tid mellom aktuelle alternativer. Det innebærer at planer som er optimale på tidspunkt $t$, ikke lenger nødvendigvis vil være optimale på et senere tidspunkt selv om de økonomiske rammebetingelsene for planenes gjennomføring er uendret. Det eneste som da har skjedd, er at konsekvensene av planene har rykket nærmere i tid.

Et illustrerende eksempel er et individ som på grunn av sterk tidspreferanse foretrekker ett eple i dag fremfor to epler i morgen, men kan foretrekke 2 epler om 51 dager fremfor 1 eple om 50 dager[40]. Nyttetapet ved å vente oppfattes dermed som større jo nærmere det ligger i tid. Dette indikerer at tidspreferanseraten må være fallende over tid.

---

[40] Thaler, R. (1981), "Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency", *Economic Letters"*, **8**, 201-207.

Vi skal her se nærmere på egenskaper ved intertemporale preferanser som kan gi fallende diskonteringsrenter over tid. Dette går under betegnelsen hyperbolsk diskontering. En slik intertemporal preferansestruktur innebærer at den marginale avveining mellom konsum i dag og konsum i neste periode (mellom periode t og t+1), er forskjellig på kort og lang sikt. Siden den marginale tidspreferanseraten vil være fallende over tid (jf epleeksemplet ovenfor), impliserer det at en vil foretrekke å utsette kostnader og framskynde gevinster. Dagligdagse eksempler på dette er legio. La som eksempel anta en får time hos tannlegen for rotfylling om en måned, og at en på spørsmål om hva en vil foretrekke av onsdag eller torsdag, sier at det blir det samme. Men når den aktuelle uken kommer, er det nokså menneskelig å ønske at en hadde valgt torsdag i stedet for onsdag. Preferansen for ukedag har da endret seg på grunn av at ubehaget som følge av behandlingen er nært forestående, og personens opprinnelige valg er ikke lenger optimalt. Atferden er med andre ord dynamisk inkonsistent.

Dynamisk inkonsistens blir gjerne forbundet med manglende evne til å holde fast ved planer som er fattet i fortiden. En potensiell årsaksfaktor kan være at preferansene endrer seg over tid som følge av avhengighetsskapende konsum. Notoriske eksempler er tobakk, alkohol og narkotika. De fleste røykere kjenner det velkjente nyttårsforsettet om å kutte røyking innen en bestemt dato i det kommende år. Men når tidspunktet nærmer seg, blir det stadig skjøvet ut i tid [41]. For å løse slike problemer trengs det en eller annen form for ”mastebinding”[42]. Bindingsproblematikk vil imidlertid ikke bli drøftet nærmere i denne sammenheng. Her skal vi se på hvordan hyperbolsk diskontering forholder seg til eksponensiell diskontering.

Dersom $u(c)$ er nyttefunksjonen av konsumnivået $c$ og $\phi(t)$ er diskonteringsfaktoren som funksjon av tiden frem til tidspunktet for konsumet av $c$, er nåverdien av nytten gitt ved $u(c)\phi(t)$. Siden en forsinkelse av konsumet antas å innebære en større reduksjon i nåverdien av nytten jo nærmere den ligger i tid, følger det at forskjellen mellom to gitte konsumnivåer vil være mer utslagsgivende for preferansene mellom dem jo lengre ut i tid de ligger. La oss anta at en person er indifferent mellom å få $x > 0$ straks og $y > x$ på et senere tidspunkt $t$. Hvis nyttefunksjonen er gitt ved $u$ og $u' > 0$, og $\phi(t)$ er diskonteringsfunksjonen, betyr det at $u(x) = u(y)\ \phi(t)$. Når en er mer sensitiv med hensyn til en gitt forsinkelse jo nærmere den ligger i tid, innebærer det at vurdert på tidspunktet $t+s$, $s>0$, vil $u(x)\ \phi(t) < u(y)\ \phi(t+s)$ for $s > 0$. En diskonteringsfunksjon

41 Jf uttrykket ”nå eller aldri”.

42 Jf drøftingen i Jon Elster, *Ulysses and the Sirens*, (1979), Cambridge University Press.

som tilfredsstiller dette kravet er for eksempel funksjonen for en hyperbel[43] gitt ved $\phi(t) = 1/t$[44].

