LØSNINGSFORSLAG SØK 3004 VÅR 2024

1a) $\int (x + x^3 + x^5)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + C$

1b) $\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + C$

1c) BRUKER TO GANGER DELVIS INTEGRASJON

$$f = x^2,\ f' = 2x,\ g' = e^{-x},\ g = -e^{-x}$$

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} - \left[\int 2x\,(-e^{-x})\,dx\right]$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx \quad 1$$

$\int x e^{-x}\,dx$ LØSES VED DELVIS INTEGRASJON.

$f = x, \; f' = 1, \; g' = e^{-x}, \; g = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x} dx = -xe^{-x} - \left[\int 1 \cdot (-e)^{x} dx \right]$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} \quad (2)$$

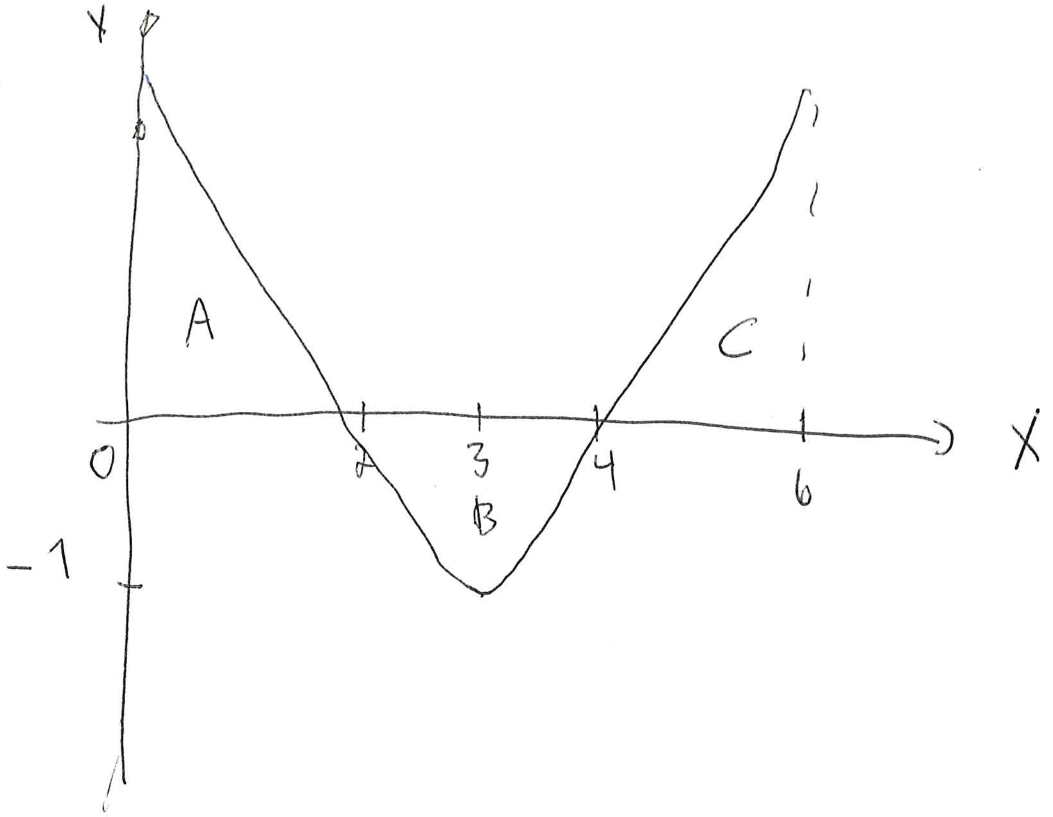
SETTER (2) INN I (1):

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\left[x^2 + 2x + 2 \right] + C$$

1d)



AREALET BESTÅR AV 3 DELER. B LIGGER UNDER X-AKSEN OG MÅ DERFOR SNU FORTEGNET TIL INTEGRALET.

$$\int \left[(x-3)^2-1\right] dx = \frac{(x-3)^3}{3} - x + C$$

KAN SETTE $C=0$ DA VI HAR BESTEMT INTEGRAL.

