NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK 3004 Videregående matematisk analyse

Faglig kontakt under eksamen: Anders Skonhoft

Tlf.: 73 59 19 39

Eksamensdato: 14. desember 2015

Eksamenstid (fra-til): 5 timer (09.00-14.00)

Sensurdato: 14. januar 1.2015

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin. Godkjent kalkulator Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College eller HP 30S.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (inkl forside): 3

Antall sider vedlegg: 0

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2015)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (25%) De årlige inntektene fra en oljebrønn er idag ($t = 0$) på 1 million kroner. Anta at inntektene vokser over tid. På tidspunkt t er inntektene (i millioner kroner) gitt ved $f(t) = 1 + at$, hvor $a = 0{,}4$. Oljebrønnen er tom etter 10 år ($t = 10$). Anta "kontinuerlig tid".

a) Beregn hvor stor samlet inntekt oljebrønnen gir.

Den kontinuerlig forrentede renten $r = 0{,}05$.

b) Beregn nåverdien av inntektene fra oljebrønnen.

c) Hvordan påvirkes nåverdien hvis renten r øker?

d) Formuler nåverdiberegningen i diskret tid.

Oppgave 2 (25%) Gitt matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

a) For hvilke verdier av a har matrisen $\mathbf{A}$ en invers?

b) Anta at a er slik at den invesrse til $\mathbf{A}$ eksisterer. Finn $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Vis at $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, hvor $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen.

d) Finn egenverdiene til matrisen $\mathbf{A}$.

e) For hvilke verdier av a er egenverdiene til matrisen $\mathbf{A}$ reelle?

f) Betrakt egenverdiene du fant i spørsmål d). Vis at $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$.

g) Betrakt egenverdiene du fant i spørsmål d). Vis at $\lambda_1\lambda_2 = |\mathbf{A}|$.

Oppgave 3 (25%) Betrakt følgende rovdyr ('rev') - byttedyr ('hare') sammenheng:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma y(t) + \eta y(t)x(t), \qquad (2)$$

hvor α, β, γ og η er positive.

a) Finn likevektene.

b) Finn isoklinene, lag faseromsdiagram og diskuter stabiliteten.

c) Analyser også stabiliteten ved å bruke Jacobi-matrisen.

Oppgave 4 (25%) Betrakt nyttemaksimeringsproblemet:

$$\max_{x,y} U = xy + 5x + y \quad \text{u.b.b.} \quad px + qy \leq m, \quad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0.$$

a) Hvordan ser indifferenskurvene ut?

b) Still opp førsteordensbetingelsene for problemet, og analyser de ulike løsningsmulighetene.

c) Anta så en indre løsning, $x > 0$, $y > 0$. Finn etterspørselsfunksjonene og den indirekte nyttefunksjonen i dette tilfellet. Diskuter hvordan priser og inntekt påvirker den indirekte nytten.

d) Vis til slutt tolkningen av skyggeprisen for budsjettrestriksjonen.