Dette innebærer at det marginale nyttemessige bytteforholdet mellom konsum i dag og konsum i neste periode blir mindre jo lenger ute i tid det ligger. Dette vil ikke være tilfelle med eksponensiell diskontering av fremtidig nytte med en diskonteringsfunksjon av typen $e^{-\rho t}$, der det marginale bytteforholdet mellom nytte i dag og nytte i neste periode, gitt ved diskonteringsfaktoren $e^{-\rho}$, er uavhengig av *t*.

Hyperbolske tidspreferanser bygger på at det er relativ tid og ikke absolutt tid som styrer verdsetting av fremtidige økonomiske størrelser. Den relative tiden er gitt ved resterende tid frem til realisasjonstidspunktet. Denne ventetiden vil være mindre enn den absolutte tiden målt fra referansetidspunktet som for eksempel gitt ved tidspunkt 0. Det innebærer at sammenlignet med eksponensiell diskontering blir det lagt større vekt på konsekvenser som ligger langt ut tid. På den annen side kan også usikkerhet med hensyn til eksterne makroøkonomiske rammebetingelser på konsum- eller rentesiden føre til fallende diskonteringsrente over tid. Men det skyldes egenskaper ved diskonteringsfunksjonen (rentebasert diskontering) eller individets risikoaversjon (konsumbasert diskontering) i motsetning til hyperbolsk diskontering som skyldes at individets tidspreferanse er en fallende funksjon av tiden sett fra referansetidspunktet.

Et eksempel kan klarlegge forskjellen mellom eksponensiell diskontering og diskontering basert på hyperbolske tidspreferanser. Anta at det diskonteres i diskret tid slik at med konstant rentesats *r* er diskonteringsfaktoren på tidspunkt *t* gitt ved potensfunksjonen $\phi(t) = (1+r)^{-t}$. Et eksempel på hyperbolsk diskontering er gitt ved diskonteringsfaktoren $\tilde{\phi}(t) = (1+tr)^{-1}$ der *t* er antall perioder frem til realisasjonstidspunktet. Vi har da at $\tilde{\phi}(1) = \phi(1)$ og $\tilde{\phi}(t) > \phi(t)$ for alle $t > 1$. Vi ser også at den marginale avveining mellom nytte på tidspunkt *t* og t+1 er konstant lik $(1+r)^{-1}$ med geometrisk diskontering[45] mens den ved hyperbolsk diskontering er $(1+rt)^{-1}/(1+r(t+1))^{-1}$ som er en fallende funksjon av *t*.

Det kan mer generelt vises at dersom $y > x$ og $x$ kommer først i tid, og forsinkelsen som skal til for å utligne nyttedifferansen mellom de to utfallene er en lineær funksjon av tiden frem til det dårligste utfallet, må diskonteringsfaktoren ligge i mellom

43 Herav uttrykket hyperbolsk diskontering

44 Basert på studier av dyreatferd, synes dyrs tidspreferanser å kunne representeres ved en slik diskonteringsfunksjon. Se Ainslie, G., "Specious Reward: A Behavioral Theory of Impulsiveness and Impulse Control", 1975, *Psycholocical Bulletin*, 463-509.

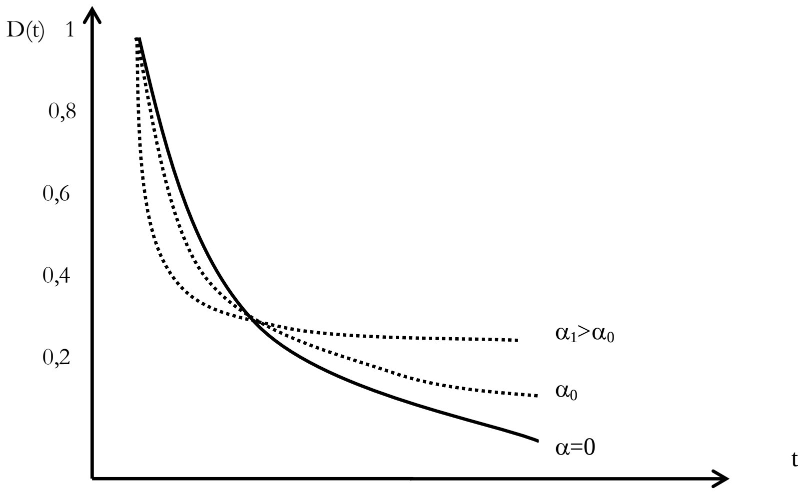
45 Geometrisk diskontering i diskret tid svarer til eksponensiell diskontering i kontinuerlig tid