$$\Rightarrow \int \left[(x-3)^2-1\right] dx = \frac{(x-3)^3}{3} - x$$

$$A = \left[\frac{(x-3)^3}{3} - x \right]_0^2 = -\frac{1}{3} - 2 - \left[-\frac{27}{3} - 0 \right]$$

$$= 9 - 2\tfrac{1}{3} = 6\tfrac{2}{3}$$

$$B = -\left[\frac{(x-3)^3}{3} - x \right]_2^4 = -\left[\frac{1}{3} - 4 \right] + \left[-\frac{1}{3} - 2 \right]$$

$$= -\frac{1}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 2 = 1\tfrac{1}{3}$$

$$C = \left[\frac{(x-3)^3}{3} - x \right]_4^6 = \frac{27}{3} - 6 - \left[\frac{1}{3} \quad 4 \right]$$

$$= 9 - 6 - \frac{1}{3} + 4 = 6\tfrac{2}{3}$$

ARealet $= A + B + C = 6\tfrac{2}{3} + 1\tfrac{1}{3} + 6\tfrac{2}{3}$

$= 14\tfrac{2}{3}$

2a)

$$A+B = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7\cdot 2 - 1\cdot 4 & 7\cdot(-6) - 1\cdot(-1) \\ 4\cdot 2 + 4\cdot 4 & 4\cdot(-6) + 4\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -41 \\ 24 & -28 \end{bmatrix}$$

$$DET(A) = 7\cdot 4 - 4\cdot(-1) = 32$$

$$DET(B) = 2\cdot(-1) - 4\cdot(-6) = 22$$

$$\mathrm{DET}(AB) = \mathrm{DET}(A)\,\mathrm{DET}(B) =$$

$$32 \cdot 22 = 704$$

2b)

$$CD = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 4 & 0\cdot 3 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 4 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 - 2\cdot 1 + 5\cdot 4 & 0\cdot 3 - 2\cdot 1 + 5\cdot 2 & 0\cdot(-1) - 2\cdot 1 + 5\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 18 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det(CD) = \det(C) \cdot \det(D)$

SIDEN C HAR EN KOLONNE MED BARE NULLER, BLIR $\det(C) = 0$.

$\Rightarrow \det(CD) = 0$. ALTSÅ ER RANGEN TIL $CD < 3$.

MANGE UNDERMATRISER 2×2 HAR DET $\neq 0$.

FOR EKSEMPEL, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$.

$\Rightarrow$ RANGEN TIL $CD = 2$.

RANGEN ER ANTALL UAVHENGIGE KOLONNE-VEKTORER. CD HAR ALTSÅ TO UAVHENGIGE KOLONNEVEKTORER.

EGENVEKTORENE ER GITT VED :

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$\lambda = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - 1\cdot(-8)} = 1 \pm \sqrt{9} = 4, -2$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -2$$

1. $\lambda_1 = 4$

$$(A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-4 & -3 \\ -3 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -3X_1 - 3X_2 &= 0 \\ -3X_1 - 3X_2 &= 0 \end{aligned}\right\} X_1 = -X_2$$

EIGENVEKTOREN $= t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $\lambda_2 = -2$

$$(A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-(-2) & -3 \\ -3 & 1-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3X_1 - 3X_2 = 0 \\ -3X_1 + 3X_2 = 0 \end{array}\right\} X_1 = X_2$$

EIGENVEKTOREN $= s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3a)

$a(t) = 2 \quad b(t) = t$

INTEGRERENDE FAKTOR $= e^{2t}$

$$\underbrace{\dot{x}e^{2t} + 2xe^{2t}}_{\frac{d\left[xe^{2t}\right]}{dt}} = te^{2t}$$

$$\Rightarrow xe^{2t} = \int te^{2t}\,dt + C$$

$$\Rightarrow x = e^{-2t}\int te^{2t}\,dt + Ce^{-2t}$$

$\int te^{2t}\,dt$ FINNES VED DELVIS INTEGRASJON.