diskonteringsfaktoren for eksponensiell eller hyperbolsk diskontering med disse to som yttergrenser[46] . Disse mulighetene kan representeres ved diskonteringsfunksjonen

(18) $\varphi(t) = (1 + \alpha t)^{-r/\alpha}$ $\alpha, \beta > 0$.

Parameteren $\alpha$ uttrykker i hvor stor grad denne diskonteringsfunksjonen avviker fra eksponensiell diskontering med konstant rente *r*. Grensetilfellet der $\alpha$ går mot null er eksponensiell diskontering gitt ved[47] $\phi(t) = e^{-rt}$

Nedstående figur viser det typiske forløpet til diskonteringsfaktoren D(t) over tid svarende til eksponensiell diskontering (heltrukket kurve) og forløpet til to diskonteringsfunksjoner avledet fra hyperbolske preferanser (prikkete kurver). Når $\alpha$ går mot null, går diskonteringsfunksjonen mot en eksponensialfunksjon med konstant rente, mens den går mot en stepfunksjon når $\alpha$ går mot uendelig.




**Figur 3** Diskonteringsfaktorens tidsforløp for ulike diskonteringsfunksjoner

Vi ser at kurven basert på hyperbolsk diskontering flater ut etter et visst antall år. Følgelig blir det via diskonteringen lagt relativt større vekt på fremtidige størrelser i forhold til eksponensiell diskontering som impliserer en konstant marginal tidspreferanserate. Siden tidspreferanseraten endrer seg over tid med hyperbolsk diskontering, kan det være slik at

46 Fishburn, O.C. and A. Rubinstein, (1982), "Time Preference", *International Economic Review,* 677-697.

47 Loevenstein, G. and D. Prelec, (1982), "Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation", *Quarterly Journal of Economies, 573- 597.*

en på et senere tidspunkt vil ønske fravike en plan som ble betraktet som optimal på et tidligere tidspunkt. Dersom en i tilfellet med tidsinkonsistente preferanser ønsker å gardere seg mot slik dynamisk inkonsistens, kan en legge begrensninger på mulighetsområdet slik at det kun omfatter planer som er dynamisk konsistente.

# 10. Konkluderende merknader

Denne utredningen har tatt for seg forskjellige teoretiske tilnærminger til verdsetting av økonomiske størrelser som ligger langt frem i tid og hvilke diskonteringsrenter som kan utledes av slik verdsetting. Diskonteringsrenten reflekterer alternativkostnaden ved å binde kapital i investeringsprosjekter, og utredningen diskuterer spesielt forhold som fører til at den gjennomsnittlige diskonteringsrenten pr år blir fallende over tid sett fra investeringstids-punktet. Det vises at voksende usikkerhet over tid med hensyn til fremtidig konsumvekst og velstandsutvikling vil under plausible forutsetninger føre til en fallende kurve for diskonteringsrenten over tid når investeringen finansieres ved redusert konsum på investeringstidspunktet. Den samme fallende tidsstruktur er tilfelle for optimal diskonteringsrente gitt ved alternativavkastningen i finansmarkedet når fremtidige markedsrenter er usikre og det er noen grad av seriekorrelasjon i renteutviklingen over tid. Det gjelder selv om selve prosjektavkastningen isolert sett er risikofri.