$f = t,\ f' = 1 \quad e^{2t} = g',\ g = \frac{1}{2}e^{2t}$ (1)

$$\int t e^{2t}\,dt = t \cdot \frac{1}{2}e^{2t} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2t}\,dt$$

$$= \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} \quad (2)$$

SETTER INN FOR (2) I (1):

$$X = e^{-2t} \cdot \left[\frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\right] + Ce^{-2t}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2t}$$

3b)

$$\frac{dx}{dt} = -t \cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = -t \cdot dt$$

$$\Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{C}$$

$t = 0$ GIR $x = 1 \Rightarrow$

$$1 = 1 \cdot e^{C} \Rightarrow C = 0$$

$$x = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

3c) LIKEVEKTSPUNKTET FINNES VED Å SETTE $\dot{X} = \dot{Y} = 0$.

$$-2X + Y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$-X + 2Y - Y = 0 \quad (2)$$

MULTIPLISERER (1) MED 2 OG TREKKER FRA (2). (2) BLIR DA:

$$3X + 0 \cdot Y - 6 = 0 \Rightarrow X = 2$$

SETTER INN FOR $X = 2$ I (1):

$$-2 \cdot 2 + Y + 1 = 0 \Rightarrow Y = 3$$

$$X^* = 2, \quad Y^* = 3$$

4 a)

STASJONÆRPUNKT FINNES:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 2y + 2z = 0 \qquad 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 8y = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 8z = 0 \quad \Rightarrow z = -\frac{x}{4}$$

SETTER INN FOR y OG z I 1:

$$8x - 2 \cdot \frac{x}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^* = 0$$

$$y^* = \frac{x^*}{4} = 0 \qquad z^* = -\frac{x^*}{4} = 0$$

STASJONÆRPUNKT: $x^* = y^* = z^* = 0$

15

FINNER HESSEMATRISEN:

$f_{xx} = 8 \quad f_{xy} = -2 \quad f_{xz} = 2$

$f_{yx} = -2 \quad f_{yy} = 8 \quad f_{yz} = 0$

$f_{zx} = 2 \quad f_{zy} = 0 \quad f_{zz} = 8$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$D_1 = 8 > 0$

$D_2 = 8 \cdot 8 - (-2) \cdot (-2) = 64 - 4 = 60 > 0$

$$D_3 = 8 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8^3 + 2 \cdot (-16) + 2(-16) =$$

$$512 - 32 - 32 = 448 > 0.$$

ALLE TRE HOVEDMINORENE ER POSITIVE.

ALTÅ ER STASJONÆRPUNKTET ET MINIMUMS-PUNKT.

4 b)

VI MÅ SKRIVE OM OPT. PROBLEMET:

$$\max_{x,y} \quad -7 - 5(x-1)^2 - 2(y-3)^2$$

GITT

$$-x \leq -2$$

$$-y \leq -2$$

$$L = -7 - 5(X-1)^2 - 2(Y-3)^2 - \lambda_1(-X+2) - \lambda_2(-Y+2)$$

1. ORD. BET:

$$\frac{\partial L}{\partial X} = -10(X-1) + \lambda_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -4(Y-3)^2 + \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

KOMPL. SLACK:

$$\left.\begin{array}{ll} X = 2 & \text{HVIS } \lambda_1 > 0 \\ X > 2 & \text{HVIS } \lambda_1 = 0 \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} Y = 2 & \text{HVIS } \lambda_2 > 0 \\ Y > 2 & \text{HVIS } \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} (4)$$

SER PÅ FIRE MULIGE KOMBINASJONER AV λ_1 OG λ_2.

A. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

FRA 1 HAR VI: $-10(x-1) + 0 = 0$

$\Rightarrow x = 1$. IKKE MULIG

B. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$

VI FÅR $x = 1$ SOM ER TILSVARENDE SOM A.

IKKE MULIG.

C. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$.

FRA 3 FÅR VI: $x = 2$

FRA 2 FÅR VI: $-4(y-3) + 0 = 0$

$\Rightarrow y = 3$

MULIG LØSNING SIDEN 1 OG 4 ER OPPFYLT. 1 GIR $\lambda_1 = 10(2-1) = 10 > 0$

4 GIR $Y > 2$ SOM ER OPPFYLT DA $Y = 3$.

D. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

FRA 3 OG 4 FÅR VI: $X = Y = 2$.

INNSATT FOR Y I 2 FÅR VI:

$$\lambda_2 = 4(Y-3) = 4(2-3) = -4 < 0.$$

MEN SIDEN $\lambda_2 > 0$, ER DET IKKE MULIG.

KUN ÉN MULIG LØSNING:

$$X^* = 2, \quad Y^* = 3.$$

SAMME LØSNING KAN SEES DIREKTE.

$Y=3$ MINIMERER $(Y-3)^2$, MENS

$X=2$ MINIMERER $(X-1)^2$, GITT AT $X \geq 2$.