Varierende gjennomsnittlige diskonteringsrenter over tid blir vanligvis assosiert med tidsinkonsistent planlegging når planen kan endres i hver periode[48]. Det gjelder også for investeringsplanlegging. Tidsinkonsistens betyr at en investering som anses som optimal på et bestemt tidspunkt, ikke lenger vil bli ansett som optimal på et senere tidspunkt uten at noe annet har skjedd enn at tiden har gått.

Det vil imidlertid være fornuftig å endre en på forhånd fastlagt plan dersom det inntreffer endringer i de eksterne rammebetingelser som er av betydning for planens lønnsomhet. Dette synes i og for seg å være nokså opplagt. Det kan en si er tilfelle når de usikre kortsiktige rentene som utgjør alternativkostnadene for den kapitalen som bindes i en langsiktig investering, endrer seg over tid. Det samme gjelder usikkerhet om den fremtidige konsumsituasjonen i den konsumbaserte modellen for optimal diskonteringsrente. Årsaker til tidsinkonsistent atferd over tid må derfor skyldes egenskaper ved beslutningstakerens preferanser over tid. Spesielt vil endring i beslutningstakerens tidspreferanserate over tid kunne gi opphav til dynamisk inkonsistens. Det vises i appendiks II ved hjelp av et eksempel at fallende diskonteringsrente over tid er i samsvar med tidskonsistent atferd hvis beslutningstakerens tidspreferanserate er konstant over tid.

48 Se Strotz, R. " Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization", *Review of Economic Studies,* 1965, 23, 165-180.

# Appendiks

## Appendiks I

Ramsey modellen[49] for optimal økonomisk vekst.
Vi antar her at vi har en samfunnsøkonomisk velferdsfunksjon representert ved en sum over tid av nytten av konsumet for en representativ konsument. Velferden blir maksimert over en uendelig tidshorisont der nytten diskonteres med tidsuavhengige renten $\rho$ [50].
Formulert i kontinuerlig tid kan objektfunksjonen skrives som

(i) $$U(c(t)) = \int_0^{\infty} u(c(t))e^{-\rho t}dt$$

der c(t) er konsum for den representative konsument på tidspunkt t, og u(c(t)) er nytten på tidspunkt t med egenskapen u'(•) > 0, u"(•) ≤ 0. Denne formuleringen forutsetter at alle konsumenter er like som innebærer at vi ser bort fra fordelingsspørsmål.

Vi definerer k(t) som produksjonskapitalen på tidspunkt t som gir et output på f(k(t)) som kan benyttes til konsum eller investering. For enkelhets skyld ser vi bort fra befolkningsvekst, depresiering av kapital og teknologiske endringer. Tidsutviklingen for kapitalen er gitt ved relasjonen

(ii) $$\frac{dk(t)}{dt} = f(k(t)) - c(t)$$

Maksimering av (i) under hensyn til restriksjonen gitt ved (ii) kan løses som et variasjonsproblem. Euler-betingelsen til maksimeringsproblemet er da gitt ved

(iii) $$u'(c(t))f'(k(t)) + u''(c(t))c(t)\frac{dc(t))}{dt} - \rho u'(c(t)) = 0$$

Vi definerer følgende størrelser

$g_t = \frac{dc(t)}{dt}\frac{1}{c(t)}$ = relativ konsumvekst pr konsument på tidspunkt t.

$\eta = -\frac{u''}{u'}c$ (t) = elastisiteten til grensenytten som er definert positiv (absoluttverdi) og antatt å være tidsinvariant.

Vi dividerer alle uttrykk i (iii) med u'(c(t)), og tar hensyn til at langs en optimal investeringsbane vil vi ha at f'(k(t)) er lik diskonteringsrenten r når optimale investeringer maksimerer nåverdien gitt denne renten.

49 Ramsey, *op cit.*

50 I Ramsey-modellen er $\rho$ satt lik null.

Vi får dermed den såkalte Ramsey-betingelsen for optimal kapitalakkumulasjon over tid gitt ved.

(iv) $r_t = \rho + \eta g_t$

## Appendiks II [51]

Vi ser på modellen for optimal sparing i en modell med 3 perioder. Vi skal vise at en optimal spareplan kan være tidskonsistent også i tilfellet med fallende diskonteringsrenter. Vi lar $w$ stå for initial formue, $c_t$ for konsum i periode $t = 0,1,2$ og ☐ er tidspreferanseraten på tidspunkt t, dvs gjennomsnittlig diskonteringsrate pr år for diskontering av nytte fra tidspunkt $t$ til tidspunkt 0. Funksjonen $u(c_t)$ står for nytten av konsum i periode $t$ og $r_t$ for gjennomsnittlig diskonteringsrente pr år for konsum i periode $t$. Konsumentens optimeringsproblem kan da formuleres på følgende måte

$$Max\ u(c_0) + e^{-\rho_1} u(c_1) + e^{-2\rho_2} u(c_2)$$

under budsjettbetingelsen $c_0 + e^{-r_1} c_1 + e^{-2r_2} c_2 = w$

Konsumenten har tidskonsistente preferanser dersom $\rho = \rho_2 = \rho$. Vi lar $\lambda$ stå for Langrange-multiplikatoren til budsjettbetingelsen. Førsteordensbetingelsen for optimum kan da skrives som

(16) $\lambda = e^{(r_1 - \rho_1)} u'(c_1) = e^{2(r_2 - \rho_2)} u'(c_2)$

Fra (16) har vi at $u'(c_1) = e^{2(r_2 - \rho_2) - (r_1 - \rho_1)} u'(c_2)$
Dette gir en optimal konsumplan $(c_0^*, c_1^*, c_2^*)$. Anta så at konsumenten re-optimerer sin spareplan etter at ett år er gått. Spørsmålet er da om planen $(c_1^*, c_2^*)$ fortsatt er optimal. Vi får nå optimeringsproblemet

$$Max\ u(c_1) + e^{-\rho_1} u(c_2)$$

under budsjettbetingelsen
$$c_1 + e^{-\hat{r}} c_2 = e^{-r_1}(w - c_1^*)$$

[51] Eksemplet er hentet fra Gollier et al (2009). *Op. cit.*

Etter ett år er nå den opprinnelige andre perioden blitt første periode. Her er nå $\hat{r}$ den kortsiktige renten i siste periode. Diskonteringsfaktoren i siste periode blir da $e^{-\hat{r}}$ mens den i det opprinnelige problemet var $e^{-r_1}$ i periode 1 og $e^{-r_2}$ i periode 2, der $r_2$ er gjennomsnitts-renten pr år. Den effektive spotrenten i periode 2 finner vi ved å ta logaritmen til forholdet mellom diskonteringsfaktorene, dvs $\ln(e^{-r_1}/e^{-2r_2}) = 2r_2 - r_1$. I optimum må vi ha at $\hat{r} = 2r_2 - r_1$, ellers ville en kunne oppnå en arbitrasjegevinst ved å flytte konsum mellom de to periodene.

Første ordensbetingelsen for det reduserte problemet blir

(17) $$\hat{\lambda} = u'(c_1) = e^{(\hat{r}-\rho_1)}u'(c_2)$$

Uttrykket på høyresiden i (16) og (17) er like dersom $\hat{r}_1 - \rho_1 = 2(r_2 - \rho_2) - (\hat{r} - \rho_1)$. Dette er oppfylt hvis og bare hvis $\rho_1 = \rho_2$. Dette betyr at tidskonsistent planlegging krever tidskonsistente preferanser, men ikke nødvendigvis eksponensiell diskontering med konstant rente. Følgelig kan en fallende diskonteringsrente over tid være forenlig med tidskonsistent planlegging.

# Concept rapportserie

Papirtrykk: ISSN 0803-9763
Elektronisk utgave på internett: ISSN 0804-5585
Lastes ned fra: www.concept.ntnu.no/publikasjoner/rapportserie

| Rapport | Tittel | Forfatter |
|---|---|---|
| Nr. 1 | Styring av prosjektporteføljer i staten. Usikkerhetsavsetning på porteføljenivå<br>*Project Portfolio Management. Estimating Provisions for Uncertainty at Portfolio Level.* | Stein Berntsen og Thorleif Sunde |
| Nr. 2 | Statlig styring av prosjektledelse. Empiri og økonomiske prinsipper.<br>*Economic Incentives in Public Project Management* | Dag Morten Dalen, Ola Lædre og Christian Riis |
| Nr. 3 | Beslutningsunderlag og beslutninger i store statlige investeringsprosjekt<br>*Decisions and the Basis for Decisions in Major Public Investment Projects* | Stein V. Larsen, Eilif Holte og Sverre Haanæs |
| Nr. 4 | Konseptutvikling og evaluering i store statlige investeringsprosjekt<br>*Concept Development and Evaluation in Major Public Investment Projects* | Hege Gry Solheim, Erik Dammen, Håvard O. Skaldebø, Eystein Myking, Elisabeth K. Svendsen og Paul Torgersen |
| Nr. 5 | Bedre behovsanalyser. Erfaringer og anbefalinger om behovsanalyser i store offentlige investeringsprosjekt<br>*Needs Analysis in Major Public Investment Projects. Lessons and Recommendations* | Petter Næss |
| Nr. 6 | Målformulering i store statlige investeringsprosjekt<br>*Alignment of Objectives in Major Public Investment Projects* | Ole Jonny Klakegg |
| Nr. 7 | Hvordan trur vi at det blir? Effektvurderinger av store offentlige prosjekt<br>*Up-front Conjecture of Anticipated Effects of Major Public Investment Projects* | Nils Olsson |
| Nr. 8 | Realopsjoner og fleksibilitet i store offentlige investeringsprosjekt<br>*Real Options and Flexibility in Major Public Investment Projects* | Kjell Arne Brekke |
| Nr. 9 | Bedre utforming av store offentlige investeringsprosjekter. Vurdering av behov, mål og effekt i tidligfasen<br>*Improved Design of Public Investment Projects. Up-front Appraisal of Needs, Objectives and Effects* | Petter Næss med bidrag fra Kjell Arne Brekke, Nils Olsson og Ole Jonny Klakegg |
| Nr. 10 | Usikkerhetsanalyse – Kontekst og grunnlag<br>*Uncertainty Analysis – Context and Foundations* | Kjell Austeng, Olav Torp, Jon Terje Midtbø, Ingemund Jordanger, og Ole Morten Magnussen |
| Nr. 11 | Usikkerhetsanalyse – Modellering, estimering og beregning<br>*Uncertainty Analysis – Modeling, Estimation and Calculation* | Frode Drevland, Kjell Austeng og Olav Torp |
| Nr. 12 | Metoder for usikkerhetsanalyse<br>*Uncertainty Analysis – Methodology* | Kjell Austeng, Jon Terje Midtbø, Vidar Helland, Olav Torp og Ingemund Jordanger |

## Concept rapportserie

Papirtrykk: ISSN 0803-9763
Elektronisk utgave på internett: ISSN 0804-5585
Lastes ned fra: www.concept.ntnu.no/publikasjoner/rapportserie

| Rapport | Tittel | Forfatter |
|---|---|---|
| Nr. 13 | Usikkerhetsanalyse – Feilkilder i metode og beregning<br>*Uncertainty Analysis – Methodological Errors in Data and Analysis* | Kjell Austeng, Vibeke Binz og Frode Drevland |
| Nr. 14 | Positiv usikkerhet og økt verdiskaping<br>*Positive Uncertainty and Increasing Return on Investments* | Ingemund Jordanger |
| Nr. 15 | Kostnadsusikkerhet i store statlige investeringsprosjekter; Empiriske studier basert på KS2<br>*Cost Uncertainty in Large Public Investment Projects. Empirical* Studies | Olav Torp (red.), Ole Morten Magnussen, Nils Olsson og Ole Jonny Klakegg |
| Nr. 16 | Kontrahering i prosjektets tidligfase. Forsvarets anskaffelser.<br>*Procurement in a Project's Early Phases. Defense Aquisitions* | Erik N. Warberg |
| Nr. 17 | Beslutninger på svakt informasjonsgrunnlag. Tilnærminger og utfordringer i prosjekters tidlige fase<br>*Decisions Based on Scant Information. Challenges and Tools During the Front-end Phases of Projects* | Kjell Sunnevåg (red.) |
| Nr. 18 | Flermålsanalyser i store statlige investeringsprosjekt<br>*Multi-Criteria Decision Analysis In Major Public Investment Projects* | Ingemund Jordanger, Stein Malerud, Harald Minken, Arvid Strand |
| Nr. 19 | Effektvurdering av store statlige investeringsprosjekter<br>*Impact Assessment of Major Public Investment Projects* | Bjørn Andersen, Svein Bråthen, Tom Fagerhaug, Ola Nafstad, Petter Næss og Nils Olsson |
| Nr. 20 | Investorers vurdering av prosjekters godhet<br>*Investors' Appraisal of Project Feasibility* | Nils Olsson, Stein Frydenberg, Erik W. Jakobsen, Svein Arne Jessen, Roger Sørheim og Lillian Waagø |
| Nr. 21 | Logisk minimalisme, rasjonalitet - og de avgjørende valg<br>*Major Projects: Logical Minimalism, Rationality and Grand Choices* | Knut Samset, Arvid Strand og Vincent F. Hendricks |
| Nr. 22 | Miljøøkonomi og samfunnsøkonomisk lønnsomhet<br>*Environmental Economics and Economic Viability* | Kåre P. Hagen |
| Nr. 23 | The Norwegian Front-End Governance Regime of Major Public *Projects – A Theoretically Based Analysis and Evaluation* | Tom Christensen |
| Nr. 24 | Markedsorienterte styringsmetoder i miljøpolitikken<br>*Market oriented approaches to environmental policy* | Kåre P. Hagen |
| Nr. 25 | Regime for planlegging og beslutning i sykehusprosjekter<br>*Planning and Decision Making in Hospital Projects. Lessons with the Norwegian Governance Scheme.* | Asmund Myrbostad, Tarald Rohde, Pål Martinussen og Marte Lauvsnes |

## Concept rapportserie

Papirtrykk: ISSN 0803-9763
Elektronisk utgave på internett: ISSN 0804-5585
Lastes ned fra: www.concept.ntnu.no/publikasjoner/rapportserie

| Rapport | Tittel | Forfatter |
|---|---|---|
| Nr. 26 | Politisk styring, lokal rasjonalitet og komplekse koalisjoner. Tidligfaseprosessen i store offentlige investeringsprosjekter<br>*Political Control, Local Rationality and Complex Coalitions. Focus on the front-end of large public investment projects* | Erik Whist, Tom Christensen |
| Nr. 27 | Verdsetting av fremtiden. Tidshorisont og diskonteringsrenter<br>*Valuing the future. Time horizon and discount rates* | Kåre P. Hagen |

Concept rapport Nr 27

www.concept.ntnu.no

Tapir Uttrykk Miljøfyrtårn Nasjonalt sertifikat: 1660



Forskningsprogrammet Concept skal utvikle kunnskap som sikrer bedre ressursutnytting og effekt av store, statlige investeringer. Programmet driver følgeforskning knyttet til de største statlige investeringsprosjektene over en rekke år. En skal trekke erfaringer fra disse som kan bedre utformingen og kvalitetssikringen av nye investeringsprosjekter før de settes i gang.

Concept er lokalisert ved Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet i Trondheim (NTNU), ved Fakultet for ingeniørvitenskap og teknologi. Programmet samarbeider med ledende norske og internasjonale fagmiljøer og universiteter, og er finansiert av Finansdepartementet.

*The Concept research program aims to develop know-how to help make more efficient use of resources and improve the effect of major public investments. The Program is designed to follow up on the largest public projects over a period of several years, and help improve design and quality assurance of future public projects before they are formally approved.*

*The program is based at The Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Faculty of Engineering Science and Technology. It cooperates with key Norwegian and international professional institutions and universities, and is financed by the Norwegian Ministry of Finance.*

**Address:**
The Concept Research Program
Høgskoleringen 7A
N-7491 NTNU
Trondheim
NORWAY

Tel.: +47 73594670
Fax.: +47 73597021

ISSN: 0803-9763
ISBN: 978-82-92506-93-6

NTNU
Det skapende universitet

concept